

Nome: \_\_\_\_\_

1. (2,0) Seja  $X$  um espaço topológico. Mostre que  $A \subseteq X$  é aberto se, e somente se,  $A \cap \overline{B} \subseteq \overline{A \cap B}$ , para cada  $B \subseteq X$ .
2. (2,0)
  - a) Mostre que a interseção arbitrárias de topologias de  $X$  é uma topologia de  $X$ .
  - b) Seja  $\mathcal{B}$  uma base em  $X$ . Mostre que a topologia gerada por  $\mathcal{B}$  é a interseção de todas as topologias que contém  $\mathcal{B}$ .
3. (2,0) Mostre que as topologias  $\mathbb{R}_K$  e  $\mathbb{R}_l$  não são comparáveis.
4. (2,0) Seja  $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} F_\lambda$  uma união de conjuntos fechados de um espaço métrico  $(X, d)$  tais que  $d(F_{\lambda_1}, F_{\lambda_2}) = \inf \{d(x, y) : x \in F_{\lambda_1}, y \in F_{\lambda_2}\} \geq \varepsilon$  sempre que  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ , onde  $\varepsilon > 0$  é um número fixado. Mostre que  $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} F_\lambda$  é fechado. Dê um exemplo em  $\mathbb{R}^2$  de uma família  $\{F_i\}_{i=1}^\infty$  satisfazendo essa condição.
5. (2,0) Considere o quadrado  $[0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$  e identifique cada ponto  $(0, x)$  com o ponto  $(2\pi, x)$ . Mostre que o espaço quociente resultante é homeomorfo ao cilindro  $\mathbb{S}^1 \times [0, 2\pi]$ .
6. (Extra) Seja  $Y$  um espaço topológico e suponha que  $Y = D \cup E$  com  $D \cap E = \emptyset$ ,  $\overline{D} = Y$  e  $\overline{E} = Y$ . Se  $X \subset Y$  é fechado, mostre que existe  $V \subseteq X$  com  $\text{fr}(V) = X$ .

Roteiro:

- (a) Considere  $V = X - (D \cap \text{int}(X))$ .
- (b) Mostre que  $\text{fr}(V) \subseteq X$ .
- (c) Mostre que  $V = (X \cap E) \cup \text{fr}(X)$ .
- (d) Utilize o primeiro exercício desta avaliação para concluir que  $E \cap \text{int}(X)$  é denso em  $\text{int}(X)$ .
- (e) Mostre que  $\text{fe}(V) \supseteq X$ .
- (f) Deduza que  $\text{fe}(V) = X$ .
- (g) Mostre que  $\text{int}(V) = \emptyset$ .
- (h) Conclua.

Lembre-se das relações:  $Y - \text{int}(E) = \text{fe}(Y - E)$ ,  $Y - \text{fe}(E) = \text{int}(Y - E)$ ,  $\text{fr}(E) = \overline{E} - \text{int} E$  e  $\text{int}(E) \cup \text{fr}(E) = \text{fe}(E)$ .