Primeira avaliação de Topologia - 24/04/2023

Professor: Victor Hugo Gonzalez Martinez

Nome: ____

1. (2,0) Seja X um epaço topológico. Mostre que $A \subseteq X$ é aberto se, e somente se, $A \cap \overline{X} \subseteq \overline{A \cap X}$.

2. (2,0)

   a) Mostre que a interseção arbitrárias de topologias de X é uma topologia de X.

   b) Seja $\mathcal{B}$ uma base em X. Mostre que a topologia gerada por $\mathcal{B}$ é a interseção de todas as topologias que contém $\mathcal{B}$.

3. (2,0) Mostre que as topologias $\mathbb{R}_K$ e $\mathbb{R}_l$ não são comparáveis.

4. (2,0) Seja $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} F_\lambda$ uma união de conjuntos fechados de um espaço métrico (X, d) tais que $d(F_{\lambda_1}, F_{\lambda_2}) = \inf\{d(x, y) : x \in F_{\lambda_1}, y \in F_{\lambda_2}\} \geq \varepsilon$ sempre que $\lambda_1 \neq \lambda_2$, onde $\varepsilon > 0$ é um número fixado. Mostre que $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} F_\lambda$ é fechado. Dê um exemplo em $\mathbb{R}^2$ de uma família $\{F_i\}_{i=1}^{\infty}$ satisfazendo essa condição.

5. (2,0) Considere o quadrado $[0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$ e identifique cada ponto $(0, x)$ com o ponto $(2\pi, x)$. Mostre que o espaço quociente resultante é homeomorfo ao cilindro $\mathbb{S}^1 \times [0, 2\pi]$.

6. (Extra) Seja Y um espaço topológico e suponha que $Y = D \cup E$ com $D \cap E = \emptyset$, $\overline{D} = Y$ e $\overline{E} = Y$. Se $X \subset Y$ é fechado, mostre que existe $V \subseteq X$ com $\mathrm{fr}(V) = X$.

   Roteiro:

   (a) Considere $V = X - (D \cap \mathrm{int}(X))$.

   (b) Mostre que $\mathrm{fr}(V) \subseteq X$.

   (c) Mostre que $V = (X \cap E) \cup \mathrm{fr}(X)$.

   (d) Utilize o primeiro exercício desta avalição para concluir que $E \cap \mathrm{int}(X)$ é denso em $\mathrm{int}(X)$.

   (e) Mostre que $\mathrm{fe}(V) \supseteq X$.

   (f) Deduza que $\mathrm{fe}(V) = X$.

   (g) Mostre que $\mathrm{int}(V) = \emptyset$

   (h) Conclua.

   Lembre-se das relações: $Y - \mathrm{int}(E) = \mathrm{fe}(Y - E)$, $Y - \mathrm{fe}(E) = \mathrm{int}(Y - E)$, $\mathrm{fr}(E) = \overline{E} - \mathrm{int}\, E$ e $\mathrm{int}(E) \cup \mathrm{fr}(E) = \mathrm{fe}(E)$.