RELATÓRIO ALUNO(A) PIBIC, PIBITI, PIBIC ENSINO MÉDIO – CNPq/UFPE

1. IDENTIFICAÇÃO

- **Projeto:** Pesquisa Científica em Equações Diferenciais
- **Orientador:** Roberto de A. Capistrano Filho - CPF: 008.167.044-30
- **Instituição:** Universidade Federal de Pernambuco, Campus: Recife.
- **Centro:** Centro de Ciências Exatas e da Natureza
- **Departamento:** Departamento de Matemática
- **Bolsista:** Mateus Ferreira de Melo - CPF: 110.588.484-88
- **Vigência do projeto**: 01/08/2020 à 31/07/2021
- **e-mail do Orientador**: roberto.capistranolho@ufpe.br
- **e-mail do Bolsista:** mateufmelo@gmail.com

2. OBJETIVOS DO PROJETO DO ALUNO

2.1. Objetivos e Metas do Projeto

Do ponto de vista científico, o objetivo deste projeto é o estudo de modelos matemáticos que possuem como representação uma Equação Diferencial Parcial (EDP). Contudo, para um entendimento preciso dessas equações alguns pontos básicos devem ser estudados. O aluno Mateus Ferreira de Melo estudou alguns conceitos básicos em dimensão finita desses problemas, que envolvem EDO's, para assim, com o uso de Análise Funcional, poder adentrar em EDP's que possuem algum sentido físico. Precisamente, o Aluno em questão estudou problemas de controle relacionado a equações de fluidos.

No que diz respeito a Teoria de Controle, foi estudado, por exemplo, controlabilidade em dimensão finita, relações dos vários tipos de definição de controlabilidade, a saber, controle nulo, exato e aproximado. Além disso, outra ideia do projeto é que o bolsista estude controlabilidade para equações que modelam movimento de onda d'água, unidimensional, em um canal, a chamada de Korteweg-de Vries.

Por fim, tal projeto não possui somente objetivos do ponto de vista científico. Do ponto de vista sócio-econômico, a ideia do coordenador do projeto está sendo de acompanhar o aluno, atualmente bolsista de IC. Para conhecimento, o aluno Mateus Ferreira está sendo acompanhado desde de 2017, tendo bolsa de IC desde seu segundo semestre do curso de Bacharelado. Com esta ideia acredita-se que com o final de seu curso, o aluno Mateus está apto a ingressar em uma pós-graduação, seja em nosso programa de pós-graduação, ou qualquer outro do país. Adicionalmente, como, em Recife e região, temos um número baixo de alunos formados em matemática anualmente, a ideia do projeto de acompanhamento deu certo até o momento. Sem reprovações e com possibilidade concreta de formação com uma alta qualidade, este aluno está apto para desenvolver atividades em escolas públicas ou privadas, bem como em universidades privadas da região.

3. PRINCIPAIS ETAPAS EXECUTADAS PELO ALUNO NO PERÍODO

As etapas a seguir foram estudadas pelo bolsista:

- Introdução e conceitos preliminares em dimensão finita e infinita: Estimativas de energia e espaços; Controle interno e de fronteira; estabilização;
- Controle exato da equação da onda: Caracterização por dualidade do controle exato e Regularidade escondida; Método dos multiplicadores e demonstração da desigualdade de observabilidade; Método de Fourier e Desigualdades de Ingham;
- Controle exato da equação de Korteweg-de Vries: Método direto; Método por dualidade e demonstração da desigualdade de observabilidade.

4. APRESENTAÇÃO E DISCUSSÃO SUSCINTA DOS PRINCIPAIS RESULTADOS OBTIDOS ATÉ O MOMENTO

Sejam $T > 0$ e $L > 0$. Dadas $u \in L^2(0,T)$ (controle) e $y_0 \in L^2(0,L)$ (dado inicial), consideramos o problema de Cauchy

$$\begin{cases} y_t + y_x = 0, t \in (0,T), x \in (0,L), \\ y(t,0) = u(t), t \in (0,T) \\ y(0,x) = y^0(x), x \in (0,L)\,. \end{cases} \qquad (1)$$

Vamos definir o que é uma solução generalizada dessa equação. Para motivar esta definição, suponha que $y \in C^1([0,T] \times [0,L])$ satisfaz as igualdades acima. Seja $\tau \in [0,T]$ e $\phi \in C^1([0,\tau] \times [0,L])$ qualquer. Multiplicando (1) por ϕ e integrando por partes, obtemos

$$- \int_0^\tau \int_0^L (\phi_t + \phi_x) y dx dt + \int_0^\tau y(t,L)\phi(t,L)dt - \int_0^\tau u(t)\phi(t,0)dt$$
$$+ \int_0^L y(\tau,x)\phi(\tau,x)dx - \int_0^L y^0(x)\phi(0,x)dx = 0$$

o que nos leva à seguinte definição:

Definição 1. Uma solução generalizada para o problema de Cauchy [1] é uma função $y \in C^0([0,T];L^2(0,L))$ tal que, para todo $\tau \in [0,T]$ e toda função $\phi \in C^1([0,\tau]\times[0,L])$ tal que

$$\phi(t,L)=0, \forall t \in [0,\tau]$$

vale que

$$-\int_0^\tau \int_0^L (\phi_t+\phi_x) y\,dx\,dt - \int_0^\tau u(t)\phi(t,0)dt$$
$$+\int_0^L y(\tau,x)\phi(\tau,x)dx - \int_0^L y^0(x)\phi(0,x)dx = 0,$$

Proposição 1. *Suponha que* $y \in C^1([0,T]\times[0,L])$ *é uma solução generalizada de [1]. Então vale* $y_t+y_x=0, t\in(0,T), x\in(0,L)$, $y(t,0)=u(t), t\in(0,T)$, $y(0,x)=y^0(x), x\in(0,L)$ *. Em particular, concluímos que* $u \in C^1([0,T])$ *e* $y^0 \in C^1([0,L])$*.*

Proposição 2. *Sejam* $y_0 \in L^2(0,L), u \in L^2(0,T)$ *dados. Então o problema de Cauchy [1] tem solução única. Tal solução satisfaz* $||y(\tau,\cdot)||_2 \leq ||y^0||_2 + ||u||_2$

Definição 2. Dizemos que o problema de Cauchy [1] é **controlável no tempo T** se para quaisquer $y^0, y^1 \in L^2(0,L)$, existe $u \in L^2(0,T)$ tal que a solução de [1] satisfaz $y(T,\cdot)=y_1$.

Teorema 2. *O problema de Cauchy [1] é controlável se, e somente se* $T \geq L$*.*

Definição 3. Seja $T>0$. O sistema [1] é dito *nulo controlável no tempo T* se, para cada $y^0 \in L^2(0,L)$, existe $u \in L^2(0,T)$ tal que a solução de [1] satisfaz $y(T,\cdot)=0$.

Lema 3. *O sistema [1] é controlável no tempo T se, e somente se é nulo controlável no tempo T.*

Definição 4. Seja $y^0 \in L^2(\mathbb{R})$. Uma *solução* do problema de Cauchy

$$\begin{cases} y_t+y_x=0, (t,x)\in(0,+\infty)\times\mathbb{R}; \\ y(0,x)=y^0(x), x\in\mathbb{R} \end{cases} \quad (2)$$

é uma função $y \in C^0([0,+\infty);L^2(\mathbb{R}))$ tal que, para todo $\tau \in [0,\infty)$, $R>0$ e $\phi \in C^1([0,\tau]\times\mathbb{R})$ tal que

$$\phi(t,x)=0, \forall t\in[0,\tau], \forall x \in \mathbb{R} \text{tal que} |x| \geq R,$$

vale que

$$-\int_0^\tau \int_{-R}^R (\phi_t+\phi_x) y\,dx\,dt + \int_{-R}^R y(\tau,x)\phi(\tau,x)dx - \int_{-R}^R y^0(x)\phi(0,x)dx = 0$$

Proposição 3. *Dado $y^0 \in L^2(\mathbb{R})$, o problema de Cauchy [2] tem uma solução única. Tal solução y satisfaz $||y(\tau,\cdot)||_2 = ||y^0||_2, \forall \tau \in [0,+\infty)$.*

Seja $T > 0$. Vamos definir um mapa linear $\mathscr{F}_T : L^2(0,T) \to L^2(0,L)$ da seguinte maneira: dado $u \in L^2(0,T)$, seja $y \in C^0([0,T]; L^2(0,L))$ a solução do problema de Cauchy

$$\begin{cases} y_t + y_x = 0, t \in (0,T), x \in (0,L), \\ y(t,0) = u(t), t \in (0,T), \\ y(0,x) = y^0(x), x \in (0,L), \end{cases}$$

com $y^0 := 0$. Então

$$\mathscr{F}_T(u) := y(T,\cdot).$$

Lema 4. *O sistema de controle [1] é controlável em T se, e somente se $\mathscr{F}_T$ é sobrejetivo.*

Proposição 4. *Sejam H_1, H_2 espaços de Hilbert. Seja $\mathscr{F} : H_1 \to H_2$ uma aplicação linear contínua. Então $\mathscr{F}$ é sobrejetiva se, e somente se existe $c > 0$ tal que*

$$||\mathscr{F}^*(x)|| \geq c||x||, \forall x \in H_2 \text{ (3)}$$

Além disso, se [3] vale para algum $c > 0$, existe uma aplicação linear contínua $\mathscr{G} : H_2 \to H_1$ tal que $\mathscr{F} \circ \mathscr{G}(x) = x, \forall x \in H_2$ $||\mathscr{G}|| \leq \dfrac{1}{c}$

Denominamos [3] por *Desigualdade de Observabilidade*. Para aplicar esta proposição, o próxima Lema nos dá $\mathscr{F}_T^*$ explicitamente.

Lema 5. *Seja $z^T \in H^1(0,L)$ tal que $z^T(L) = 0$. Seja $z \in C^1([0,T]; L^2(0,L) \cap C^0([0,T]; H^1(0,L)$ a (única) solução de*

$$\begin{cases} z_t + z_x = 0, t \in [0,T], x \in (0,L), \\ z(t,L) = 0, t \in [0,T], \\ z(T,x) = z^T(x), x \in (0,L) \end{cases}$$

Então $\mathscr{F}_T^*(z^T) = z(\cdot,0)$

5. CRONOGRAMA DAS ATIVIDADES

Fase 1: Agosto de 2020 a Outubro de 2020: Introdução e conceitos preliminares em dimensão finita e infinita: Estimativas de energia e espaços; Controle interno e de fronteira; estabilização.

Situação: Realizada

Fase 2: Novembro de 2020 a Dezembro de 2020 : Controle exato da equação de Korteweg-de Vries: Método direto; Método por dualidade e demonstração da desigualdade de observabilidade.

Situação: Realizada.

Fase 3: Janeiro de 2021 a Fevereiro de 2021: Controle exato da equação da onda: Caracterização por dualidade do controle exato e Regularidade escondida; Método dos multiplicadores e demonstração da desigualdade de observabilidade; Método de Fourier e Desigualdades de Ingham.

Situação: Interrompida devido ao cancelamento do projeto.

6. DIFICULDADES ENCONTRADAS

A pandemia que acometeu o ano de 2020 sem dúvidas atrapalhou incontáveis planos e atividades ao redor do mundo. Nesse sentido, o projeto foi dificultado pelo fato de que as reuniões deviam ser totalmente virtuais. Problemas como conexões instáveis e equipamentos defeituosos foram recorrentes no início, mas suavizados com o tempo e experiência obtidos.

7. ATIVIDADES PARALELAS DESENVOLVIDAS PELO ALUNO

O aluno acompanhou aulas de Semigrupos Lineares ministradas pelo seu orientador na Pós-Graduação que foram fundamentais para o entendimento pleno do assunto e possibilitaram a resolução de problemas por outras direções.