Segunda avaliação de Análise no $\mathbb{R}^n$ - 07/11/2024

Professor: Victor Hugo Gonzalez Martinez

Nome: ____

1. Enuncie a Regra da Cadeia para aplicações $f : U \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ e $g : V \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ e calcule as seguintes derivadas:

   i) $d(g \circ f)(0)$ se $f(x_1, x_2) = (e^{2x_1+x_2}, 3x_2 - \cos x_1, x_1^2 + x_2 + 2)$ e $g(y_1, y_2, y_3) = (3y_1 + 2y_2 + y_3^2, y_1^2 - y_3 + 1)$;

   ii) $\dfrac{\partial(g \circ f)}{\partial s}(s,t)$ e $\dfrac{\partial(g \circ f)}{\partial t}(s,t)$ se $f(s,t) = (3s + 5t, s, t)$ e $g(x, y, z) = xyz$.

2. Se $U = Gl(n)$ o conjunto das matrizes invertíveis e $f : U \subset M(n \times n) \to M(n \times n)$ dada por $f(X) = X^{-1}$. Mostre que f é diferenciável e calcule sua derivada.

3. a) Enuncie o Teorema da Função Implícita e forneça caracterização da derivada da função implícita g.

   b) Mostre que a equação
   $$x^2 y + \mathrm{e}^x + z = 0$$
   define x implicitamente como uma função de y e z numa vizinhança V do ponto $(1, -1) \in \mathbb{R}^2$, isto é, existe uma função diferenciável $g : V \to \mathbb{R}$ tal que $g(1, -1) = 0$ e $g(y, z)^2 y + \mathrm{e}^{g(y,z)} + z = 0$, para todo $(y, z) \in V$. Encontre as derivadas $\frac{\partial g}{\partial y}(1, -1)$ e $\frac{\partial g}{\partial z}(1, -1)$.

4. Utilizando o Teorema da Função Implícita como hipótese, demonstre o Teorema da Função Inversa.

5. Considere em $\mathbb{R}^2$ a norma $\|(x, y)\|_p = (|x|^p + |y|^p)^{\frac{1}{p}}$ onde $1 < p < \infty$. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = ax + by$. Mostre que
   $$\|f\| := \sup_{\substack{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \\ \|(x,y)\|_{p=1}}} |ax + by| = (|a|^q + |b|^q)^{\frac{1}{q}},$$
   onde q é tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

   Dica: Se X é um espaço normado e $f : X \to \mathbb{R}$ é um funcional linear limitado, então
   $$\|f\| := \sup_{x \in X, \|x\|_X = 1} |f(x)| = \sup_{x \in X, \|x\|_X = 1} f(x).$$

6. Uma função $f : U \to \mathbb{R}$ de classe C^2 é dita ser harmônica quando,
   $$\Delta f(x) := \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x) = 0,$$
   para todo $x \in U$. Prove que se f é harmônica então a matriz hessiana de f não é definida (isto é, não é positiva e nem negativa).