

Professor: Victor Hugo Gonzalez Martinez

Nome: _____

1.
 - i) Se H é um espaço com produto interno então $\|u\| = \sup_{\|v\|=1} |(u, v)|$.
 - ii) (**Hellinger–Toeplitz**) Seja H um espaço de Hilbert e $T : H \rightarrow H$ um operador tal que $(Tu, v)_H = (u, Tv)_H$ para cada $u, v \in H$. Prove que T é limitado.
 - iii) Seja H um espaço de Hilbert real não nulo e T um operador auto-adjunto. Prove que

$$\|T\| = \sup_{\substack{u \in H \\ \|u\|_H = 1}} |(Tu, u)|.$$

2. Sejam E e F espaços de Banach e $T \in K(E, F)$. Assuma que $R(T)$ é fechado. Prove que:
 - i) T é um operador de rank finito.
 - ii) Se $\dim N(T) < \infty$ então $\dim E < \infty$.
3.
 - i) Seja $T \in \mathcal{L}(E, E)$ com E um espaço de Banach. Defina o conjunto resolvente, espectro e o conjunto dos valores próprios. Mostre que o conjunto dos valores próprios está contido no espectro e que essa inclusão pode ser estrita se o espaço tiver dimensão infinita.
 - ii) Prove que o espectro $\sigma(T)$ de um operador limitado é compacto e $\sigma(T) \subset [-\|T\|, \|T\|]$.
4. Prove que todo espaço de Hilbert separável de dimensão infinita é isometricamente isomorfo ao espaço ℓ^2 .
5. Seja H um espaço de Hilbert separável e T um operador compacto, simétrico e não nulo de H . Prove que existe um sistema ortonormal completo de H formado por autovetores de T . Escreva uma expressão para T em termos da base de autovetores.