Universidade Federal de Pernambuco
CCEN - Programa de Pós-Graduação em Física

Prova do Curso de Verão de Mecânica Quântica
14/02/2020

Nome: ______________________________ **CPF:** ____________

Questão 1 (3,0) Considere que uma partícula de massa m está sujeita ao seguinte potencial unidimensional: $V(x) = -\varepsilon\,\delta(x)$, onde ε é uma constante positiva e $\delta(x)$ é a função delta de Dirac. Considerando que a partícula está em um estado ligado, qual deve ser a energia da partícula? Dica: Use a equação de Schroedinger independente do tempo, a condição de continuidade da função de onda e note que a primeira derivada da função de onda deve ser descontínua.

Questão 2 (5,0) Considere uma partícula de spin 1/2 e que seu spin é o único grau de liberdade relevante. Sejam L_x, L_y, e L_z os operadores de momento angular, $L^2 = L_x^2 + L_y^2 + L_z^2$, e $L_\pm = L_x \pm i\,L_y$.

a) (1,6) Monte as representações matriciais 2×2 de L_x e L^2 na base de autoestados de L_z, ou seja, na base $\{|z,+\rangle, |z,-\rangle\}$. Dica: Use os dados fornecidos abaixo.

b) (1,6) Suponha que em $t = 0$ o sistema está no estado $|\psi(0)\rangle = |z,+\rangle$ e considere o observável $N = L_z + \sqrt{3}L_x$. Quais são os valores que podem ser obtidos em uma medição de N e qual é a probabilidade de obtermos esses valores no instante $t = 0$?

c) (1,8) Considerando a condição inicial $|\psi(0)\rangle = |z,+\rangle$ e que o hamiltoniano do sistema é dado por $H = \omega\,L_x$. Obtenha o estado do sistema para $t \geq 0$.

Questão 3 (2,0) - Considere uma fonte de partículas de spin 1/2 tal que **um terço** das partículas são geradas no estado $|z,+\rangle$ e o restante das partículas é gerada no estado $|z,-\rangle$.

a) (1,0) Qual é a forma adequada de representar esse sistema na mecânica quântica? Forneça sua resposta explicitamente.

b (1,0) Qual é a média do observável L_x para as partículas advindas dessa fonte?

Dados

$$\delta(x) = \begin{cases} 0 \text{ se } x \neq 0 \\ \infty \text{ se } x = 0 \end{cases} \quad , \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\,dx = 1\ , \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\delta(x)\,dx = f(0)$$

$$i\hbar\partial_t\Psi = -\frac{\hbar^2}{2m}\partial_x^2\Psi + V(x)\Psi\ , \ \Psi(t,x) = e^{-iEt/\hbar}\,\psi(x) \quad \Rightarrow \quad E\,\psi = -\frac{\hbar^2}{2m}\partial_x^2\psi + V(x)\psi$$

$$[L_x, L_y] = i\hbar L_z\ , \ \ [L_y, L_z] = i\hbar L_x\ , \ \ [L_z, L_x] = i\hbar L_y\ , \ \ [L^2, L_i] = 0.$$

$$L^2|\ell, m\rangle = \hbar^2\ell(\ell+1)|\ell, m\rangle\ , \ \ L_z|\ell, m\rangle = \hbar m|\ell, m\rangle\ ,$$

$$L_+|\ell, m\rangle = \hbar\sqrt{\ell(\ell+1) - m(m+1)}\,|\ell, m+1\rangle\ , \ \ L_-|\ell, m\rangle = \hbar\sqrt{\ell(\ell+1) - m(m-1)}\,|\ell, m-1\rangle\ .$$