

Gabarito da Prova do Curso de Verão de Mecânica Quântica
14/02/2020 - Prof. Carlos Batista

Questão 1 (3,0) Considere que uma partícula de massa m está sujeita ao seguinte potencial unidimensional: $V(x) = -\varepsilon \delta(x)$, onde ε é uma constante positiva e $\delta(x)$ é a função delta de Dirac. Considerando que a partícula está em um estado ligado, qual deve ser a energia da partícula?

Solução

A equação de de Schroedinger fornece $\frac{-\hbar^2}{2m} \psi'' - \varepsilon \delta(x) \psi = E \psi$. Como queremos estados ligados e $V(\pm\infty) = 0$, devemos ter $E < 0$. Sendo assim escrevamos $E = -|E|$. Em $x \neq 0$ o potencial é zero e a equação de Schroedinger torna-se

$$\psi'' = \frac{2m|E|}{\hbar^2} \psi = \lambda^2 \psi \text{ se } x \neq 0 \Rightarrow \psi = A e^{\lambda x} + B e^{-\lambda x}, \text{ onde } \lambda \equiv \sqrt{\frac{2m|E|}{\hbar^2}}.$$

Esse tipo de solução deve valer tanto para $x < 0$ quanto para $x > 0$. Mas, a fim de que a função de onda seja normalizável, devemos manter apenas a exponencial decrescente $e^{-\lambda x}$, ao passo que para $x < 0$ a função $e^{-\lambda x}$ diverge em $x = -\infty$ e devemos manter apenas $e^{\lambda x}$. Em suma, a solução parcial é:

$$\psi(x) = \begin{cases} A e^{\lambda x} & \text{se } x < 0, \\ B e^{-\lambda x} & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

Impondo a continuidade de $\psi(x)$ em $x = 0$, temos: $\psi(0^-) = \psi(0^+)$. Logo, $A = B$. Então integrando a equação de Schroedinger no intervalo $x \in -\epsilon, \epsilon$, onde ϵ é um número real positivo tendendo a zero, temos:

$$\frac{-\hbar^2}{2m} [\psi'(\epsilon) - \psi'(-\epsilon)] - \varepsilon \psi(0) = 2\epsilon E \psi(0) \Rightarrow \psi'(0^+) - \psi'(0^-) = -\frac{2m\varepsilon}{\hbar^2} \psi(0) = -\frac{2m\varepsilon}{\hbar^2} A \Rightarrow -2\lambda A = -\frac{2m\varepsilon}{\hbar^2} A \Rightarrow \lambda = \frac{m\varepsilon}{\hbar^2}.$$

Então, inserindo a definição de λ na equação anterior, temos

$$\sqrt{\frac{2m|E|}{\hbar^2}} = \frac{m\varepsilon}{\hbar^2} \Rightarrow E = -\frac{m\varepsilon^2}{2\hbar^2}.$$

Questão 2 (5,0) Considere uma partícula de spin $1/2$ e que seu spin é o único grau de liberdade relevante. Sejam L_x, L_y , e L_z os operadores de momento angular, $L^2 = L_x^2 + L_y^2 + L_z^2$, e $L_{\pm} = L_x \pm i L_y$.

a) (1,6) Monte as representações matriciais 2×2 de L_x e L^2 na base de autoestados de L_z , ou seja, na base $\{|z, +\rangle, |z, -\rangle\}$. Dica: Use os dados fornecidos abaixo.

b) (1,6) Suponha que em $t = 0$ o sistema está no estado $|\psi(0)\rangle = |z, +\rangle$ e considere o observável $N = L_z + \sqrt{3}L_x$. Quais são os valores que podem ser obtidos em uma medição de N e qual é a probabilidade de obtermos esses valores no instante $t = 0$?

c) (1,8) Considerando a condição inicial $|\psi(0)\rangle = |z, +\rangle$ e que o hamiltoniano do sistema é dado por $H = \omega L_x$. Obtenha o estado do sistema para $t \geq 0$.

Solução

a) Como nesse espaço todos os estados têm $\ell = 1/2$, segue que $L^2 = \hbar^2 \ell(\ell+1) \mathbb{I} = \frac{3\hbar^2}{4} \mathbb{I}$, onde $\mathbb{I}$ é o operador identidade. Para calcular a representação de L_x , usamos que $L_x = \frac{1}{2}(L_+ + L_-)$ junto com o fato de que $L_+|z, +\rangle = 0$, $L_+|z, -\rangle = \hbar|z, +\rangle$, $L_-|z, +\rangle = \hbar|z, -\rangle$, $L_-|z, -\rangle = 0$. Dessas expressões obtemos

$$L_x \sim \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ e } L^2 \sim \frac{3\hbar^2}{4} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Como a base que estamos usando é a de autoestados de L_z segue que sua representação nessa base é diagonal. Mais precisamente, $L_z \sim \frac{\hbar}{2} \text{diag}(1, -1)$. Então, a representação do observável N é:

$$N \sim \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Autovalores de Autovetores : } \begin{cases} n_1 = \hbar, & |n_1\rangle \sim \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix} \\ n_2 = -\hbar, & |n_2\rangle \sim \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} \end{cases}$$

Pelos postulados da mecânica quântica, as medições de N só podem fornecer seus autovalores, ou seja, $\pm\hbar$. A probabilidade de medir $n_1 = \hbar$ é $P_1 = |\langle z, + | n_1 \rangle|^2 = |\frac{\sqrt{3}}{2}|^2 = 3/4$. Por sua vez, a probabilidade de medirmos $n_2 = -\hbar$ é a probabilidade complementar, $P_2 = 1/4$.

c) Os autoestados de L_x são $|x, +\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, cujo autovalor é $+\hbar/2$ e $|x, -\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, cujo autovalor é $-\hbar/2$. Logo, os autovalores e autovetores do hamiltoniano são:

$$E_1 = \hbar/2, \quad |E_1\rangle \frac{1}{\sqrt{2}}(|z, +\rangle + |z, -\rangle) \quad \text{e} \quad E_2 = -\hbar/2, \quad |E_2\rangle \frac{1}{\sqrt{2}}(|z, +\rangle - |z, -\rangle) \Rightarrow |\psi(0)\rangle = |z, +\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|E_1\rangle + |E_2\rangle).$$

Pela equação de Schroedinger, sabemos que se $|E\rangle$ é autoestado de H com autovalor E então sua evolução temporal é dada por $e^{-iEt/\hbar}|E\rangle$. Portanto, concluímos que

$$|\psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(e^{-iE_1t/\hbar}|E_1\rangle + e^{-iE_2t/\hbar}|E_2\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}(e^{-i\omega t/2}|E_1\rangle + e^{i\omega t/2}|E_2\rangle) = \cos(\omega t/2)|z, +\rangle - i \sin(\omega t/2)|z, -\rangle.$$

Questão 3 (2,0) - Considere uma fonte de partículas de spin 1/2 tal que **um terço** das partículas são geradas no estado $|z, +\rangle$ e o restante das partículas é gerado no estado $|z, -\rangle$.

a) (1,0) Qual é a forma adequada de representar esse sistema na mecânica quântica? Forneça sua resposta explicitamente.

b) (1,0) Qual é a média do observável L_x para as partículas advindas dessa fonte?

Solução

a) Essas partículas, não estão em um estado bem definido, trata-se de uma mistura. Nesse cenário, as partículas devem ser representadas por uma matriz densidade, que no caso é dada por:

$$\rho = \frac{1}{3}|z, +\rangle\langle z, +| + \frac{2}{3}|z, -\rangle\langle z, -| \sim \begin{pmatrix} 1/3 & 0 \\ 0 & 2/3 \end{pmatrix}.$$

b) A média de L_x é dada por:

$$\langle L_x \rangle = \text{Tr}[\rho L_x] = \text{Tr}\left[\begin{pmatrix} 1/3 & 0 \\ 0 & 2/3 \end{pmatrix} \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right] = \frac{\hbar}{2} \text{Tr}\left[\begin{pmatrix} 0 & 1/3 \\ 2/3 & 0 \end{pmatrix}\right] = 0.$$

Dados

$$\delta(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \neq 0 \\ \infty & \text{se } x = 0 \end{cases}, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1, \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x) dx = f(0)$$

$$i\hbar\partial_t\Psi = -\frac{\hbar^2}{2m}\partial_x^2\Psi + V(x)\Psi, \quad \Psi(t, x) = e^{-iEt/\hbar}\psi(x) \Rightarrow E\psi = -\frac{\hbar^2}{2m}\partial_x^2\psi + V(x)\psi$$

$$[L_x, L_y] = i\hbar L_z, \quad [L_y, L_z] = i\hbar L_x, \quad [L_z, L_x] = i\hbar L_y, \quad [L^2, L_i] = 0.$$

$$L^2|\ell, m\rangle = \hbar^2\ell(\ell+1)|\ell, m\rangle, \quad L_z|\ell, m\rangle = \hbar m|\ell, m\rangle,$$

$$L_+|\ell, m\rangle = \hbar\sqrt{\ell(\ell+1) - m(m+1)}|\ell, m+1\rangle, \quad L_-|\ell, m\rangle = \hbar\sqrt{\ell(\ell+1) - m(m-1)}|\ell, m-1\rangle.$$