Terceira avaliação de Análise Funcional - 28/02/2025

Professor: Victor Hugo Gonzalez Martinez

Nome: ____

1. i) Se H é um espaço com produto interno então $\|u\| = \sup_{\|v\|=1} |(u,v)|$.

   ii) (**Hellinger–Toeplitz**) Seja H um espaço de Hilbert e $T : H \to H$ um operador tal que $(Tu, v)_H = (u, Tv)_H$ para cada $u, v \in H$. Prove que T é limitado.

   iii) Seja H um espaço de Hilbert real não nulo e T um operador auto-adjunto. Prove que

$$\|T\| = \sup_{\substack{u \in H \\ \|u\|_H = 1}} |(Tu, u)|.$$

   i) Se $u = 0$ o resultado é óbvio. Se $u \neq 0$, temos que $|(u,v)| \leq \|u\|_H \|v\|$ e assim, $\sup_{\|v\|=1} |(u,v)| \leq \|u\|$. Por outro lado, se $u \neq 0$, $\|u\| = \frac{\|u\|^2}{\|u\|} = \left|\left(u, \frac{u}{\|u\|}\right)\right| \leq \sup_{\|v\|=1} |(u,v)|$.

   ii) Suponhamos que A não é limitado, então para cada n inteiro positivo existe u_n em H com $\|u_n\| = 1$ tal que $\|Au_n\| \geq n$. Com cada u_n construímos os seguintes funcionais lineares de H:

$$f_n(u) = (Au, u_n) = (u, Au_n)$$

   Temos:

$$|f_n(u)| \leq \|u\| \, \|Au_n\| \quad (f_n \text{ é limitado })$$
$$|f_n(u)| \leq \|Au\|, \quad \text{para cada } n \quad ((f_n) \text{ é pontualmente limitado })$$

   Logo, pelo Teorema de Banach-Steinhaus, existe uma constante $C > 0$ tal que $\|f_n\| \leq C$, para todo n. Se calcularmos f_n em Au_n resulta

$$f_n(Au_n) = \|Au_n\|^2 \leq C \|Au_n\|.$$

   portanto,

$$n \leq \|Au_n\| \leq C, \quad \text{para cada} n \in \mathbb{N},$$

   o que é um absurdo. Assim, A é limitado.

   iii) Temos que, $|(Tx, x)| \leq \alpha \|x\|^2$, onde $\alpha = \sup\{|(Tu,u)| : \|u\| = 1\}$. Da identidade

$$(Tx, y) = \frac{(T(x+y), x+y) - (T(x-y), x-y)}{4}.$$

   Logo, pela identidade do paralelogramo temos para $x, y \in H$ com $\|x\| = \|y\| = 1$ que

$$\begin{aligned} |(Tx,y)| &\leq \frac{1}{4}\alpha \left(\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2\right) \\ &\leq \frac{2}{4}\alpha \left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right) \\ &= \alpha. \end{aligned}$$

   Pelo item i), segue que $\|Tx\| \leq \alpha$ e assim, $\|T\| \leq \alpha = \sup\{|(Tu,u)| : \|u\| = 1\}$. Consequentemente,

$$\|T\| = \sup_{\substack{u \in H \\ \|u\|_H = 1}} |(Tu, u)|.$$

2. Sejam E e F espaços de Banach e $T \in K(E,F)$. Assuma que $R(T)$ é fechado. Prove que:

   i) T é um operador de rank finito.

   ii) Se $\dim N(T) < \infty$ então $\dim E < \infty$.

   i) Como F é um espaço de Banach e $R(T)$ é fechado em F, segue que $R(T)$ é um espaço de Banach. Em seguida, aplicamos o Teorema da Aplicação Aberta para $T : E \to R(T)$ e obtemos que existe $\delta > 0$ tal que

$$B_{R(T)} \subset \delta T(B_E),$$

onde $B_{R(T)}$ e B_E são as bolas unitárias abertas de $R(T)$ e E, respectivamente. Assim, temos

$$\overline{B_{R(T)}} \subset \delta\overline{T(B_E)}.$$

Como T é um operador compacto, $\overline{T(B_E)}$ e, consequentemente, $\overline{B_{R(T)}}$ são compactos. Claramente, $\overline{B_{R(T)}}$ é a bola unitária fechada de $R(T)$. Logo, $R(T)$ é de dimensão finita.

ii) Seja E_0 o complemento topológico de $N(T)$ em E. Temos que $T_0 := T|_{E_0} : E_0 \to R(T)$ é bijetor. Isso pode ser visto diretamente pelo "1º Teorema do Isomorfismo" $T : E/N(T) \to R(T)$ é bijetor e como $E/N(T) = E_0$ o resultado segue. Podemos ver diretamente também, pois se $x \in E_0$ e $T_0(x) = 0$, temos que $T(x) = 0$, ou seja $x \in E_0 \cap N(T) = \{0\}$ e assim, T_0 é injetor. Para a sobrejetividade, dado $y \in R(T)$, temos que $y = T(x + u)$ com $x \in N(T)$ e $u \in E_0$ e assim, $y = T(u)$, já que $T(x) = 0$, o que mostra que $y = T_0(u)$, concluindo a demonstração que T_0 é bijetor.

3. i) Seja $T \in \mathcal{L}(E, E)$ com E um espaço de Banach. Defina o conjunto resolvente, espectro e o conjunto dos valores próprios. Mostre que o conjunto dos valores próprios está contido no espectro e que essa inclusão pode ser estrita se o espaço tiver dimensão infinita.

ii) Prove que o espectro $\sigma(T)$ de um operador limitado é compacto e $\sigma(T) \subset [-\|T\|, \|T\|]$.

i) 1) O conjunto resolvente, denotado por $\rho(T)$, é definido por

$$\rho(T) = \{\lambda \in \mathbb{R} : (T - \lambda I) : E \to E \text{ é bijetor}\};$$

2) O especto de T é $\sigma(T) = \mathbb{R}\backslash p(T)$;
3) Dizemos que λ é um auto-valor de T e escrevemos $\lambda \in VP(T)$ se $N(T-\lambda I) \neq 0$, $N(T-\lambda I)$ é chamado auto-espaço associado a λ. Para qualquer espaço de Banach E, tem-se

$$VP(T) \subseteq \sigma(T),$$

pois se T não é injetor, também é bijetor. Se $dim\, E = \infty$, pode ser que ocorra $VP(T) \not\subseteq \sigma(T)$, por exemplo, considerando o operador shift right $T : \ell^2 \to \ell^2$ dado por

$$T(u_1, u_2, u_3, \cdots) = (0, u_1, u_2, \cdots),$$

temos $0 \in \sigma(T)$ e $N(T - \lambda I) = \{0\}$, ou seja, $VP(T) = \emptyset$.

ii) Vamos mostrar que se $|\lambda| > \|T\|$, então $T - \lambda I$ é bijetor. Dado $f \in E$, considere

$$Sv = \lambda f^{-1}(Tv - f).$$

Mostremos que S é uma contração,

$$\|S_u - S_v\| = \left\|\lambda^{-1}(Tu - f) - \lambda^{-1}(Tv - f)\right\| = |\lambda|^{-1}\|Tu - Tv\| \leqslant \underbrace{\frac{\|T\|}{|\lambda|}}_{<1}\|u - v\|.$$

Por conseguinte, pelo Teorema do Ponto Fixo de Banach, existe um único $v \in E$ tal que

$$\lambda^{-1}(Tv - f) = Sv = v \Rightarrow (T - \lambda I)v = f.$$

Para compacidade, mostremos que o seu complementar $\rho(T)$ é aberto, visto que assim teremos $\sigma(T)$ fechado e subconjunto de um compacto. Para tanto, sejam $\lambda_0 \in \rho(T)$ e $f \in E$, defina

$$S_\lambda(v) = (T - \lambda_0 I)^{-1}(f + (\lambda - \lambda_0)v).$$

Mostremos que existe $r > 0$ tal que se $\lambda \in B(\lambda_0, r)$, então S é uma contração. Note que

$$\|S_\lambda u - S_\lambda v\| = \left\|(T - \lambda_0 I)^{-1}(\lambda - \lambda_0)(u - v)\right\| \leq |\lambda - \lambda_0|\left\|(T - \lambda_0 I)^{-1}\right\|\|u - v\|,$$

assim, basta considerar $r = \frac{1}{2\|(T-\lambda_0 I)^{-1}\|}$ para se obter

$$\|S_\lambda v - S_\lambda v\| < \frac{1}{2}\|u - v\|.$$

Logo, S_λ tem um único ponto fixo para cada λ satisfazendo $|\lambda - \lambda_0| < r$, ou seja, $(T - \lambda I)$ é bijetor para cada $|\lambda - \lambda_0| < r$. Portanto, para cada λ_0, $B(\lambda_0, r) \subseteq \rho(T)$ e assim, $\rho(T)$ é aberto, por conseguinte $\sigma(T)$ é fechado, e em junção de ser subconjunto de um compacto, segue que $\sigma(T)$ é compacto.

4. Prove que todo espaço de Hilbert separável de dimensão infinita é isometricamente isomorfo ao espaço ℓ^2.

Considere $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma base hilbertiana para H. Seja $T : H \to \ell^2$ definida para cada $h \in H$ por:

$$T(h) = ((e_n, h))_{n=1}^{\infty}$$

Note que para todo $h \in H$, $T(h) \in \ell^2$ pois, pela Desigualdade de Bessel para Espaços com Produto Interno:

$$\|T(h)\|_2^2 = \|((e_n, h))\|_2^2 = \sum_{n=1}^{\infty} (e_n, h)^2 \leq \|h\|^2 < \infty$$

E assim, $\|T(h)\|_2 < \infty$. Observe também que T é linear, pois para todos $h, h' \in H$ temos que:

$$T(h + h') = ((e_n, h + h')) = ((e_n, h) + (e_n, h')) = ((e_n, h)) + ((e_n, h')) = T(h) + T(h')$$

E para todo $h \in H$ e $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$T(\alpha h) = ((e_n, \alpha h)) = (\alpha (e_n, h)) = \alpha ((e_n, h)) = \alpha T(h)$$

Agora mostraremos que T é uma isometria. Como (e_n) é uma base ortonormal para H, todo $h \in H$ pode ser escrito de forma única como $h = \sum_{n=1}^{\infty} (e_n, h)\, e_n$. Portanto, temos que:

$$\|h\|^2 = \left(\sum_{n=1}^{\infty} (e_n, h)\, e_n, \sum_{k=1}^{\infty} (e_k, h)\, e_k \right) = \sum_{n=1}^{\infty} (e_n, h)^2 (e_n, e_n) = \sum_{n=1}^{\infty} (e_n, h)^2 = \|T(h)\|_2^2$$

Tirando a raiz em ambos os lados, obtemos que $\|T(h)\|_2 = \|h\|$ para todo $h \in H$. Assim, T é uma isometria e, portanto, é limitada e injetora. Por fim, mostramos que T é sobrejetora. Seja (x_n) uma sequência em ℓ^2. Defina:

$$h_x = \sum_{k=1}^{\infty} x_k e_k$$

Observe que h_x converge, pois pela Identidade de Pitágoras para Espaços com Produto Interno e como $(x_n) \in \ell^2$:

$$\|h_x\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 < \infty$$

E vemos que:

$$T(h_x) = ((e_n, h_x)) = \left(\left(e_n, \sum_{k=1}^{\infty} x_k e_k \right) \right) = \left(x_n \|e_n\|^2 \right) = (x_n).$$

Portanto, T é sobrejetora.

5. Seja H um espaço de Hilbert separável e T um operador compacto, simétrico e não nulo de H. Prove que existe um sistema ortonormal completo de H formado por autovetores de T. Escreva uma expressão para T em termos da base de autovetores.

Quando $\dim H < \infty$ segue de álgebra linear. Suponhamos que $\dim H = \infty$. Se $\sigma(T) = \{0\}$, o resultado segue do Corolário 0.4 e do fato que todo espaço separável admite uma base hilbertiana e assim, $Tv_j = 0 = 0v_j$.

Sejam $\{\lambda_n\}$ o conjunto dos autovalores distintos e não nulos de T. Seja $\lambda_0 = 0$, $E_0 = N(T - 0I) = N(T)$ e $E_n = N(T - \lambda_n I)$. Temos que $0 \leq \dim E_0 \leq \infty$ e que $0 < \dim E_n < \infty$ pelos Teoremas 0.2 e 0.3.

Mostremos que H é soma hilbertiana de $(E_n)_{n\geq 0}$.

i) $(E_n)_{n\geq 0}$ são dois a dois ortogonais.

De fato, sejam $u \in E_n$ e $v \in E_m$ com $m, n \geq 1$ e $m \neq n$. Assim, $Tu = \lambda_n u$ e $Tv = \lambda_m v$. De onde, $(Tu, v) = \lambda_n (u, v)$ e $(u, Tv) = (Tv, u) = \lambda_m (u, v)$. Então, $(\lambda_n - \lambda_m)(u, v) = 0$ e assim, $(u, v) = 0$. Agora considere $u \in E_0$ e $v \in E_n$ com $n \geq 1$. Assim, $u \in N(T)$ ou seja, $Tu = 0$. Logo, $\lambda_n (u, v) = (\lambda_n u, v) = (Tv, u) = (v, Tu) = 0$. Como $\lambda_n \neq 0$ segue que $(v, u) = 0$.

Portanto, $(E_n)_{n\geq 0}$ são dois a dois ortogonais.

ii) Seja F o espaço vetorial gerado por $(E_n)_{n\geq 0}$. Mostremos que F é denso em H.

$\vdash T(F) \subset F$.

De fato, seja $x \in F$. Então $x = \sum_{i=0}^k a_i e_i$ com $e_i \in E_i$ para cada $i = 0, \ldots, k$. Assim, $Tx = \sum_{i=0}^k A_i T e_i = \sum_{i=0}^k a_i \lambda_i e_i \in F$.

$\vdash T(F^\perp) \subset F^\perp$.

Seja $u \in F^\perp$ assim, $(u, v) = 0$ para cada $v \in F$. Dado $v \in F$ qualquer, temos que $(Tu, v) = (u, Tv) = 0$, pois $T(F) \subset F$. Logo, $Tu \in F^\perp$.

$\vdash T_0 := T|_{F^\perp} : F^\perp \to T(F^\perp) \subset F^\perp$ é compacto e auto-adjunto.

$\vdash \sigma(T_0) = \{0\}$ e assim $T_0 = 0$.

De fato, suponhamos que existe $\lambda \in \sigma(T_0)\backslash\{0\} = VP(T_0)\backslash\{0\}$. Assim, $N(T_0 - \lambda I) \neq \{0\}$, logo existe $u \neq 0$ tal que $u \in N(T_0 - \lambda I)$, ou seja, $\lambda u = T_0 u = T|_{F^\perp} u = Tu$, de onde $\lambda \in (\lambda_n)_{n\geq 1}$. Dessa forma, existe n_0 tal que $u \in E_0 \subset F$ e como $u \in F^\perp$ concluímos que $u = 0$. Portanto, $\sigma(T_0) = \{0\}$ e assim $T_0 = 0$.

$\vdash F^\perp = \{0\}$ e $\overline{F}^\perp = \{0\}$.

De fato, segue da afirmação anterior que $F^\perp \subset N(T) = E_0 \subset F$. Como $F \cap F^\perp = \{0\}$ segue que $F^\perp = \{0\}$. Por outro lado, se $u \in \overline{F}^\perp$ temos que $(u, v) = 0$ para cada $v \in \overline{F}$. Em particular, $(u, v) = 0$ para cada $v \in F$, ou seja, $u \in F^\perp = \{0\}$.

$\vdash \overline{F} = H$.

Temos que $\overline{F} \subset H$ é um subespaço vetorial fechado, logo $H = \overline{F} \oplus \overline{F}^\perp = \overline{F} \oplus \{0\} = \overline{F}$.

$\vdash$ Existe uma base hilbertiana de H formada por vetores próprios de T.

Finalmente, $E_0 = N(T)$ e $E_n = N(T - \lambda_n I)$ são fechados pois $T \in K(H)$. Pelo Teorema 0.1, $E_0 = N(T) \subset H$ é separável, logo tem base hilbertiana $(v \in N(T), Tv = 0 = 0v)$ e E_n tem base de autovetores por construção. Podemos escolher uma base hilbertiana em cada E_n formada por vetores próprios de T. A união dessas bases é uma base hilbertiana de H formada por vetores próprios de T. Por fim,

$$Tu = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n (u, e_n) e_n,$$

onde $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é a base construída.

Utilizamos os seguintes resultados:

Teorema 0.1. *Todo espaço de Hilbert separável admite uma base hilbertiana.*

Teorema 0.2 (Alternativa de Fredholm)**.** *Seja $T \in K(E)$, então*
a) $N(I - T)$ tem dimensão finta;
b) $R(T - I)$ é fechado e $R(I - T) = N(I - T^*)^\perp$;
c) $N(I - T) = \{0\}$ se, e somente se, $R(I - T) = E$;
d) $\dim N(I - T) = \dim N(I - T^*)$.

Teorema 0.3. *Seja $T \in K(E)$ com $\dim E = \infty$. Então,*
a) $0 \in \sigma(T)$;
b) $\sigma(T)\backslash\{0\} = VP(T)\backslash\{0\}$;
c) Uma das seguintes situações ocorre:

- $\sigma(T) = \{0\}$;
- $\sigma(T)$ *é fechado;*
- $\sigma(T)\backslash 0$ *é uma sequência que converge para 0.*

Corolário 0.4. *Seja $T \in \mathcal{L}(H)$ auto-adjunto com $\sigma(T) = \{0\}$. Então, $T = 0$.*