UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO

Professor: Victor Hugo Gonzalez Martinez

Segundo Exercício Escolar - Cálculo 3 - T7

Nome:____

Observação: A nota máxima da prova é 10.

1. (2.0) Em cada item, calcule a integral de linha:

a) $\int_C F \cdot dr$, onde $F(x,y) = \left(xy, 3y^2\right)$ e C é o segmento de reta que liga $(0,1)$ a $(1,2)$.

b) $\int_C xy^4 ds$, onde C é a parte do círculo $x^2 + y^2 = 16$ que satisfaz $x \geq 0$.

a) Parametrizamos C por $r(t) = (t, 1+t), 0 \leq t \leq 1$. Então:

$$\begin{aligned}\int_C F \cdot dr &= \int_0^1 \left(t(1+t), 3(1+t)^2\right) \cdot (1,1)dt \\ &= \int_0^1 t + t^2 + 3 + 6t + 3t^2 dt = \left[3t + 7t^2/2 + 4t^3/3\right]_0^1 \\ &= 3 + 7/2 + 4/3 = \frac{18+21+8}{6} = \frac{47}{6}.\end{aligned}$$

b) Parametrizamos C por $r(t) = (4\cos t, 4\sin t), -\pi/2 \leq t \leq \pi/2$. Temos $\|r'(t)\| = 4$, então:

$$\int_C xy^4 ds = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 4\cos t \cdot 4^4 \sin^4 t \cdot 4dt = 4^6 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos t \sin^4 t dt.$$

Fazendo $u = \sin t$, temos $du = \cos t dt$, o valor acima é igual a

$$4^6 \int_{-1}^{1} u^4 du = 4^6 \left[\frac{u^5}{5}\right]_{-1}^{1} = 4096 \cdot \frac{1-(-1)}{5} = \frac{8192}{5}.$$

2. (2.0) Utilizando o Teorema de Green, calcule as seguintes integrais de linha:

a) $\oint_\gamma (y - x + \arctan x)dx + \left(2x - y + \sqrt{1+y^2}\right) dy$, onde γ é a fronteira da região limitada por $y = x + 2$ e $y = x^2$.

b) $\oint_\gamma \left(xy - \frac{y^3}{3}\right) dx + \left(x + \frac{x^3}{3} + y\right) dy$, onde γ é a fronteira da região Ω entre as circunferências $x^2 + y^2 = 1$ e $x^2 + y^2 = 4$, orientada positivamente.

a) Sejam $P(x,y) = y - x + \arctan x$ e $Q(x,y) = \left(2x - y + \sqrt{1+y^2}\right)$, pelo Teorema de Green, temos

$$
\begin{aligned}
\oint_\gamma Pdx + Qdy &= \iint_D \frac{\partial}{\partial x}\left(2x - y + \sqrt{1+y^2}\right) - \frac{\partial}{\partial y}(y - x + \arctan x) dA \\
&= \iint_D (2-1) dA \\
&= \iint_D dA \\
&= \int_{-1}^{2}\int_{x^2}^{x+2} dydx \\
&= \int_{-1}^{2} x + 2 - x^2 dx \\
&= \frac{x^2}{2} + 2x - \frac{x^3}{3}\bigg|_{-1}^{2} \\
&= \left(\frac{4}{2} - \frac{1}{2}\right) + 2(2-(-1)) - \left(\frac{2^3}{3} - \frac{(-1)^3}{3}\right) \\
&= \frac{3}{2} + 6 - 3 = \frac{3}{2} + 3 = \frac{9}{2}.
\end{aligned}
$$

b) Sejam $P(x,y) = \left(xy - \frac{y^3}{3}\right)$ e $Q(x,y) = \left(x + \frac{x^3}{3} + y\right)$, pelo Teorema de Green,

$$
\begin{aligned}
\oint_\gamma Pdx + Qdy &= \iint_D \frac{\partial}{\partial x}\left(x + \frac{x^3}{3} + y\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(xy - \frac{y^3}{3}\right) dA \\
&= \iint_D (1+x^2) - (x - y^2) dA \\
&= \int_0^{2\pi}\int_1^2 (1 + (r\cos(\theta))^2 - r\cos(\theta) + (r\,\mathrm{sen}(\theta))^2) r dr d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\int_1^2 (1 + r^2 - r\cos(\theta)) r dr d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\int_1^2 r + r^3 - r^2\cos(\theta) dr d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{r^2}{2} + \frac{r^4}{4} - \frac{r^3}{3}\cos(\theta)\bigg|_1^2 d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{3}{2} + \frac{15}{4} d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{21}{4} d\theta = \frac{21\pi}{2}.
\end{aligned}
$$

3. (2.0) Determine o plano tangente à superfície com equações paramétricas $x = u^2$, $y = v^2$ e $z = u+2v$ no ponto $(1,1,3)$.

Primeiro, vamos calcular os vetores tangentes:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{r}_u &= \frac{\partial x}{\partial u}\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial u}\mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial u}\mathbf{k} = 2u\mathbf{i} + \mathbf{k} \\
\mathbf{r}_v &= \frac{\partial x}{\partial v}\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial v}\mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial v}\mathbf{k} = 2v\mathbf{j} + 2\mathbf{k}
\end{aligned}
$$

Assim, o vetor normal ao plano tangente é

$$
\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2u & 0 & 1 \\ 0 & 2v & 2 \end{vmatrix} = -2v\mathbf{i} - 4u\mathbf{j} + 4uv\mathbf{k}
$$

Observe que o ponto $(1, 1, 3)$ corresponde aos valores dos parâmetros $u = 1$ e $v = 1$, de forma que o vetor normal ali é

$$-2\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$$

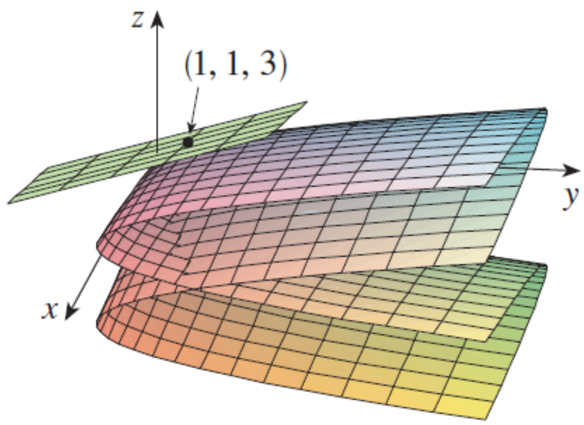
Portanto, uma equação do plano tangente em $(1, 1, 3)$ é

$$-2(x-1) - 4(y-1) + 4(z-3) = 0$$

ou seja,

$$x + 2y - 2z + 3 = 0.$$

Uma ilustração do plano tangente é dada na figura abaixo:

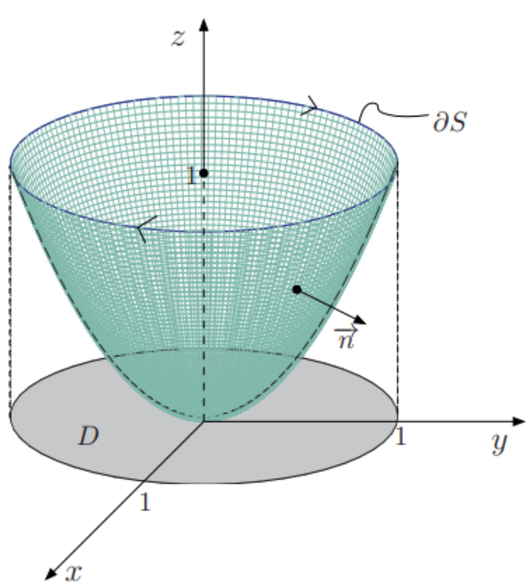


4. (3.0) Verifique o teorema de Stokes, **calculando as duas integrais do enunciado**, para $F(x, y, z) = (y, -x, 0)$, onde S é o parabolóide $z = x^2 + y^2$, com $0 \leq z \leq 1$, e n apontando para fora de S.

Devemos verificar a seguinte igualdade:

$$\oint_{\partial S^+} F \cdot dr = \iint_S \operatorname{rot} F \cdot n dS$$

Os esboços de S e ∂S estão representados a seguir.



O bordo de $S, \partial S$, é a circunferência de raio 1, centrada em $(0,0,1)$, contida no plano $z = 1$. Para que ∂S fique orientado positivamente com relação a S, devemos orientá-lo no sentido horário, quando visto de cima. Temos, então, ∂S^-(com sentido anti-horário), dado por $x = \cos t, y = \operatorname{sen} t$ e $z = 1$, com $0 \leq t \leq 2\pi$. Portanto $dx = -\operatorname{sen} t dt$, $dy = \cos t dt$ e $dz = 0dt$. Então,

$$\begin{aligned}
&\oint_{\partial S^+} F \cdot dr = -\oint_{\partial S^-} F \cdot dr = -\oint_{\partial S^-} ydx - xdy + 0dz = \\
&= -\int_0^{2\pi} [(\operatorname{sen} t)(-\operatorname{sen} t) - (\cos t)(\cos t)]dt = \\
&= \int_0^{2\pi} \left(\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t\right) dt = 2\pi.
\end{aligned}$$

Temos $S : z = x^2 + y^2 = f(x,y)$, com $(x,y) \in D : x^2 + y^2 \leq 1$, portanto um vetor normal a S é $N = (-f_x, -f_y, 1) = (-2x, -2y, 1)$ e $dS = \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}dxdy$. Como n aponta para fora, então $n = \frac{(2x,2y,-1)}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}}$. Temos também que o rotacional de $F = (y, -x, 0)$ é dado por:

$$\nabla \times F = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y & -x & 0 \end{vmatrix} = (0, 0, -2).$$

Então,

$$\iint_S \operatorname{rot} F \cdot ndS = \iint_D (0,0,-2) \cdot (2x, 2y, -1)dxdy = \iint_D 2dxdy = 2A(D) = 2\pi.$$

5. (2.0) Considere o campo vetorial $F(x,y,z) = \left(x^3 + y^3, y^3 + z^3, z^3 + x^3\right)$.

a) Determine o divergente de F.

b) Calcule $\iint_S F \cdot dS$, onde S é a superfície esférica com origem no centro e raio 2, orientada para fora.

a) $\operatorname{div} F = 3x^2 + 0 + 3y^2 + 0 + 3z^2 + 0 = 3\left(x^2 + y^2 + z^2\right)$

b) Tomamos a esfera $E : x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$, orientada para fora. Pelo Teorema de Gauss:

$$\iint_S F \cdot dS = \iiint_E \operatorname{div} F dV = \iiint_E 3\left(x^2 + y^2 + z^2\right) dxdydz.$$

Utilizando coordenadas esféricas, temos $x = \rho \operatorname{sen}\phi \cos\theta, y = \rho \operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\theta, z = \rho\cos\phi, 0 \leq \rho \leq 2$, $0 \leq \phi \leq \pi, 0 \leq \theta \leq 2\pi$ e $dxdydz = \rho^2 \operatorname{sen}\phi d\rho d\phi d\theta$, também sabemos que $x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2$. Então:

$$\iint_S F \cdot dS = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^2 3\rho^2 \cdot \rho^2 \operatorname{sen}\phi d\rho d\phi d\theta = 3 \cdot 2\pi \cdot \int_0^{\pi} \operatorname{sen}\phi d\phi \int_0^2 \rho^4 d\rho = 6\pi \cdot 2 \cdot \frac{2^5}{5} = \frac{384\pi}{5}.$$