UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

HUGO DELEON PEREIRA DE MEDEIROS

ESTABILIZAÇÃO PARA UM SISTEMA ACOPLADO TIPO KdV-KdV

Recife

2018

HUGO DELEON PEREIRA DE MEDEIROS

ESTABILIZAÇÃO PARA UM SISTEMA ACOPLADO TIPO KdV-KdV

Este trabalho foi apresentado à Pós-Graduação em Matemática do Centro de Ciências Exatas e da Natureza da Universidade Federal de Pernambuco como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Análise

Orientador: Roberto A. Capistrano Filho

Recife

2018

Catalogação na fonte
Bibliotecária Monick Raquel Silvestre da S. Portes, CRB4-1217

M488e Medeiros, Hugo Deleon Pereira de
Estabilização para um sistema acoplado tipo KdV-KdV / Hugo Deleon Pereira de Medeiros. – 2018.
86 f.

Orientador: Roberto A. Capistrano Filho.
Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Pernambuco. CCEN., Matemática, Recife, 2018.
Inclui referências.

1. Matemática. 2. Estabilidade exponencial. I. Capistrano Filho, Roberto A. (orientador). II. Título.

510 CDD (23. ed.) UFPE- MEI 2019-011

HUGO DELEON PEREIRA DE MEDEIROS

ESTABILIZAÇÃO PARA UM SISTEMA ACOPLADO TIPO KdV-KdV

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestrado em Matemática.

Aprovado em 20/07/2018

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Roberto de A. Capistrano Filho (Orientador)
Universidade Federal de Pernambuco

Prof. Dr. Felipe Wallison Chaves Silva (Examinador Interno)
Universidade Federal de Pernambuco

Prof. Dr. Márcio Cavalcante de Melo (Examinador Externo)
Universidade Federal de Alagoas

AGRADECIMENTOS

A Deus por ter me concedido saúde, força e serenidade para superar todas as adversidades.

À minha família, que nos momentos mais angustiantes desses últimos dois anos, permeado de abdicações, frustrações e perdas, me deram carinho, apoio e incentivo à não desistir dos meus sonhos e objetivos. Em especial, a minha esposa, por acreditar em mim, estando sempre ao meu lado, sendo uma verdadeira fortaleza na minha vida.

Ao meu orientador, pelo exemplo de profissionalismo, pela maneira exigente de ser, extraindo sempre o máximo de mim e, principalmente, pela confiança e compreensão diante de todos os obstáculos que emergiram ao longo dessa trajetória.

Aos docentes da UFPE que estiveram presentes na minha formação, proporcionando ensinamentos, críticas, conselhos e incentivos.

Aos discentes da UFPE que estiveram sempre disponíveis a me ajudar, debatendo e compartilhando os conhecimentos acadêmicos.

À todos que, direta ou indiretamente, fizeram parte de minha formação, e desta feita contribuíram para a elaboração deste trabalho.

RESUMO

O propósito deste trabalho é estudar a estabilização interna de um sistema de duas equações de Korteweg-de Vries (KdV) generalizada sobre o efeito de um termo de amortecimento localizado. Para isso, um breve histórico do surgimento e dedução da equação KdV é apresentada na introdução. A boa colocação para soluções do sistema são investigadas em três situações, no caso linear usamos a teoria de semi-grupo, no caso não-linear quando o expoente do termo não linear varia no intervalo $[1; 2)$, localmente é utilizado argumentos de ponto fixo, e globalmente por meio de estimativas a priori, por último o caso não-linear quando o expoente do termo não linear varia no intervalo $[2; 4)$, obtemos apenas a existência global para as soluções fracas utilizando argumentos de densidade. No que diz respeito a obtenção do decaimento exponencial, usamos técnicas multiplicativas combinadas com argumento de compacidade-unicidade e reduzimos o problema a provar uma propriedade de continuação única para as soluções fracas. Tal propriedade é obtida via estimativas de Carleman para o operador da KdV.

Palavras-Chave: Sistema KdV–KdV. Estabilidade exponencial. Propriedade de continuação única. Estimativa de Carleman.

ABSTRACT

The purpose of this work is to study the internal stabilization of a system of two Kortweg-de Vries (KdV) equations, generalized under the effect of a localized damping term. For this, a brief history of the emergence and deduction of the KdV equation is presented in the introduction. The well-posedness for solutions of the system are investigated in three situations, in the linear case we use the theory of semi-group, in the nonlinear case, when the exponent of the nonlinear term varies in the interval $[1; 2)$, locally is used fixed point arguments and globally by a priori estimates, finally the nonlinear case, when the nonlinear term exponent varies in the interval $[2; 4)$, we obtain only the global existence for the weak solutions using density arguments. To obtain the exponential decay, we use multiplicative techniques combined with compactness-uniqueness argument and reduce the problem to prove a unique continuation property for the weak solutions. This property is obtained via Carleman estimate for the KdV operator.

Key–words: System KdV–KdV. Exponential stability. Unique continuation property. Carleman estimate.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Esta dissertação tem por finalidade investigar a estabilização de sistemas dispersivos regidos por equações diferenciais parciais. A questão é estudar o comportamento assintótico das soluções, por exemplo, através de uma análise inicial da energia total associado ao modelo. O modelo aqui estudado é um sistema de equações do tipo Korteweg-de Vries (KdV) posto em domínio limitado. Os resultados apresentados neste trabalho foram obtidos pela primeira vez por [23].

Apresentaremos a seguir alguns fatos históricos importantes, relativos a essa equação, e depois um estado da arte dos trabalhos já realizados, ao longo dos anos, no sistema que pretendemos estudar.

1.1 Um pouco sobre a descoberta dos sólitons

A primeira observação documentada sobre sólitons foi feita em 1834 pelo cientista e engenheira naval John Scott Russell, quando observava o movimento de uma balsa no Canal de Eddinburgh, em Glasgow. Ele observou uma onda passando através de um canal sem perder sua forma ou velocidade, a esse fenômeno físico ele denominou de ondas solitárias ou ondas de translação. Russell, segundo suas próprias palavras, falou:

"Eu estava observando o movimento de um barco que estava sendo rapidamente puxado por um par de cavalos, quando de repente o barco parou, menos a massa de água no canal que ainda estava em movimento. A mesma se acumulou ao redor da proa da embarcação em um estado de violenta agitação. Então, de repente, deixando-a para trás seguiu em frente com grande velocidade, assumindo a forma de uma grande e solitária elevação, um arredondado, leve e bem definido amontoado de água, que continuou seu curso ao longo

do canal, aparentemente sem mudar sua forma ou diminuir sua rapidez. Eu a persegui à cavalo, e a ultrapassei, onde ainda movia-se a uma taxa de oito ou nove milhas por hora preservando seu aspecto original, algo em torno de 30 pés de comprimento e entre 1 pé a 1 pé e meio de altura, sua altura foi gradualmente diminuindo e depois de persegui-la por uma ou duas milhas, a perdi nos desdobramentos do canal. Assim, em agosto de 1834, foi minha primeira chance de entrevistar este fenômeno lindo e singular, o qual eu chamei de Ondas de Translação (...)".

Russell realizou várias pesquisas práticas e teóricas sobre tal fenômeno. Seus experimentos, conhecidos como "O sistema de linha de onda de construção de casco", consistiam em encher uma área com fluido atrás de um obstáculo, em seguida removia o obstáculo de modo que uma longa onda amontoada se propagasse pelo canal. Todo esse conhecimento por ele produzido, inovaram a engenharia naval do século 19, sendo premiado com medalha de ouro pela Sociedade Real de Edinburgh em 1837, pelo trabalho desenvolvido. Contudo, seus resultados experimentais, foram de encontro a conjecturas físicas da época, como a Teoria da Onda de Água de G. B. Airy, a qual afirmava que a onda viajante não podia existir uma vez que, eventualmente, a mesma mudaria de rapidez e forma. Outra Teoria que foi contestada na época foi a de G. G. Stokes, que afirmava serem possíveis, ondas com amplitudes finitas e formas fixas, porém apenas em águas profundas e formas periódicas. Apesar, do próprio Stokes afirmar que:

"É da opinião do senhor Russell que a onda solitária é um fenômeno sui generis, imediatamente derivando seu caráter das circunstâncias de geração da onda. Seus experimentos parecem tornar essa conclusão provável. Se correto, o caráter analítico das ondas solitárias ainda restam a ser descobertos".

Diante disso, Russell a fim de convencer a comunidade física, desafiou a comunidade matemática a provar teoricamente à existência de tal fenômeno, como disse o mesmo:

"Tendo constatado que ninguém havia sido bem-sucedido em prever o fenômeno em que eu me aventurei em chamar de onda de translação, (...). Não é de se supor que após sua existência ter sido descoberta e seus fenômenos determinados, esforços não seriam feitos (...) para mostrar como deveria ter sido previsto através das conhecidas equações gerais de movimento fluido. Em outras palavras, restava ao matemático prever a descoberta depois de

ter acontecido, ou seja, dar uma "priori demonstração" "a posteriori".

Russell faleceu em 1882 sem ter conseguido uma equação que pudesse descrever a evolução da referida onda solitária. Apenas em 1895, dois matemáticos holandeses, Diederik Korteweg e Gustav de Vries, conseguiram deduzir a equação para propagação de ondas em águas rasas, hoje conhecida como equação de Korteweg-de Vries (KdV). A palavra "sóliton", somente surgiu em 1965 a partir dos trabalhos de Zabuski e Kruskal, onde observaram propriedades notáveis para as ondas tipo KdV (para maiores detalhes físicos sobre sóliton ver [6]).

A forma original da equação, presente no artigo de Korteweg e de Vries [14] é

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{g}{l}}\frac{\partial}{\partial_x}\left(\frac{1}{2}\eta^2 + \frac{3}{2}\alpha\eta + \frac{1}{3}\beta\frac{\partial^2 \eta}{\partial_x^2}\right)$$

onde,

η: é a elevação da superfície acima do nível de equilíbrio;

l, α: são constantes relacionadas ao movimento uniforme do líquido;

g: constante gravitacional;

β: expressão dada por $\beta = \frac{l^3}{3} - \frac{Tl}{\rho g}$, que é uma constante relacionada às forças capilares do tensor T e da densidade ρ.

Note que, eliminando as constantes físicas por meio das mudanças de variáveis

$$u \to -\frac{1}{2}\eta - \frac{1}{3}\alpha, \; x \to -\frac{x}{\beta} \quad \text{e} \quad t \to \frac{1}{2}\sqrt{\frac{g}{l\beta}}t,$$

obtemos

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0.$$

Essa equação, acima obtida, é dita equação KdV padrão, onde a variável redimensionada "u", está relacionada à amplitude e comprimento de onda.

Resumindo a equação KdV é um modelo matemático que descreve a propagação de ondas ao longo de um canal de seção transversal retangular de águas rasas com pequena amplitude, ou seja, pouca profundidade.

1.2 Problemas e resultados importantes

O objetivo deste trabalho é estudar a estabilização global de um sistema acoplado de duas equações tipo KdV generalizadas sobre um domínio limitado $(0, L)$ da forma:

$$\begin{cases} u_t + u_{xxx} + a_3 v_{xxx} + a(u)u_x + a_1 v v_x + a_2 (uv)_x + b(x)u = 0, \\ b_1 v_t + r v_x + v_{xxx} + b_2 a_3 u_{xxx} + a(v) v_x + b_2 a_2 u u_x + b_2 a_1 (uv)_x + b(x) v = 0, \end{cases} \tag{1}$$

onde $(x, t) \in (0, L) \times (0, T)$, considerando as seguintes condições de contorno

$$u(0, t) = v(0, t) = u(L, t) = v(L, t) = u_x(L, t) = v_x(L, t) = 0, \tag{2}$$

onde $t \in (0, T)$ e condições iniciais

$$u(x, 0) = u^0(x) \text{ e } v(x, 0) = v^0(x), \tag{3}$$

onde $x \in (0, L)$.

Aqui, $r, a_1, a_2, a_3, b_1, b_2$ são constantes reais tais que $b_1, b_2 > 0$ e que $0 < a_3^2 b_2 < 1$. Em todo este trabalho vamos assumir que $a = a(s)$ e $b = b(x)$ são funções com valores reais satisfazendo as condições:

$$\begin{cases} a(0) = 0, |a^{(j)}(s)| \leqslant C(1 + |s|^{p-j}), \\ \text{onde } C > 0 \text{ é constante e } j = 0, 1 \text{ se } 1 \leqslant p < 2, \text{ e } j = 0, 1, 2 \text{ se } p \geqslant 2. \end{cases} \tag{4}$$

e

$$\begin{cases} b \in L^2(0, L), \text{ é uma função não-negativa, tal que } b(x) \geqslant b_0 > 0 \text{ quase sempre} \\ \text{em } \omega, \text{ onde } \omega \subset (0, L) \text{ é um aberto não-vazio.} \end{cases} \tag{5}$$

Nota-se assim que o termo de amortecimento b atua efetivamente em ω.

Vamos considerar a energia associada ao sistema (1), que neste caso é dada por

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_0^L \left(b_2 u^2 + b_1 v^2 \right) dx. \tag{6}$$

Verifica-se formalmente que, a derivada da energia associada ao sistema satisfaz,

$$\begin{aligned} E'(t) \quad &= \quad -\Bigg\{ \frac{1}{2} \left(\sqrt{b_2} u_x(0, t) + \sqrt{a_3^2 b_2} v_x(0, t) \right)^2 + \frac{1}{2} (1 - a_3^2 b_2) v_x^2(0, t) \\ &\quad + \int_0^L b(x)(b_2 u^2 + v^2) dx \Bigg\} \leqslant 0, \end{aligned}$$

para todo $t > 0$, mostrando assim que o termo $b(x)(u+v)$ desempenha o papel de um mecanismo de controle. Devido ao comportamento da derivada da energia surgem as seguintes perguntas naturais:

(i) $E(t) \to 0$, quando $t \to \infty$?

(ii) Se for o caso, podemos determinar uma taxa de decaimento?

Note que, se o termo de amortecimento $b(x)$ for identicamente nulo, ainda assim teremos que a energia do sistema será dissipada através dos termos de fronteira, quando $x = 0$. No entanto, a dissipação em decorrência das condições de contorno $u_x(0,t)$ e $v_x(0,t)$ não são fortes o suficiente para garantir o decaimento das soluções do sistema (1)–(3) para todos os valores de L. De fato, em [18], [21] e [22] provou-se que o decaimento das soluções do sistema linear não ocorre para alguns valores no intervalo $(0, L)$. Rosier em [29], descobriu que se o comprimento $l \in (0, L)$ encontra-se em um conjunto enumerável de comprimentos críticos da forma

$$\varepsilon = \left\{ \frac{2\pi}{3}\sqrt{k^2+kl+l^2},\ k \text{ e } l \text{ números naturais positivos} \right\},$$

a equação linear KdV possui soluções não estáveis. Assim, sugere-se que adicionando um termo extra de amortecimento como $b(x)u$ e $b(x)v$ no sistema (1), por exemplo, o decaimento das soluções pode ser obtido para qualquer $L > 0$.

Quando $b(x) \geqslant b_0 > 0$ em $(0, L)$ fica muito simples de provar que a energia $E(t)$ decai exponencialmente à medida que t tende ao infinito. O problema de estabilização é muito mais sutil, quando o amortecimento é efetivo somente em um subconjunto de $(0, L)$. Neste trabalho, o interesse é estudar exatamente esse problema.

Sendo assim, o objetivo é provar que, para qualquer $R > 0$ existem constantes $C(R)$ e $\alpha(R)$ satisfazendo

$$E(t) \leqslant C(R)E(0)e^{-\alpha(R)t},\ \forall\ t > 0,$$

desde que $E(0) \leqslant R$. Isso é equivalente a encontrar $T > 0$ e $C > 0$ tais que

$$\begin{aligned} E(0) \quad \leqslant \quad & C\int_0^T \left\{ \frac{1}{2}\left(\sqrt{b_2}u_x(0,t) + \sqrt{a_3^2 b_2}v_x(0,t)\right)^2 + \frac{1}{2}(1-a_3^2b_2)v_x^2(0,t) \right. \\ & \left. + \int_0^L b(x)(b_2u^2+v^2)dx \right\} dt, \end{aligned} \tag{7}$$

se verifica para todas as soluções do sistema. Com efeito, da desigualdade acima obtemos $0 < \gamma < 1$, tal que

$$E(kT) \leqslant \gamma^k E(0), \ \forall \ k > 0.$$

Como $E(t) \leqslant E(kT)$ para $kT < t < (k+1)T$ segue que

$$E(t) \leqslant \frac{1}{\gamma} E(0) e^{\frac{\ln \gamma}{T} \cdot t}.$$

No que diz respeito ao sistema (1), quando $a(s) = s$ e $b \equiv 0$ o sistema (1) foi obtido por Gear e Grimshaw, em [12], como um modelo para descrever interações fortes de duas ondas longas num fluido estratificado. Para uma equação KdV, foi analizado, em [20], a estabilização quando a função $b = b(x)$ atua simultaneamente em uma vizinhança de ambos os extremos de $(0, L)$. Posteriormente, em [2], a mesma análise foi desenvolvida para o caso do sistema acoplado, aqui considerado, tomando $a(s) = s$ e também $b_1 = b_2 = 1$.

Para obter (7) os autores, em [20], seguem de perto as técnicas multiplicativas desenvolvidas em [29], para análise das propriedades de controlabilidade da equação KdV simples. No entanto, quando se utiliza multiplicadores, a não linearidade produz termos extras que em [2] foram tratadas com argumentos de compacidade–unicidade. Então o problema da obtenção de (7) é reduzido a mostrar que: toda solução que satisfaz $b(x)u = b(x)v = 0$ quase sempre e para todo tempo t, $u_x(0,t) = v_x(0,t) = 0$, tem que ser a solução nula. Esse problema pode ser visto como uma propriedade de continuação única uma vez que em $\{b(x) > 0\} \times (0,t)$, $b(x)u = b(x)v = 0$ implica que $u \equiv v \equiv 0$. Quando o termo de amortecimento é ativo em um subconjunto da forma $(0, \delta) \cup (\delta, L - \delta)$, $\delta > 0$, como em [2] e [20], a propriedade de continuação única foi resolvida em duas etapas: em primeiro lugar, estendendo a solução como sendo zero fora do intervalo $(0, L)$, obtém-se uma solução de suporte compacto (no espaço) do problema de Cauchy para a equação KdV em toda a reta. Em seguida, aplica-se propriedades clássicas de regularização obtidas em [33] mostrando que a solução é suave. Isso nos permite utilizar os resultados de propriedade de continuação única provadas em [10], para concluir que $u \equiv v \equiv 0$. O caso geral, isto é, em que a função amortecimento está ativa em qualquer subconjunto aberto do domínio, foi solucionada em [17] e, neste caso, procederam como em [24] provando que as soluções nulas em qualquer subconjunto do domínio são necessariamente suaves.

O problema que abordamos aqui, bem como a existência e unicidade global das soluções fracas, foi primeiramente estudado em [27] para a equação KdV simples com $1 \leqslant p < 4$. O decaimento exponencial é obtido fazendo uma análise similar ao descrito no paragrafo anterior, isto é, combinando as técnicas multiplicativas com argumento de compacidade–unicidade. O objetivo principal dessa parte do trabalho é estender a análise desenvolvida em [15] e [27] para o sistema acoplado (1)–(3). A principal dificuldade neste contexto surge da estrutura da não-linearidade e da falta de regularidade das soluções com as quais lidamos. A propriedade de continuação única, neste caso, não pode ser aplicada diretamente, como já foi dito. Daí, surge a necessidade de provar uma desigualdade de Carleman que nos permite mostrar diretamente a continuação única para soluções fracas do sistema. Esta desigualdade tem certa semelhança com as desenvolvidas em [30] (ver também [28]).

O trabalho estará dividido da seguinte forma: **No capítulo 2**, apresentaremos os resultados preliminares que serão utilizados durante todo o trabalho. **No capítulo 3**, provaremos a existência e unicidade para a KdV linear e não linear. Isso será feito utilizando a teoria de semigrupos, estimativas a priori e argumento de ponto fixo. Finalmente, **no capítulo 4**, obteremos a estabilização global do sistema (1)–(3), utilizando a propriedade de continuação única. Para tal provaremos uma estimativa de Carleman, que será o ponto chave para provar a continuação única para o sistema.

2 RESULTADOS PRELIMINARES

2.1 Espaços de Banach e Hilbert

As definições e resultados que enunciaremos abaixo, bem como suas demonstrações, podem ser encontradas em [5, 26] e, portanto, suas provas serão omitidas.

Definição 2.1.1. *Seja E um espaço vetorial. Diremos que E é um espaço normado, se existe uma função $N : E \to \mathbb{R}$ satisfazendo:*

(i) $N(x) \geqslant 0$, $\forall\ x \in E$ *e se* $N(x) = 0 \Rightarrow x = 0$;

(ii) $N(x, y) \leqslant N(x) + N(y),\ \forall\ x, y \in E$;

(iii) $N(\alpha x) = |\alpha| N(x),\ \forall \alpha \in \mathbb{R}$.

Definição 2.1.2. *Seja E um espaço normado. Dizemos que E é um espaço de Banach se for completo, ou seja, se toda sequência de Cauchy em E é convergente em E.*

Definição 2.1.3. *Seja E um espaço de Banach, com a norma induzida pelo produto interno. Dizemos que E é um espaço de Hilbert.*

Definição 2.1.4. *Seja E um espaço normado com norma $\|\cdot\|_E$. Denotamos por E' o dual topológico de E, que é o conjunto de todos os funcionais lineares e contínuos definidos em E. Define-se em E' a norma*

$$\|f\|_{E'} = \sup\{|\langle f, x\rangle|; x \in E \text{ e } \|x\|_E \leqslant 1\},$$

com a norma $\|\cdot\|_{E'}$, temos que E' é um espaço de Banach.

Definição 2.1.5. *Sejam $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E$, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E'$, $x \in E$ e $f \in E'$. Dizemos que,* *(i)* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge forte para* x*, denotado por* $x_n \to x$*, quando* $\|x_n - x\|_E \to 0$;

(ii) $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge fraco para* x*, denotado por* $x_n \rightharpoonup x$*, quando*

$$\langle f, x_n\rangle \ \to \ \langle f, x\rangle\,,\ \forall\ f \in E';$$

(iii) $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge fraco estrela para* f*, denotado por* $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$*, quando*

$$\langle f_n, x\rangle \ \to \ \langle f, x\rangle\,,\ \forall\ x \in E.$$

Proposição 2.1.6. *Sejam* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E$*,* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E'$*,* $x \in E$ *e* $f \in E'$*.*

(i) $x_n \to x$ *em* $E \Rightarrow x_n \rightharpoonup x$ *em* E*;*

(ii) $x_n \rightharpoonup x$ *em* $E \Rightarrow \|x_n\|_E < \infty$ *e* $\|x\|_E \leqslant \liminf\limits_{n\longrightarrow\infty} \|x_n\|_E$;

(iii) $x_n \rightharpoonup x$ *em* E *e* $f_n \to f$ *em* $E' \Rightarrow \langle f_n, x_n\rangle \to \langle f, x\rangle$;

(iv) $f_n \rightharpoonup f$ *em* $E' \Rightarrow f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ *em* E';

(v) $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ *em* E' *e* $x_n \to x$ *em* $E \Rightarrow \langle f_n, x_n\rangle \to \langle f, x\rangle$;

(vi) E *é espaço de Hilbert* $\Rightarrow x_n \to x \Leftrightarrow x_n \rightharpoonup x$ *em* E *e* $\|x_n\|_E \to \|x\|_E$*.*

Definição 2.1.7. *Dizemos que um espaço normado* E *é separável, se existe um subcojunto numerável e denso em* E*.*

Teorema 2.1.8. *Toda sequência limitada de funcionais lineares e contínuas definidos sobre um espaço normado separável, possui uma subsequência que converge fraco estrela.*

Definição 2.1.9. *Seja* E *um espaço de Banach, dizemos que* E *é um espaço reflexivo quando a aplicação* $T : E \to E''$ *é sobrejetiva, onde* $E'' = \{f : E' \to \mathbb{R}; f$ *é linear e contínua*$\}$ *com*

$$\|f\|_{E''} = \sup_{g\in E', \|g\|_{E''}\leqslant 1} \{f(g)\}.$$

Teorema 2.1.10. E *é um espaço reflexivo se, e somente se, toda sequência limitada possui uma subsequência convergindo fraco.*

Proposição 2.1.11. *O dual de um espaço de Hilbert é também um espaço de Hilbert.*

Corolário 2.1.12. *Os espaços de Hilbert são reflexivos.*

Definição 2.1.13. *Sejam $(X, \|\cdot\|_X)$ e $(Y, \|\cdot\|_Y)$ espaços vetoriais normados onde $X \subset Y$. Dizemos que X está continuamente inverso em Y, e denotamos por $X \hookrightarrow Y$, se existe uma constante $C > 0$ tal que*

$$\|x\|_Y \leqslant C\|x\|_X, \ \forall\ x \in X.$$

Dizemos que X está compactamente imerso em Y, e denotamos por $X \underset{c}{\hookrightarrow} Y$, se

(i) $X \hookrightarrow Y$;

(ii) *Toda sequência limitada de $Z \subset X$, tem uma subsequência que é de Cauchy em $\|\cdot\|_Y$.*

Definição 2.1.14. *Seja $1 \leqslant p \leqslant \infty$ e (Ω, Σ, μ) um espaço de medida. Denotamos por $L^p(\Omega)$ o conjunto de todas as funções $f : \Omega \to \mathbb{R}$ mensuráveis segundo Lesbergue, tais que*

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \begin{cases} \left(\displaystyle\int_\Omega |f(x)|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} < \infty & , \ se\ 1 \leqslant p < \infty, \\ \displaystyle\sup_{x\in\Omega} ess\ \{|f(x)|\} & , \ se\ p = \infty. \end{cases}$$

Definição 2.1.15. *Uma sequência $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^p$ converge para $f \in L^p$, quando:*

$$\forall\ \varepsilon > 0, \exists\ n_0 \in \mathbb{N}; n > n_0 \Rightarrow \|f_n - f\|_{L^p} < \varepsilon.$$

Além disso, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^p$ é dita de Cauchy quando:

$$\forall\ \varepsilon > 0, \exists\ n_0 \in \mathbb{N}; m, n > n_0 \Rightarrow \|f_m - f_n\|_{L^p} < \varepsilon.$$

Teorema 2.1.16. *Seja $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^p$ na qual converge para a função mensurável f. Se existe $g \in L^p$ tal que $|f_n(x)| \leqslant g(x), x \in \Omega$ e $n \in \mathbb{N}$, então $f \in L^p$ e $f_n \to f$ em L^p.*

Teorema 2.1.17. *Sejam $(\Omega_1, \Sigma_1, \mu_1)$ e $(\Omega_2, \Sigma_2, \mu_2)$ espaços de medida σ-finita, μ_3 a medida produto em $\Sigma_3 = \Sigma_1 \times \Sigma_2$. Se $F : \Omega_3 \to \mathbb{R}$, com $\Omega_3 \in \Sigma_3$, é integrável com respeito a π, então as funções definidas em quase todo ponto por*

$$f(x) = \int_{\Omega_2} F^x \mu_2 \ \text{e}\ g(y) = \int_{\Omega_1} F^y d\mu_1,$$

tem integrais finitas e segue que

$$\int_{\Omega_1} \left(\int_{\Omega_2} F\ d\mu_2\right) d\mu_1 = \int_{\Omega_3} F\ d\mu_3 = \int_{\Omega_2} \left(\int_{\Omega_1} F\ d\mu_1\right) d\mu_2.$$

Definição 2.1.18. *Uma sequência* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *é fracamente convergente para* $u \in L^p(\Omega)$ *se, e somente se,*

$$\int_\Omega u_n v \; dx \to \int_\Omega uv \; dx, \; \forall \; v \in L^q(\Omega),$$

onde $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Teorema 2.1.19. *Toda sequência limitada em* $L^p(\Omega)$ *com* $p > 1$*, possui uma subsequência que converge fraco em* $L^p(\Omega)$.

Teorema 2.1.20. *Se* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge forte para* u *em* L^p *e* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{N}$ *converge fraco para* v *em* L^q *com* $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$*. Então teremos que*

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega u_n v_n \; dx = \int_\Omega uv \; dx.$$

Teorema 2.1.21. *Seja* Ω *um aberto limitado. Suponha que* f *seja contínua e* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *satisfazendo:*

$$u_n \to u \text{ q.t.p. em } \Omega,$$
$$f(u_n) \text{ limitado em } L^p(\Omega) \text{ para } p > 1.$$

Então existe uma subsequência de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *tal que*

$$f(u_n) \to f(u) \text{ fraco em } L^p(\Omega).$$

Corolário 2.1.22. *Seja* Ω *um aberto limitado. Suponha que* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *é uma sequência limitada em* $L^P(\Omega)$ *que converge quase sempre para* u *em* Ω*. Então,*

$$u_n \to u \text{ forte em } L^r(\Omega),$$

para todo r *tal que* $1 < r < p$.

Teorema 2.1.23. L^p *é um espaço de Banach para* $1 \leqslant p \leqslant \infty$*. Em particular* L^2 *munido do produto interno*

$$(u, v) := \int_\Omega uv \; dx,$$

é um espaço de Hilbert.

Definição 2.1.24. *Seja* $f : \Omega \to \mathbb{R}$ *uma função contínua. O conjunto supp* $f = \overline{\{x \in \Omega; f(x) \neq 0\}}$ *é chamado o suporte de* f*. Se* Ω *for compacto, chamaremos de suporte compacto de* f.

Definição 2.1.25. *Seja Ω um conjunto aberto. Denote,*

(a) $C(\Omega)$ *o espaço das funções contínuas em* Ω*;*

(b) $C^k(\Omega)$ *o espaço das funções* k *vezes continuamente diferenciável em* Ω*;*

(c) $C_0(\Omega)$ *o espaço das funções contínuas em* Ω*, com suporte compacto, ou seja,* $\exists\ A \subset \Omega$ *compacto tal que* $f \equiv 0$ *em* $\Omega \backslash A$*;*

(d) $C_0^{k(\Omega)} = C^k(\Omega) \cap C_0(\Omega)$*;*

(e) $C^\infty(\Omega) = \bigcap\limits_{k \in \mathbb{N}} C^k(\Omega)$*;*

(f) $C_0^\infty(\Omega) = C^\infty(\Omega) \cap C_0(\Omega)$.

Teorema 2.1.26. *Para todo conjunto aberto* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *temos que o conjunto* $C_0^\infty(\Omega)$ *é denso em* $L^p(\Omega)$*, para* $1 \leqslant p < \infty$.

Observação. O Teorema 2.1.26 é muito útil para mostrar desigualdades para funções integráveis. De fato, pois basta mostrar que a desigualdade é válida para funções contínuas e diferenciáveis com suporte compacto e que, pela densidade, tais funções podem ser estendidas para funções integrais.

Definição 2.1.27. *Seja* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *um aberto e* $1 \leqslant p \leqslant \infty$*. Dizemos que* $f \in L^p_{loc}(\Omega)$*, quando*

$$\forall\ A \subset \Omega \text{ compacto, } f\chi_A \in L^p(\Omega).$$

Teorema 2.1.28. ***(Representação de Riez)*** *Seja* Ω *um aberto de* $\mathbb{R}^n$ *e* T *um operador linear e limitado definido sobre* $L^p(\Omega)$*. Então existe uma função* $\omega \in L^q(\Omega)$*, onde* $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$*, satisfazendo*

$$T(v) = \int_\Omega \omega(x)v(x)dx,\ \forall\ v \in L^p(\Omega).$$

2.2 Distribuições

As definições e resultados que enunciaremos abaixo, bem como suas demonstrações, podem ser encontradas em [8, 18] e, portanto, suas provas serão omitidas.

Definição 2.2.1. *Denotaremos o operador derivação por*

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial_{x_1}^{\alpha_1}\partial_{x_2}^{\alpha_2}\dots\partial_{x_n}^{\alpha_n}},$$

onde $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$*,* $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ *e* $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$*.*

Definição 2.2.2. *Chamamos de fórmula de Leibniz a expressão dada por*

$$D^\alpha(uv) = \sum_{\beta \leqslant \alpha} \frac{\alpha!}{\beta!(\alpha-\beta)!}(D^\beta u)(D^{\alpha-\beta} v),$$

onde u e v são funções reais com um número suficiente de derivadas, $\alpha! = \alpha_1! \dots \alpha_n!$ *e* $\beta \leqslant \alpha$ *se* $\beta_i \leqslant \alpha_i$ *para* $i = 1, \dots, n$*.*

Definição 2.2.3. *Considere a seguinte noção de convergência: Dado* $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C_0^\infty(\Omega)$ *e* $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$*, dizemos que* $\varphi_n \to \varphi$ *quando:*

(i) $\exists\ K \subset \Omega$ *compacto, tal que supp* $\varphi_n \subset K,\ \forall\ n \in \mathbb{N}$*;*

(ii) $\forall\ \alpha \in \mathbb{N}^n, D^\alpha\varphi_n(x) \to D^\alpha\varphi(x)$ *uniformemente em* Ω*.*

O espaço $C_0^\infty(\Omega)$*, munido da noção de convergência acima, é dito espaço das funções testes em* Ω*, e denotado por* $D(\Omega)$*.*

Definição 2.2.4. *Toda forma linear T em $D(\Omega)$ que é contínua no sentido da convergência em $D(\Omega)$, definida anteriormente, é dita uma distribuição sobre Ω. Denota-se por $D'(\Omega)$ o espaço vetorial de todas as distribuições.*

Definição 2.2.5. *Seja* $(T_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset D'(\Omega)$ *e* $T \in D'(\Omega)$*. Dizemos que* $T_n \to T$ *em* $D'(\Omega)$ *se*

$$\langle T_n, \varphi\rangle \to \langle T, \varphi\rangle,\ \forall\ \varphi \in D(\Omega).$$

Lema 2.2.6. *Seja* $u \in L^1_{loc}(\Omega)$*. Então T_u dado por*

$$\langle T_u, \varphi\rangle = \int_\Omega u(x)\varphi(x)dx, \varphi \in D(\Omega),$$

é uma distribuição sobre Ω. Por simplificação da notação, algumas vezes, diz-se "a distribuição u"ao invés da distribuição T_u. Além disso,

$$u_n \to u \text{ em } L^1_{loc}(\Omega) \Rightarrow u_n \to u \text{ em } D'(\Omega),$$

assim, podemos escrever,

$$L^1_{loc}(\Omega) \hookrightarrow D'(\Omega).$$

Definição 2.2.7. *A derivada de ordem α de T é dada por*

$$\langle D^\alpha T, \varphi\rangle = (-1)^{|\alpha|}\langle T, D^\alpha \varphi\rangle\,,\ \forall\ \varphi \in D(\Omega).$$

Além disso, $D^\alpha T \in D'(\Omega)$, assim uma distribuição $T \in D'(\Omega)$ possui derivadas de todas as ordens no sentido das distribuições.

2.3 Espaços de Sobolev

As definições e resultados que enunciaremos abaixo, bem como suas demonstrações, podem ser encontradas em [5, 8] e, portanto, suas provas serão omitidas.

Definição 2.3.1. *Seja Ω um aberto do $\mathbb{R}^n, 1 \leqslant p < +\infty$ e $m \in \mathbb{N}$. Representa-se por $W^{m,p}(\Omega)$ o espaço vetorial de todas as funções $u \in L^p(\Omega)$, tais que para todo $|\alpha| \leqslant m, D^\alpha u \in L^p(\Omega)$, sendo que $D^\alpha u$ é a derivada no sentido das distribuições.*

Observação. Sabemos que se $u \in L^p(\Omega)$ então u possui derivadas de todas as ordens no sentido das distribuições, porém não necessariamente $D^\alpha u$ será uma distribuição definida por alguma função em $L^p(\Omega)$, logo faz-se sentido a definição 2.3.1.

Definição 2.3.2. *Dado $u \in W^{m,p}(\Omega)$ defina*

$$\|u\|_{W^{m,p}} = \left(\sum_{|\alpha|\leqslant m}\int_\Omega |D^\alpha u|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Assim, $\|\cdot\|_{W^{m,p}}$ é uma norma. O espaço normado $(W^{m,p}(\Omega), \|\cdot\|_{W^{m,p}})$ é denominado espaço de Sobolev. Em particular, temos que $W^{m,2}(\Omega) := H^m(\Omega)$.

Proposição 2.3.3. *O espaço de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ é um espaço de Banach.*

Corolário 2.3.4. *Os espaços $H^m(\Omega)$ são espaços de Hilbert.*

Definição 2.3.5. $\overline{C_0^\infty(\Omega)} := W_0^{m,p}(\Omega)$.

Observação. $C_0^\infty(\Omega)$ não é necessariamente denso em $W^{m,p}(\Omega)$, apesar de $C_0^\infty(\Omega)$ ser denso em $L^p(\Omega)$.

Proposição 2.3.6. *Se* $W_0^{m,p}(\Omega) = W^{m,p}(\Omega)$*, então* $\mathbb{R}^n \backslash \Omega$ *possui medida de Lebesgue nula.*

Teorema 2.3.7. $D(\mathbb{R}^n)$ *é denso no* $W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$*.*

Definição 2.3.8. *Sejam* $1 \leqslant p < +\infty$ *e* $q > 1$ *tais que* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$*. Representa-se por* $W^{-m,q}(\Omega)$ *o dual topológico de* $W_0^{m,p}(\Omega)$*, bem como,* $H^{-m}(\Omega)$ *o dual topológico de* $H_0^m(\Omega)$*.*

Teorema 2.3.9. *(Teorema de Imersão) Sejam* $1 \leqslant p < \infty$*,* $m \geqslant 1$ *e* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *um subconjunto aberto, limitado com fronteira regular, para*

$$W^{m,p}(\Omega) := \{u \in L^p(\Omega); D^\alpha u \in L^p(\Omega),\ \forall\ |\alpha| \leqslant m\},$$

temos as seguintes imersões contínuas:

(i) *Se* $\dfrac{1}{p} - \dfrac{m}{n} > 0$*, então* $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$*, onde* $\dfrac{1}{q} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{m}{n}$;

(ii) *Se* $\dfrac{1}{p} - \dfrac{m}{n} = 0$*, então* $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$*, onde* $q \in [\, p, +\infty\,)$;

(iii) *Se* $\dfrac{1}{p} - \dfrac{m}{n} < 0$*, então* $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$*.*

Teorema 2.3.10. *(Teorema de Imersão) Seja* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *um aberto limitado de classe* C^m *e* $1 \leqslant p \leqslant \infty$*. Então as seguintes imersões são compactas:*

(i) *Se* $n > mp$*, então* $W^{m,p}(\Omega) \underset{c}{\hookrightarrow} L^q(\Omega), 1 \leqslant q \leqslant \dfrac{np}{n-mp}$;

(ii) *Se* $n = mp$*, então* $W^{m,p}(\Omega) \underset{c}{\hookrightarrow} L^q(\Omega), 1 \leqslant q < +\infty$;

(iii) *Se* $n < mp$*, então* $W^{m,p}(\Omega) \underset{c}{\hookrightarrow} C^k(\overline{\Omega}), k < m - \dfrac{n}{p} \leqslant k+1$ *onde* k *é um inteiro não-negativo.*

Definição 2.3.11. *A transformada de Fourier de* f*, denotada por* $\hat{f}$*, é uma função definida sobre o* $\mathbb{R}^n$ *pela fórmula:*

$$\hat{f}(\lambda) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i \langle x, \lambda \rangle} \cdot f(x) dx,$$

onde $i = \sqrt{-1}$ *e* $\langle x, \lambda \rangle = \sum_{j=i}^{n} x_j \lambda_j$ *é o produto interno usual em* $\mathbb{R}^n$*.*

Definição 2.3.12. *O espaço de Schwartz ou espaço das funções rapidamente decrescentes, que denotamos por* $\mathcal{S}$*, é o subespaço vetorial formado pelas funções* $\varphi \in C^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ *tais que:*

$$\lim_{\|x\| \longrightarrow \infty} \|x\|^k \cdot D^{\alpha}\varphi(x) = 0,$$

quaisquer que sejam $k \in \mathbb{N}$ *e* $\alpha \in \mathbb{N}^n$*.*

Definição 2.3.13. *Uma distribuição temperada (ou lentamente crescente) é um funcional linear contínuo* T *definido sobre* $\mathcal{S}$*. O espaço vetorial dos funcionais lineares e contínuos sobre* $\mathcal{S}$ *é denotado por* $\mathcal{S}'$*.*

Definição 2.3.14. *O conjunto*

$$H^m(\mathbb{R}^n) = \{u \in L^2(\mathbb{R}^n); D^{\alpha}u \in L^2(\mathbb{R}^n),\ \forall\ \alpha \in \mathbb{N}^n, |\alpha| \leqslant m\},$$

é um espaço de Hilbert munido com o seguinte produto interno,

$$(u,v)_{H^m(\mathbb{R}^n)} = \sum_{|\alpha| \leqslant m} \int_{\mathbb{R}^n} D^{\alpha}u \cdot \overline{D^{\alpha}v}\ dx = \sum_{|\alpha| \leqslant m} (D^{\alpha}u, D^{\alpha}v)_{L^2(\mathbb{R}^n)}.$$

Considere o seguinte espaço,

$$\{u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n); (1 + \|x\|^2)^{\frac{m}{2}} \cdot \hat{u} \in L^2(\mathbb{R}^n)\},$$

onde $\hat{u}$ designa a transformada de Fourier da u, com produto interno,

$$((u,v)) = \int_{\mathbb{R}^n} (1 + \|x\|^2)^m \cdot \hat{u}(x) \cdot \overline{\hat{v}(x)}\ dx = \left((1 + \|x\|^2)^{\frac{m}{2}}\hat{u}, (1 + \|x\|^2)^{\frac{m}{2}}\hat{v}\right)_{L^2(\mathbb{R}^n)}.$$

Assim, a seguinte proposição se verifica.

Proposição 2.3.15. *Para todo* $m \in \mathbb{N}$*, temos que*

$$H^m(\mathbb{R}^n) = \{u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n); (1 + \|x\|^2)^{\frac{m}{2}}\hat{u} \in L^2(\mathbb{R}^n)\}.$$

Definição 2.3.16. *Para* $s \in \mathbb{R}$ *e* $s \geqslant 0$ *definimos*

$$H^s(\mathbb{R}^n) = \{u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n); (1 + \|x\|^2)^{\frac{s}{2}}\hat{u} \in L^2(\mathbb{R}^n)\},$$

munido do produto interno

$$(u,v)_{H^s(\mathbb{R}^n)} = \int_{\mathbb{R}^n} (1 + \|x\|^2)^s \hat{u}(x) \cdot \overline{\hat{v}(x)}\ dx.$$

Proposição 2.3.17. *Para todo* $s \geqslant 0$,

(i) $H^s(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$;

(ii) $H^s(\mathbb{R}^n)$ *é um espaço de Hilbert;*

(iii) $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ *tem uma imersão contínua e densa em* $H^s(\mathbb{R}^n)$;

(iv) $D(\mathbb{R}^n)$ *tem uma imersão contínua e densa em* $H^s(\mathbb{R}^n)$.

Definição 2.3.18. *Para todo* $s \in \mathbb{R}, s \geqslant 0$, *denotaremos o dual topológico de* $H^s(\mathbb{R}^n)$ *por* $H^{-s}(\mathbb{R}^n)$.

Proposição 2.3.19. *As seguintes afirmações são verdadeiras:*

(i) $H^{-s}(\mathbb{R}^n) = \{f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n); (1+\|x\|^2)^{\frac{-s}{2}} \cdot \hat{f} \in L^2(\mathbb{R}^n)\}$;

(ii) $\|f\|_{H^{-s}(\mathbb{R}^n)} = \left(\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} (1+\|x\|^2)^{-s} \cdot |\hat{f}(x)|^2 \, dx\right)^{\frac{1}{2}}, \ \forall \ f \in H^{-s}(\mathbb{R}^n)$.

Definição 2.3.20. *Seja* Ω *um aberto limitado do* $\mathbb{R}^n$ *com fronteira bem regular, ou o semi-espaço* $\mathbb{R}^n_+$. *Consideremos a aplicação:*

$$r_\Omega : L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\Omega) \text{ por } u \mapsto r_\Omega u = u \,|_\Omega \,.$$

Segue que r_Ω *é uma aplicação linear e contínua e é dita a restrição de* u *a* Ω.

Definição 2.3.21. *Para todo* $\alpha \in \mathbb{N}^n$, *tem-se que*

$$D^\alpha(r_\Omega u) = r_\Omega(D^\alpha u) \ .$$

Assim, para todo $m \in \mathbb{N}$ *a aplicação*

$$r_\Omega : H^m(\mathbb{R}^n) \to H^m(\Omega) \text{ é contínua.}$$

Neste caso, definiremos,

$$H^m(\Omega) = \{r_\Omega u; u \in H^m(\mathbb{R}^n)\}.$$

Consequentemente, para $s \geqslant 0$, *podemos definir*

$$H^s(\Omega) = \{r_\Omega u; u \in H^s(\mathbb{R}^n)\}.$$

Analogamente, temos que $H^s(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$.

Proposição 2.3.22. *Para todo $s \geqslant 0$ e $0 \leqslant s_1 \leqslant s_2$ com $s, s_1, s_2 \in \mathbb{R}$, $H^s(\Omega)$ munido da norma,*

$$\|u\|_{H^s(\Omega)} := \inf\{\|\omega\|_{H^s(\mathbb{R}^n)}; r_\Omega \omega = u\},$$

satisfaz as seguintes afirmativas:

(i) $H^s(\Omega)$ *é um espaço de Hilbert;*

(ii) $D(\overline{\Omega})$ *é denso em* $H^s(\Omega)$*;*

(iii) $0 \leqslant s_1 \leqslant s_2 \Rightarrow H^{s_2}(\Omega) \hookrightarrow H^{s_1}(\Omega)$.

2.4 Interpolação de espaços de Sobolev

As definições e resultados que enunciaremos abaixo, bem como suas demonstrações, podem ser encontradas em [1, 16] e, portanto, suas provas serão omitidas.

Sejam X e Y dois espaços de Hilbert separáveis, com imersão contínua e densa, $X \hookrightarrow Y$. Sejam $(\ ,\ )_X$ e $(\ ,\ )_Y$ os produtos internos de X e Y, respectivamente.

Seja S um operador auto-adjunto, estritamente positivo. Indicaremos por $D(S)$, o conjunto de todas as funções u definidas em X, tal que a aplicação $v \to (u,v)_X$, $v \in X$ é contínua na topologia induzida por Y. Então, $(u,v)_X = (Su,v)_Y$ define S, como sendo um operador ilimitado em Y com domínio $D(S)$, denso em Y.

Usando a decomposição espectral de operadores auto-adjuntos, podemos definir S^θ, $\theta \in \mathbb{R}$. Em particular usaremos $A = S^{\frac{1}{2}}$.

O operador A é auto-adjunto, positivo definido em Y, com $D(A) = X$ e

$$(u,v)_X = (Au, Av)_Y,\ \forall\ u, v \in X.$$

Definição 2.4.1. *Com as hipóteses anteriores, definimos o espaço intermediário*

$$[X,Y]_\theta = D(A^{1-\theta}) \quad (\textit{domínio de} \ \ A^{1-\theta}), 0 \leqslant \theta \leqslant 1,$$

com norma

$$\|u\|_{[X,Y]_\theta} = (\|u\|_Y^2 + \|A^{1-\theta}u\|_Y^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Observação:

1. $X \hookrightarrow [X,Y]_\theta \hookrightarrow Y$.

2. $\|u\|_{[X,Y]_\theta} \leqslant \|u\|_X^{1-\theta}\|u\|_Y^\theta$.

3. Se $0 < \theta_0 < \theta_1 < 1$ então $[X,Y]_{\theta_0} \hookrightarrow [X,Y]_{\theta_1}$.

4. $[[X,Y]_{\theta_0}, [X,Y]_{\theta_1}]_\theta = [X,Y]_{(1-\theta)\theta_0+\theta\theta_1}$.

Teorema 2.4.2. *Sejam Ω um subconjunto bem regular de $\mathbb{R}^n$ e $s > \frac{1}{2}$. Então,*

$$H_0^s(\Omega) = \left\{u|\ u \in H^s(\Omega),\ \frac{\partial^j u}{\partial \eta^j} = 0,\ 0 \leqslant j < s - \frac{1}{2}\right\}.$$

Teorema 2.4.3. *Sejam Ω um subconjunto bem regular de $\mathbb{R}^n$, $s_1 > s_2 \geqslant 0$, s_1 e $s_2 \neq k + \frac{1}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$. Se $s = (1-\theta)s_1 + \theta s_2 \neq k + \frac{1}{2}$, então*

$$[H_0^{s_1}(\Omega), H_0^{s_2}(\Omega)]_\theta = H_0^s(\Omega)$$

e

$$[H_0^m(\Omega), H^0(\Omega)]_\theta = H_0^s(\Omega), \quad com \quad s = (1-\theta)m \neq k + \frac{1}{2},$$

com normas equivalentes.

Proposição 2.4.4. *Seja $u \in X$. Logo existe $\tilde{c} > 0$, tal que*

$$\|u\|_{[X,Y]_\theta} \leqslant \tilde{c}\|u\|_X^{1-\theta}\|u\|_Y^\theta.$$

Teorema 2.4.5. *Sejam Ω um subconjunto limitado de $\mathbb{R}^n$ com fronteira bem regular e s_1 e $s_2 \geqslant 0$, $s_2 \neq k + \frac{1}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$. Se $s = (1-\theta)s_1 - \theta s_2 \neq k + \frac{1}{2}$, então*

$$[H^{s_1}(\Omega), H^{-s_2}(\Omega)]_\theta = H^s(\Omega)$$

e

$$H^s(\Omega) = [H^m(\Omega), H^0(\Omega)]_\theta, \quad com \quad s = (1-\theta)m \neq k + \frac{1}{2},$$

com normas equivalentes.

Teorema 2.4.6. *Seja Ω um subconjunto limitado de $\mathbb{R}^n$ com fronteira bem regular. Então,*

$$[H^{s_1}(\Omega), H^{s_2}(\Omega)]_\theta = H^{(1-\theta)s_1-\theta s_2}(\Omega), \quad \forall s_1, s_2 > 0.$$

Definição 2.4.7. *Dizemos que os espaços topológicos normados X, Y são compatíveis se existe um espaço topológico separável U, tal que X e Y são subespaços de U.*

2.5 Distribuições vetoriais

As definições e resultados que enunciaremos abaixo, bem como suas demonstrações, podem ser encontradas em [26, 32] e, portanto, suas provas serão omitidas.

Definição 2.5.1. *Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ e X um espaço de Banach com norma $\|\cdot\|_X$. Dizemos que a função $F : (a, b) \to X$ é mensurável quando,*

(i) A imagem de (a, b) por F é separável quase sempre. Isto é, $\exists\ A$ de medida nula tal que $F((a, b)\backslash A)$ é separável;

(ii) F é fracamente mensurável. Isto é, $\forall\ \omega \in X'$, a função $s \mapsto \langle F(s), \omega\rangle$ é mensurável. Além disso, segue que, F é integrável quando:

$$\int_a^b \|F(s)\|_X ds < \infty.$$

Definição 2.5.2. *Consideremos os seguintes espaços:*

(i) $L^p(a,b;X) = \{u : (a,b) \to X$ *mensurável*; $\|u\|_X \in L^p(a,b)\}$ *onde* $1 \leqslant p < +\infty$, *munido da norma,*

$$\|u\|_{L^p(a,b;X)} = \left\{ \int_a^b \|u\|_X^p \, ds \right\}^{\frac{1}{p}};$$

(ii) $L^\infty(a,b;X) = \{u : (a,b) \to X$ *mensurável e limitada q.s. em* $(a,b)\}$ *munido da norma,*

$$\|u\|_{L^\infty(a,b;X)} = \sup_{a \leqslant s \leqslant b} ess \|u(s)\|_X = \inf_{s \in (a,b)} \{C \geqslant 0; \|u\|_X \leqslant C, q.s.\};$$

(iii) $C(a,b;X) = \{u : (a,b) \to X$ *contínua*$\}$ *munido da norma,*

$$\|u\|_{C(a,b;X)} = \max_{s \in (a,b)} \|u(s)\|_X;$$

(iv) $C^m(a,b;X) = \{u : (a,b) \to X$ *com derivadas contínuas até a ordem* $m\}$ *munido da norma,*

$$\|u\|_{C^m(a,b;X)} = \sum_{i=0}^{m} \max_{s \in (a,b)} \|u^i(s)\|_X;$$

(v) $C_\omega([a,b];X) = \{u : (a,b) \to X$ *fracamente contínua, ou seja,* $t \mapsto \langle \varphi, u(t) \rangle$ *é contínua para todo* $\varphi \in X'\}$.

Proposição 2.5.3. *Sejam* $m \in \mathbb{N}, 1 \leqslant p < +\infty, X$ *e* Y *espaços de Banach sobre* $\mathbb{R}$. *Então:*

(i) $C^m(a,b;X)$ *é um espaço de Banach;*

(ii) $L^p(a,b;X)$ *e* $L^\infty(a,b;X)$ *são espaços de Banach;*

(iii) $C(a,b;X)$ *é denso em* $L^p(a,b;X)$ *e a imersão* $C(a,b;X) \hookrightarrow L^p(a,b;X)$ *é contínua;*

(iv) Se X *é espaço de Hilbert,* $L^2(a,b;X)$ *também será;*

(v) $L^p(a,b;X)$ *é separável se* X *for separável;*

(vi) $X \hookrightarrow Y \Rightarrow L^r(a,b;X) \hookrightarrow L^q(a,b;Y), 1 \leqslant q \leqslant r \leqslant +\infty;$

(vii) X *é reflexivo e* $X \hookrightarrow Y$ *então* $C_\omega([a,b];X) = C_\omega([a,b];Y) \cap L^\infty(0,T;X)$.

Definição 2.5.4. *Denotaremos por $D(a,b,X)$ o espaço das funções infinitamente diferenciáveis com suporte compacto contido em (a,b) e a valores em X. Denotaremos também por $D'(a,b;X)$ o espaço das distribuições vetoriais em (a,b) e a valores em X. Além disso, sendo $T \in D'(a,b;X)$ a derivada de ordem n de T é definida por*

$$\left\langle \frac{d^nT}{ds^n}, \varphi \right\rangle = (-1)^n \left\langle T, \frac{d^n\varphi}{ds^n} \right\rangle, \ \forall \ \varphi \in D(a,b).$$

Consideremos o espaço

$$W^{m,p}(a,b;X) = \{u \in L^p(a,b;X); u^{(j)} \in L^p(a,b;X), j = 1, \ldots, m\},$$

onde $u^{(j)}$ é a j-ésima derivada no sentido das distribuições, munido da norma

$$\|u\|_{W^{m,p}(a,b;X)} = \left\{ \sum_{j=0}^{m} \|u^{(j)}\|^p_{L^p(a,b;X)} \right\}^{\frac{1}{p}}.$$

Para $p = 2$, considere o espaço $H^m(a,b;X)$ munido do produto interno

$$(u,v)_{H^m(a,b;X)} = \sum_{j=0}^{m} (u^{(j)}, v^{(j)})_{L^2(a,b;X)}.$$

Proposição 2.5.5. *São válidas as seguintes afirmações:*

(i) *$W^{m,p}(a,b;X)$ é um espaço de Banach;*

(ii) *Se X é um espaço de Hilbert então $H^m(a,b;X)$ também será;*

(iii) *$C_0^\infty(a,b;X)$ é denso em $L^p(a,b;X)$, para $p < \infty$.*

Teorema 2.5.6. *Sejam $T > 0, 1 < p_0 < \infty$, $1 < p_1 < \infty$, e B_0, B, B_1 espaços de Banach tal que a imersão $B_0 \hookrightarrow B$ é compacta e a imersão $B \hookrightarrow B_1$ é contínua. Defina o espaço*

$$V = \{v; v \in L^{p_0}(0,T;B_0) \ e \ v_t \in L^{p_1}(0,T;B_1)\},$$

munido da norma

$$\|v\|_V = \|v\|_{L^{p_0}(0,T;B_0)} + \|v_t\|_{L^{p_1}(0,T;B_1)},$$

então V é um espaço de Banach. Além disso,

(i) *$\forall \ \gamma > 0, \exists$ uma constante $C(\gamma) > 0$; $\|v\|_B \leqslant \gamma \cdot \|v\|_{B_0} + C(\gamma) \cdot \|v\|_{B_1}$;*

(ii) *A imersão $V \hookrightarrow L^{p_0}(0,T;B)$ é compacta.*

Teorema 2.5.7. *Sejam* $-1 \leqslant \alpha < \beta \leqslant 1$ *e* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *uma sequência de funções tal que*

$$u_n \to u \text{ fraco* em } L^\infty(0,T;H^\beta(\Omega));$$

$$u_n' \to u' \text{ fraco em } L^\infty(0,T;H^\alpha(\Omega)).$$

Então para todo $r \leqslant \beta$ *teremos que*

$$u_n \to \ u \text{ forte em } C(0,T;H^r(\Omega)).$$

2.6 Desigualdades importantes

As demonstrações das desigualdades abaixo, podem ser encontradas em [5, 7, 11, 13] e, portanto, suas provas serão omitidas.

Lema 2.6.1. ***(Desigualdade de Young)*** *Sejam* a, b *constantes positivas e* p, q *tais que* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$*, então*

$$ab \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Lema 2.6.2. ***(Desigualdade de Holder)*** *Sejam* $f \in L^p(\Omega), g \in L^q(\Omega), 1 \leqslant p \leqslant \infty$ *e* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$*. Então,* $fg \in L^1(\Omega)$ *e*

$$\|fg\|_{L^1(\Omega)} \leqslant \|f\|_{L^p(\Omega)}\|g\|_{L^q(\Omega)}.$$

Lema 2.6.3. ***(Desigualdade de Minkowski)*** *Sejam* $1 \leqslant p \leqslant \infty$ *e* $f, g \in L^p(\Omega)$*, então*

$$\|f+g\|_{L^p(\Omega)} \leqslant \|f\|_{L^p(\Omega)} + \|g\|_{L^p(\Omega)}.$$

Lema 2.6.4. ***(Desigualdade de Poincaré-Friedrichs)*** *Seja* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *aberto limitado. Se* $u \in H_0^1(\Omega)$ *então existe uma constante* $C > 0$ *tal que*

$$\|u\|^2_{L^2(\Omega)} \leqslant C\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

Lema 2.6.5. ***(Desigualdade de Gagliardo-Nirenberg)*** *Sejam* $q, r \in [\,1, +\infty\,)$ *e* $j, m \in \mathbb{N} \cup \{0\}, 0 \leqslant j \leqslant m$*. Então* $\forall\ \theta \in \left[\frac{j}{m}, 1\right]$ *e* $\frac{1}{p} = j + \theta\left(\frac{1}{q} - m\right) + (1-\theta)\frac{1}{r}$*,*

$$\|f^{(j)}\|_{L^p} \leqslant C(j,m,q,r,\theta)\|f^{(m)}\|^\theta_{L^q}\|f\|^{1-\theta}_{L^r},$$

onde $C(j,m,q,r,\theta)$ é uma constante. Em particular se $j=0, m=1, q=r=2$ e $\theta=\frac{1}{2}$ temos que

$$\|f\|_{L^\infty} \leqslant C\|f\|_{L^2}^{\frac{1}{2}}\|f'\|_{L^2}^{\frac{1}{2}}.$$

Lema 2.6.6. ***(Interpolação dos espaços*** $L^p(\Omega)$***)*** *Sejam $1 \leqslant p < q < r \leqslant \infty$ e $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto. Então,*

(i) $L^q(\Omega) \subset L^p(\Omega) + L^r(\Omega)$;

(ii) $L^P(\Omega) \cap L^r(\Omega) \subset L^q(\Omega)$, *e,* $\|f\|_{L^q} \leqslant \|f\|_{L^p}^{\gamma}\|f\|_{L^r}^{1-\gamma}$ *onde* $\gamma \in (0,1)$ *e* $\frac{1}{q} = \frac{\gamma}{p} + \frac{(1-\gamma)}{r}$;

(iii) $L^p(\Omega) \subset L^q(\Omega)$ *e* $\|f\|_{L^q} \leqslant \|f\|_{L^p}$.

Lema 2.6.7. ***(Desigualdade integral de Gronwall)*** *Seja $u : [a,b] \to \mathbb{R}^+$ contínua e não negativa satisfazendo*

$$u(t) \leqslant C + \int_a^t B(s)u(s)\ ds,\ \forall\ t \in [a,b],$$

onde $C \geqslant 0$ é constante e $B : [a,b] \to \mathbb{R}^+$ é contínua e não negativa. Então temos que,

$$u(t) \leqslant Ce^{\int_a^t B(s)\ ds},\ \forall\ t \in [a,b].$$

2.7 Semigrupos de operadores lineares

As definições e resultados que enunciaremos abaixo, bem como suas demonstrações, podem ser encontradas em [7, 13, 25] e, portanto, suas provas serão omitidas.

Definição 2.7.1. *Seja X um espaço de Hilbert. Dado $A : D(A) \subset X \to X$ uma aplicação linear definido no domínio $D(A)$. Diremos que A é densamente definido se $D(A)$ for denso em X.*

Definição 2.7.2. *O adjunto A^* de A é um operador linear $A^* : D(A^*) \subset X \to X$ que satisfaz*

(i) $F : D(A) \subset X \to \mathbb{C}, x \mapsto F(x) = \langle Ax, y\rangle$ *é contínuo,* $\forall\ y \in D(A^*)$, *ou seja,* $\exists\ C(y) > 0$ *constante tal que*

$$|\langle Ax, y\rangle| \leqslant C\|x\|,\ \forall\ x \in D(A);$$

(ii) $\forall\ y \in D(A^*), A^*y$ *é o único elemento de* X *tal que*

$$\langle Ax, y\rangle = \langle x, A^*y\rangle\,,\ \forall\ x \in D(A).$$

Definição 2.7.3. *O operador* A *é fechado se* $A^{**} = A$.

Definição 2.7.4. *O operador* A *é dissipativo se a parte real* $Re\,\langle Ax, x\rangle \leqslant 0,\ \forall\ x \in D(A)$.

Definição 2.7.5. *Seja* $\mathcal{L}(X;X)$ *a álgebra dos operadores lineares limitados de* X*. Dizemos que uma aplicação* $S : [\,0, +\infty\,) \to \mathcal{L}(X;X)$ *é um semigrupo de operadores lineares limitados de* X *se,*

1. $S(0) = I$*, onde* I *é o operador identidade de* $\mathcal{L}(X;X)$*;*

2. $S(t+s) = S(t)S(s),\ \forall\ t, s \in \mathbb{R}^+$*;*

   Diz-se que o semigrupo é de classe C^0 *se,*

3. $\lim\limits_{t\to 0^+} \|(S(t) - I)x\| = 0,\ \forall\ x \in X$.

Proposição 2.7.6. *Se* S *é um semigrupo de classe* C^0*, então*

1. $\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X;X)}$ *é uma função limitada em todo intervalo limitado [0,T];*

2. S *é fortemente continuo em* $\mathbb{R}^+$*, isto é, se* $t \in \mathbb{R}^+$ *então* $\lim_{s\to t} S(s)x = S(t)x,\ \forall\ x \in X$.

Teorema 2.7.7. *Seja* $S(t), t \in [\,0, +\infty\,)$*, um semigrupo fortemente contínuo e operadores lineares contínuos em* X*. Então,* $\exists\ C > 0$ *e* $\lambda \in \mathbb{R}$ *tal que*

$$\|S(t)\|_{\mathcal{L}(H;H)} \leqslant C \cdot e^{\lambda t},\ \forall\ t \in [\,0, +\infty\,)\,.$$

Definição 2.7.8. *O operador* $A : D(A) \to X$ *definido por*

$$D(A) = \left\{ x \in X : \lim_{h\to 0^+} \frac{S(h) - I}{h} x \quad \textit{existe} \right\}$$

e

$$A(x) = \lim_{h\to 0^+} \frac{S(h) - I}{h} x,\ \forall\ x \in D(A)$$

é dito gerador infinitesimal do semigrupo S.

Proposição 2.7.9. *Seja A o gerador infinitesimal de um semigrupo fortemente contínuo S. Então, para todo $x \in X$,*

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} S(s)x \, ds = S(s)x \ \text{ e } \ \frac{d}{dt}[S(t)x] = AS(t)x = S(t)Ax.$$

Definição 2.7.10. *Seja A um operador linear de X. O conjunto dos $\lambda \in \mathbb{C}$ para os quais o operador linear $\lambda I - A$ é inversível, seu inverso é limitado e tem domínio denso em X, é dito conjunto resolvente de A e é representado por $\rho(A)$.*

Teorema 2.7.11 (Lumer-Phillips)**.** *Se A é um gerador infinitesimal de um semigrupo de contração de classe C^0, então*

1. *A é dissipativo;*
2. *$R(\lambda I - A) = X, \ \lambda > 0$.*

Reciprocamente, se

1. *$D(A)$ é denso em X;*
2. *A é dissipativo;*
3. *$R(\lambda_0 - A) = X$, para algum $\lambda_0 > 0$,*

então A é o gerador infinitesimal de um semigrupo de contrações de classe C^0.

Corolário 2.7.12. *Seja A um operador linear fechado, densamente definido tal que $D(A)$ e $R(A)$ estão ambos em X. Se A e seu operador adjunto A^* são ambos dissipativos, então A é o gerador infinitesimal do semigrupo fortemente contínuo de contrações de classe C^0 associado ao operador A.*

Considere o seguinte problema de Cauchy abstrato, não linear,

$$\text{(i)} \quad \begin{cases} \dfrac{du}{dt} = Au + f(t, u(t)) \\ u(t_0) = u^0 \end{cases}$$

onde A é um gerador infinitesimal de um semigrupo $S(t)$, de classe C^0, $t \geqslant 0$, com domínio em X e $f : [t_0, T] \times X \to X$ é contínua em t satisfazendo a condição de Lipschitz em u.

Definição 2.7.13. *Dizemos que u é solução clássica do problema, se*

$$u \in C^0([\,0, +\infty\,)\,; D(A)) \cap C^1([\,0, +\infty\,)\,; X),$$

e satisfaz (i). Caso a função $u \in C([0,T]; X)$, seja dada por

$$u(t) = S(t)u^0 + \int_0^t S(t-s)f(s, u(s))ds,$$

será chamada uma solução generalizada de (i). Note ainda que mesmo para $f \equiv 0, u = S(t)u^0$ será uma solução generalizada do caso linear.

Teorema 2.7.14. *Seja A for gerador infinitesimal de um semigrupo fortemente contínuo. Então,*

$$\forall\ u^0 \in D(A),\ \forall\ T \in [\,t_0, +\infty\,)\ \ e\ \ \forall\ f \in C^1([t_0, T]; X),$$

o problema de valor inicial (i) possui uma única solução

$$u \in C^1([\,t_0, +\infty\,)\,; X) \cap C^0([\,t_0, +\infty\,)\,; D(A)),$$

e tem-se

$$u(t) = S(t)u^0 + \int_0^t S(t-s)f(s, u(s))ds,\ \forall\ t \in [0, T].$$

Teorema 2.7.15. *Para cada $T > 0$ e $u(t) \in X$, com $t \in [0,T]$, o problema de valor inicial (i) possui uma única solução fraca em $[0,T]$ se, e somente se, A for gerador infinitesimal de um semigrupo fortemente contínuo $\{S(t)\}_{t \geqslant 0}$.*

Teorema 2.7.16. *Seja $f : [t_0, \infty) \times X \to X$ contínua em t para $t \geqslant 0$, localmente Lipschitz em u e uniformemente contínua em t em intervalos limitados. Se A é um gerador infinitesimal de um semigrupo $S(t)$, $t \geqslant 0$ de classe C^0, em X, então para todo $u^0 \in X$ existe $t_{\max} \leqslant \infty$ tal que o problema de valor inicial (i) possui uma única solução $u \in [0, t_{\max})$. Além disso, se $t_{\max} < \infty$ então*

$$\lim_{t \to t_{\max}} \|u(t)\|_X = \infty.$$

2.8 Tópicos adicionais essenciais

As definições e resultados que enunciaremos abaixo, bem como suas demonstrações, podem ser encontradas em [5, 9, 31, 32] e, portanto, suas provas serão omitidas.

Definição 2.8.1. *Sejam X e Y espaços de Banach. Uma aplicação $\varphi : X \to Y$ é uma contração se, existe uma constante $0 < \alpha < 1$ tal que*

$$d(\varphi(x), \varphi(y)) \leqslant \alpha d(x, y).$$

Teorema 2.8.2. ***(Teorema do ponto fixo de Banach)*** *Sejam X um espaço de Banach e $\varphi : X \to X$ uma contração. Então, existe um único ponto $x \in X$ tal que $\varphi(x) = x$.*

Teorema 2.8.3. ***(Teorema de Ergoroff)*** *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto. Se $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^p(\Omega)$, com $1 < p < \infty$, tal que $f_n \to f$ e $f_n(x) \to g(x)$ quase sempre, quando $n \to \infty$, então $f(x) = g(x)$ quase sempre.*

Teorema 2.8.4. *Se V é um espaço de Banach e $g \in L^p(0, T; V)$, com $1 \leqslant p \leqslant \infty$, então para algum $h > 0$ a função*

$$g^{[h]}(x, t) = \frac{1}{h} \int_t^{t+h} g(x, s) ds,$$

satisfaz

(i) $g^{[h]} \in W^{1,p}(0, T - h; V)$;

(ii) $\|g^{[h]}\|_{L^p(0,T-h;V)} \leqslant \|g\|_{L^p(0,T;V)}$;

(iii) $g^{[h]} \to g$ *em* $L^p(0, T'; V)$ *quando* $h \to 0$, $p < \infty$ *e* $T' < T$.

Lema 2.8.5. *Sejam X e Y espaços de Banach tal que $X \subset Y$ é uma imersão contínua. Se a função $\varphi \in L^\infty(0, T; X)$ e é fracamente contínua com valores em Y, então φ será fracamente contínua com valores em X.*

Definição 2.8.6. *Um conjunto K de um espaço de Banach B é compacto se para toda família de abertos que cobrem K existe uma sub-família finita cobrindo K. Assim, um conjunto é relativamente compacto se o seu fecho for compacto.*

Lema 2.8.7. *Um conjunto F de $C(0,T;B)$ é relativamente compacto se, e somente se,*

(i) $F(t) = \{f(t); f \in F\}$ *é relativamente compacto em B, $\forall\, t \in [0,T]$;*

(ii) F *é uniformemente equicontínuo, isto é,*

$$\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \delta > 0; |t_2 - t_1| < \delta \Rightarrow \|f(t_2) - f(t_1)\| < \varepsilon,\ \forall\, f \in F, 0 \leqslant t_1 \leqslant t_2 \leqslant T.$$

Lema 2.8.8. *Sejam X, B e Y espaçoes de Banach, onde $X \subset B \subset Y$ com imersão compacta $X \hookrightarrow B$.*

(i) Se F é limitado em $L^p(0,T;X), 1 \leqslant p < \infty$, e $\partial_t F$ limitado em $L^1(0,T;Y)$. Então F é relativamente compacto em $L^p(0,T;B)$;

(ii) Se F é limitado em $L^\infty(0,T;X)$ e $\partial_t F$ é limitado em $L^r(0,T;Y)$ onde $r > 1$. Então, F é relativamente compacto em $C(0,T;B)$.

Teorema 2.8.9. ***(Banach-Alaoglu-Bourbaki)*** *Seja E um espaço de Banach. Então, $B'_E = \{f \in E'; \|f\| \leqslant 1\}$ é compacto pela topologia fraca* $\delta(E', E)$.*

3 BOA COLOCAÇÃO

Neste capítulo mostraremos a existência, unicidade e dependência contínua dos dados iniciais da solução para o sistema (1)–(3), tanto no caso linear, quanto no caso não-linear. Para isso, introduziremos o espaço de Hilbert

$$X = [L^2(0,L)]^2,$$

munido do produto interno

$$((u,v),(\varphi,\psi))_X = \frac{b_2}{b_1}\int_0^L u\varphi\, dx + \int_0^L v\psi\, dx.$$

3.1 Caso linear

Nesta seção vamos considerar o sistema (1)–(3) quando $a_1 = a_2 = a(s) = b(x) = 0$, para todo $s \in \mathbb{R}$ e $x \in (0,L)$. Defina o seguinte operador linear $\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \subset X \to X$ com

$$\mathcal{A}(u,v) := \begin{pmatrix} -u_{xxx} - a_3 v_{xxx} \\ -\dfrac{r}{b_1}v_x - \dfrac{b_2 a_3}{b_1}u_{xxx} - \dfrac{1}{b_1}v_{xxx} \end{pmatrix}, \forall\ (u,v) \in D(\mathcal{A}),$$

onde,

$$D(\mathcal{A}) := \{(u,v) \in [H^3(0,L)]^2; u(0,t) = v(0,t) = u(L,t) = v(L,t) = u_x(L,t) = v_x(L,t) = 0\},$$

para $t \in (0,T)$.

Note que, definindo $\mathcal{U} := (u,v) \in X$ podemos reescrever o sistema (1)–(3), utilizando as hipóteses iniciais, da forma:

$$\begin{cases} \mathcal{U}_t = \mathcal{A}(\mathcal{U}), & \text{em } (0,L)\times(0,T), \\ \mathcal{U}(0,t) = \mathcal{U}(L,t) = \mathcal{U}_x(L,t) = 0, & \text{em } (0,T), \\ \mathcal{U}(x,0) = \mathcal{U}^0(x), & \text{em } (0,L). \end{cases} \tag{8}$$

Além disso, dados $(u,v),(\varphi,\gamma) \in [H^3(0,L)]^2$, por integração por partes e pelas condições de contorno, temos que

$$\begin{aligned} (\mathcal{A}(u,v),(\varphi,\gamma))_X &= \frac{b_2}{b_1}\int_0^L (-u_{xxx} - a_3 v_{xxx})\varphi\, dx + \int_0^L \left(-\frac{r}{b_1}v_x - \frac{b_2 a_3}{b_1}u_{xxx} - \frac{v_{xxx}}{b_1}\right)\gamma\, dx \\ &= \frac{b_2}{b_1}\int_0^L (\varphi_{xxx} + a_3\gamma_{xxx})u\, dx + \int_0^L \left(\frac{r}{b_1}\gamma_x + b_2 a_3 \varphi_{xxx} + \frac{1}{b_1}\gamma_{xxx}\right) v\, dx \\ &\quad -\frac{b_2}{b_1}\varphi_x(0,t)\left[u_x(0,t) + v_x(0,t)a_3\right] - \gamma_x(0,t)\left[\frac{b_2 a_3}{b_1}u_x(0,t) + \frac{v_x(0,t)}{b_1}\right]. \end{aligned}$$

Dessa forma defina $\mathcal{A}^* : D(\mathcal{A}^*) \subset X \to X$ por

$$\mathcal{A}^*(\varphi,\gamma) = \begin{pmatrix} \varphi_{xxx} + a_3\gamma_{xxx} \\ \frac{r}{b_1}\gamma_x + \frac{b_2 a_3}{b_1}\varphi_{xxx} + \frac{1}{b_1}\gamma_{xxx} \end{pmatrix},$$

com

$$D(\mathcal{A}^*) = \{(\varphi,\gamma) \in [H^3(0,L)]^2; \varphi(0,t) = \gamma(0,t) = \varphi(L,t) = \gamma(L,t) = \varphi_x(0,t) = \gamma_x(0,t) = 0\},$$

para $t \in (0,T)$. Note que,

$$(\mathcal{A}(u,v),(\varphi,\gamma))_X = ((u,v),\mathcal{A}^*(\varphi,\gamma))_X,\ \forall\ (u,v),(\varphi,\gamma) \in X.$$

portanto, $\mathcal{A}^*$ é o operador adjunto de $\mathcal{A}$.

Proposição 3.1.1. *São válidas as seguintes afirmações:*

(i) $D(\mathcal{A})$ *é denso em* X

(ii) $\mathcal{A}$ *é fechado*

(iii) $\mathcal{A}$ *e* $\mathcal{A}^*$ *são dissipativos.*

Demonstração:

Para ver *(i)* note que,

$$[C_0^\infty(0,L)]^2 \subset D(\mathcal{A}) \subset [H^3(0,L)]^2 \subset [L^2(0,L)]^2 = X.$$

O Teorema 2.1.26 nos fornece que $[C_0^\infty(0,L)]^2$ é denso em $[L^2(0,L)]^2$, segue assim que $D(\mathcal{A})$ é denso em X.

Para provar *(ii)*, basta verificar que $\mathcal{A}^{**} = \mathcal{A}$. De fato, análogo aos cálculos já feitos para a obtenção do operador adjunto de A é fácil ver que:

$$(\mathcal{A}(u,v),(\varphi,\gamma))_X = ((u,v),\mathcal{A}^*(\varphi,\gamma))_X = (\mathcal{A}^{**}(u,v),(\varphi,\gamma))_X.$$

Por fim para mostrar *(iii)*, veja que,

$$\begin{aligned}
(\mathcal{A}(u,v),(u,v))_X &= \frac{b_2}{b_1}\int_0^L (-u_{xxx} - a_3 v_{xxx})u\ dx + \int_0^L \left(-\frac{r}{b_1}v_x - \frac{a_3 b_2}{b_1}u_{xxx} - \frac{v_{xxx}}{b_1}\right) v\ dx \\
&= -\frac{1}{2b_1}\left[b_2 u_x^2(0,t) + v_x^2(0,t) + 2a_3 b_2 u_x(0,t)v_x(0,t)\right] \\
&= -\frac{1}{2b_1}\left\{\left(\sqrt{b_2}u_x(0,t) + \sqrt{a_3^2 b_2}v_x(0,t)\right)^2 + (1 - a_3^2 b_2)v_x^2(0,t)\right\} \leqslant 0
\end{aligned}$$

Analogamente, $(\mathcal{A}^*(\varphi,\gamma),(\varphi,\gamma))_X \leqslant 0$. Portanto, pela definição 2.7.4, temos que $\mathcal{A}$ e $\mathcal{A}^*$ são operadores lineares dissipativos. ■

Teorema 3.1.2. *Seja $\mathcal{U}^0 \in X$. Existirá uma única solução fraca $\mathcal{U} = S(\cdot)\mathcal{U}^0$ de (8) tal que*

$$\mathcal{U} \in C([0,T];X).$$

Além disso, se $\mathcal{U}^0 \in D(\mathcal{A})$, então (8) terá uma única solução clássica $\mathcal{U}$ tal que

$$\mathcal{U} \in C([0,T];D(\mathcal{A})) \cap C^1([0,T];X).$$

Demonstração:

A Proposição 3.1.1, nos fornece as hipóteses necessárias, para aplicar o Corolário 2.7.12 proveniente do Teorema de Lumer-Phillips, na qual nos permite afirmar que $\mathcal{A}$ gera um semigrupo de contrações de classe C^0, que denotaremos por $S : [\,0,\infty\,) \to \mathcal{L}(X;X)$. Dessa forma, pelo Teorema 2.7.15, existirá uma única solução fraca em $[0,T]$, para (8), da forma $\mathcal{U} = S(\cdot)\mathcal{U}^0$. Em particular, se $\mathcal{U}^0 \in D(\mathcal{A})$, pelo Teorema 2.7.14, existirá uma única solução clássica tal que $\mathcal{U} \in C([0,T]);D(\mathcal{A}) \cap C^1([0,T];X)$. ■

A obtenção de estimativas globais a priori, para o caso linear é muito similar ao caso não-linear, de modo que deixaremos para prová-la na próxima seção. O resultado acima juntamente com essas estimativas nos garante a boa colocação global de (8).

A seguir apresentaremos um resultado de regularidade para as soluções fracas de (8).

Teorema 3.1.3. *Seja $\mathcal{U}^0 \in X$ e $\mathcal{U} = S(\cdot)\mathcal{U}^0$ a solução fraca de (8). Então,*

$$\mathcal{U} \in L^2(0,T;[H^1(0,L)]^2) \cap H^1(0,T;[H^{-2}(0,L)]^2).$$

Além disso existe uma constante $C > 0$ tal que para todo $t \geqslant 0$,

$$\|\mathcal{U}\|_{L^2(0,T;[H^1(0,L)]^2)} \leqslant C\|\mathcal{U}^0\|_X.$$

Demonstração:

A prova será omitida pois são análogas as apresentadas no Lema 3.2.3. ■

Usando os resultados anteriores e argumentos de interpolação (ver seção 2.4), obtemos um resultado de boa colocação global em cada espaço $[H^s(0,L)]^2$ para $s \in [0,3]$.

Corolário 3.1.4. *Para qualquer $s \in [0,3]$ e qualquer $\mathcal{U}^0 \in [H^s(0,L)]^2$, a solução $\mathcal{U}$ de (9) pertence a $C([0,T];[H^s(0,L)]^2)$.*

3.2 Caso não-linear

Considere o sistema (1)–(5). Com a notação apresentada no caso linear e para $s \in [0,3]$, defina X_s como a coleção das funções $\omega \in H^s(0,L)$ satisfazendo as seguintes condições de compatibilidade

$$\begin{cases} \omega(0,t) = \omega(L,t) = 0, & \text{se } s \in \left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{3}{2}\right], \\ \omega(0,t) = \omega(L,t) = \omega_x(L,t) = 0, & \text{se } s \in \left(\dfrac{3}{2}, 3\right], \end{cases}$$

munido da norma Hilbertiana $\|\omega\|_{H^s}$. Para qualquer $T > 0$, introduziremos o espaço

$$Y_{s,T} := C([0,T];X_s) \cap L^2([0,T];H^{s+1}(0,L)),$$

munido da norma,

$$\|\omega\|_{Y_{s,T}} := \|\omega\|_{C([0,T];H^s(0,L))} + \|\omega\|_{L^2([0,T];H^{s+1}(0,L))}.$$

Note que, analogamente ao caso linear, temos o seguinte:

$$\begin{cases} \mathcal{U}_t = \mathcal{A}(\mathcal{U}) + f(\mathcal{U}), & \text{em } (0,L)\times(0,T), \\ \mathcal{U}(0,t) = \mathcal{U}(L,t) = \mathcal{U}_x(L,t) = 0, & \text{em } (0,T), \\ \mathcal{U}(x,0) = \mathcal{U}^0(x), & \text{em } (0,L), \end{cases} \tag{9}$$

onde f é dada por

$$f(\mathcal{U}) := f(u,v) = \begin{pmatrix} -a(u)u_x - vv_x - a_2(uv)_x - b(x)u \\ -\dfrac{a(v)}{b_1}v_x - \dfrac{b_2a_2}{b_1}uu_x - \dfrac{b_2a_1}{b_1}(uv)_x - \dfrac{b(x)}{b_1}v \end{pmatrix}.$$

Apresentaremos a seguir dois Lemas técnicos provados em [27], que serão úteis para provar a existência e unicidade local das soluções.

Lema 3.2.1. *Seja $a = a(x)$ uma função de classe C^0, tal que*

$$|a(x)| \leqslant C(1+|x|^p),\ \forall\ x \in \mathbb{R} \quad e \quad 0 \leqslant p < 2,$$

onde $C > 0$ é uma constante. Então para qualquer $T > 0$ e $u, v \in Y_{0,T}$,

$$\int_0^T \|a(u(\,\cdot\,,T))v_x(\,\cdot\,,t)\|_{L^2(0,L)}\,dt \leqslant C\left\{T^{\frac{1}{2}}(1+\|u\|^p_{Y_{0,T}})\|v\|_{Y_{0,T}} + T^{\frac{4-p}{4}}\|u\|^p_{Y_{0,T}}\|v\|_{Y_{0,T}}\right\}.$$

Demonstração:

Inicialmente veja que pelo Lema 2.6.5 (desigualdade de Gagliardo-Nirenberg), obtemos

$$\begin{aligned} \|u(\,\cdot\,,t)\|_{L^\infty(0,L)} &\leqslant C\left\{\|u(\,\cdot\,,t)\|^{\frac{1}{2}}_{L^2(0,L)}\|u_x(\,\cdot\,,t)\|^{\frac{1}{2}}_{L^2(0,L)}\right\} \\ &\leqslant C\left\{\|u(\,\cdot\,,t)\|_{L^2(0,L)} + \|u(\,\cdot\,,t)\|^{\frac{1}{2}}_{L^2(0,L)}\|u_x(0,t)\|^{\frac{1}{2}}_{L^2(0,L)}\right\}. \end{aligned}$$

Daí, usando a desigualdade acima e as hipóteses sobre a função $a = a(x)$, temos

$$
\begin{aligned}
E_1 &:= \int_0^T \|a(u(\,\cdot\,,t))v_x(\,\cdot\,,t)\|_{L^2(0,L)}\;dt\\
&\leqslant \int_0^T |a(u(\,\cdot\,,t))|\|v_x(\,\cdot\,,t)\|_{L^2(0,L)}\;dt\\
&\leqslant C\left\{\int_0^T \|v_x(\,\cdot\,,t)\|_{L^2(0,L)}\,(1+|u(\,\cdot\,,t)|^p)\;\,dt\right\}\\
&\leqslant C\left\{\int_0^T \|v_x(\,\cdot\,,t)\|_{L^2(0,L)}\left(1+\|u(\,\cdot\,,t)\|^p_{L^\infty(0,L)}\right)\;dt\right\}\\
&\leqslant C\int_0^T \|v_x(\,\cdot\,,t)\|_{L^2(0,L)}\left(1+\|u(\,\cdot\,,t)\|^p_{L^2(0,L)}\right)\;dt\\
&\quad + C\int_0^T \|v_x(\,\cdot\,,t)\|_{L^2(0,L)}\|u(\,\cdot\,,t)\|^{\frac{p}{2}}_{L^2(0,L)}\|u_x(\,\cdot\,,t)\|^{\frac{p}{2}}_{L^2(0,L)}\;dt\\
&:= E_{11}+E_{12}\;.
\end{aligned}
$$

Estimando cada termo anteriormente, obtemos

$$
\begin{aligned}
E_{11} &:= C\left\{\int_0^T \|v_x(\,\cdot\,,t)\|_{L^2(0,L)}\left(1+\|u(\,\cdot\,,t)\|^p_{L^2(0,L)}\right)\;dt\right\}\\
&\leqslant C\left\{\int_0^T \left(1+\|u(\,\cdot\,,t)\|^p_{L^2(0,L)}\right)^2\;dt\right\}^{\frac12}\left\{\int_0^T \|v_x(\,\cdot\,,t)\|^2_{L^2(0,L)}\;dt\right\}^{\frac12}\\
&\leqslant CT^{\frac12}\left(1+\|u\|^p_{C(0,T;L^2(0,L))}\right)\|v_x\|_{L^2(0,T;H^1(0,L))}\\
&\leqslant CT^{\frac12}\left(1+\|u\|^p_{C(0,T;L^2(0,L))}+\|u_x\|^p_{L^2(0,T;H^1(0,L))}\right)\left(\|v_x\|_{L^2(0,T;H^1(0,L))}+\|v\|_{C(0,T;L^2(0,L))}\right)\\
&\leqslant CT^{\frac12}\left(\|u\|^p_{Y_{0,T}}+1\right)\|v\|_{Y_{0,T}},
\end{aligned}
$$

e,

$$
\begin{aligned}
E_{12} &:= C\left\{\int_0^T \|u(\,\cdot\,,t)\|^{\frac{p}{2}}_{L(0,L)}\|u_x(\,\cdot\,,t)\|^{\frac{p}{2}}_{L^2(0,L)}\|v_x(\,\cdot\,,t)\|_{L^2(0,L)}\;dt\right\}\\
&\leqslant C\|u\|^{\frac{p}{2}}_{C(0,T;L^2(0,L))}\left\{\int_0^T \left[\|u_x(\,\cdot\,,t)\|^{\frac{p}{2}}_{L^2(0,L)}\right]^{\frac4p}\;dt\right\}^{\frac{p}{4}}\left\{\int_0^T \left[\|v_x(\,\cdot\,,t)\|_{L^2(0,L)}\right]^{\frac{4}{4-p}}\right\}^{\frac{4-p}{4}}\\
&\leqslant C\|u\|^{\frac{p}{2}}_{Y_{0,T}}\left(\|u\|^2_{Y_{0,T}}\right)^{\frac{p}{4}}T^{\frac{4-p}{4}}\|v\|_{Y_{0,T}}\\
&\leqslant CT^{\frac{4-p}{4}}\|u\|^p_{Y_{0,T}}\|v\|_{Y_{0,T}}.
\end{aligned}
$$

Então,

$$
E_1 \;\leqslant\; E_{11}+E_{12} \;\leqslant C\left\{T^{\frac12}\left(1+\|u\|^p_{Y_{0,T}}\right)\|v\|_{Y_{0,T}}+T^{\frac{4-p}{4}}\|u\|^p_{Y_{0,T}}\|v\|_{Y_{0,T}}\right\}.
$$

isso prova o resultado. ■

Lema 3.2.2. *Seja $a = a(x)$ uma função de classe C^0, tal que*

$$|a(x)| \leqslant C(1 + |x|^p), \ \forall \ x \in \mathbb{R} \quad e \quad 1 \leqslant p < 2,$$

onde $C > 0$ é uma constante. Então para qualquer $T > 0$ e $u, v, \omega \in Y_{0,T}$,

(i) $\displaystyle\int_0^T \|bu\|_{L^2(0,L)} \ dt \leqslant CT^{\frac{3}{4}} \|b\|_{L^2(0,L)} \|u\|_{Y_{0,T}}$

(ii) $\displaystyle\int_0^T \|u\omega_x\|_{L^2(0,L)} \ dt \leqslant CT^{\frac{1}{4}} \|u\|_{Y_{0,T}} \|\omega\|_{Y_{0,T}}$

(iii) $\displaystyle\int_0^T \|u|\omega|^{p-1}\omega_x\|_{L^2(0,L)} \ dt \leqslant CT^{\frac{3-p}{4}} \|u\|_{Y_{0,T}} \|\omega\|^p_{Y_{0,T}}$

(iv) $\displaystyle\int_0^T \|u|v|^{p-1}\omega_x\|_{L^2(0,L)} \ dt \leqslant CT^{\frac{3-p}{4}} \|u\|_{Y_{0,T}} \|\omega\|_{Y_{0,T}} \|v\|^{p-1}_{Y_{0,T}}$

onde C é uma constante positiva.

Demonstração:

Para mostrar *(i)*, note que

$$\begin{aligned}
E_2 \ &:= \int_0^T \|bu\|_{L^2(0,L)} \ dt = \int_0^T \left(\int_0^L b^2 u^2 \ dx \right)^{\frac{1}{2}} \ dt \\
&\leqslant \int_0^T \left(\int_0^L b^2 \ dx \right)^{\frac{1}{2}} \|u(\ \cdot \ , t)\|_{L^\infty(0,L)} \ dt \\
&\leqslant C\|b\|_{L^2(0,L)} \left\{ \int_0^T \left(\|u(\ \cdot \ , t)\|^{\frac{1}{2}}_{L^2(0,L)} \right)^{\frac{4}{3}} \ dt \right\}^{\frac{3}{4}} \left\{ \int_0^T \left(\|u_x(\ \cdot \ , t)\|^{\frac{1}{2}}_{L^2(0,L)} \right)^4 \ dt \right\}^{\frac{1}{4}} \\
&\leqslant C\|b\|_{L^2(0,L)} T^{\frac{3}{4}} \|u\|^{\frac{1}{2}}_{Y_{0,T}} \|u\|^{\frac{1}{2}}_{Y_{0,T}} \\
&\leqslant CT^{\frac{3}{4}} \|u\|_{Y_{0,T}} \|b\|_{L^2(0,L)}.
\end{aligned}$$

assim *(i)* se verifica. Para *(ii), temos*

$$\begin{aligned}
E_3 \ &:= \int_0^T \|u\omega_x\|_{L^2(0,L)} \ dt \leqslant \left\{ \int_0^T \|u(\ \cdot \ , t)\|^2_{L^\infty(0,L)} \ dt \right\}^{\frac{1}{2}} \left\{ \int_0^T \|\omega_x(\ \cdot \ , t)\|^2_{L^2(0,L)} \ dt \right\}^{\frac{1}{2}} \\
&\leqslant C\|\omega\|_{Y_{0,T}} \left\{ \int_0^T \|u(\ \cdot \ , t)\|_{L^2(0,L)} \|u_x(\ \cdot \ , t)\|_{L^2(0,L)} \ dt \right\}^{\frac{1}{2}} \\
&\leqslant C\|\omega\|_{Y_{0,T}} \left\{ \left[\int_0^T \|u(\ \cdot \ , t)\|^2_{L^2(0,L)} \ dt \right]^{\frac{1}{2}} \left[\int_0^T \|u_x(\ \cdot \ , t)\|^2_{L^2(0,L)} \ dt \right]^{\frac{1}{2}} \right\}^{\frac{1}{2}} \\
&\leqslant C\|\omega\|_{Y_{0,T}} \left\{ T^{\frac{1}{2}} \|u\|_{Y_{0,T}} \|u\|_{Y_{0,T}} \right\}^{\frac{1}{2}} \leqslant CT^{\frac{1}{4}} \|u\|_{Y_{0,T}} \|\omega\|_{Y_{0,T}}.
\end{aligned}$$

Por fim, mostraremos *(iii)*. O item *(iv)*, é obtido de maneira análoga. Assim, temos:

$$
\begin{aligned}
E_4 \;&:= \int_0^T \| u|\omega|^{p-1}\omega_x \|_{L^2(0,L)}\, dt = \int_0^T \left(\int_0^L u^2 \omega^{2p-2} \omega_x^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \, dt \\
&\leqslant \left\{ \int_0^T \left(\|u(\,\cdot\,,t)\|_{L^\infty(0,L)} \|\omega(\,\cdot\,,t)\|_{L^\infty(0,L)}^{p-1} \right)^2 \, dt \right\}^{\frac{1}{2}} \left\{ \int_0^T \|\omega_x\|_{L^2(0,L)}^2 \, dt \right\}^{\frac{1}{2}} \\
&\leqslant \|\omega\|_{Y_{0,T}} \left\{ \int_0^T C \|u(\,\cdot\,,t)\|_{L^2(0,L)} \|u_x(\,\cdot\,,t)\|_{L^2(0,L)} \|\omega(\,\cdot\,,t)\|_{L^2(0,L)}^{p-1} \|\omega_x(\,\cdot\,,t)\|_{L^2(0,L)}^{p-1} \, dt \right\}^{\frac{1}{2}} \\
&\leqslant C \|\omega\|_{Y_{0,T}} \|u\|_{C(0,T;L^2(0,L))}^{\frac{1}{2}} \|\omega\|_{C(0,T;L^2(0,L))}^{\frac{p-1}{2}} \left\{ \int_0^T \|u_x(\,\cdot\,,t)\|_{L^2(0,L)} \|\omega_x(\,\cdot\,,t)\|_{L^2(0,L)}^{p-1} \, dt \right\}^{\frac{1}{2}} \\
&\leqslant C \|u\|_{Y_{0,T}}^{\frac{1}{2}} \|\omega\|_{Y_{0,T}}^{\frac{p+1}{2}} \left\{ \left[\int_0^T \left(\|\omega_x(\,\cdot\,,t)\|_{L^2(0,L)}^{p-1} \right)^{\frac{2}{p-1}} dt \right]^{\frac{p-1}{2}} \left[\int_0^T \left(\|u_x(\,\cdot\,,t)\|_{L^2(0,L)} \right)^{\frac{2}{3-p}} dt \right]^{\frac{3-p}{2}} \right\}^{\frac{1}{2}} \\
&\leqslant C \|u\|_{Y_{0,T}}^{\frac{1}{2}} \|\omega\|_{Y_{0,T}}^{\frac{p+1}{2}} \left\{ \|\omega\|_{Y_{0,T}}^{p-1} \|u\|_{Y_{0,T}} T^{\frac{3-p}{2}} \right\}^{\frac{1}{2}} \leqslant C T^{\frac{3-p}{4}} \|u\|_{Y_{0,T}} \|\omega\|_{Y_{0,T}}^{p}.
\end{aligned}
$$

■

Agora, através do próximo lema, iremos obter uma estimativa global a priori para as soluções de (1)–(3). Tais estimativas são a chave para a demonstração da boa colocação global do sistema.

Lema 3.2.3. *Seja $a = a(x)$ uma função de classe C^0, tal que, para $0 \leqslant p < 4$,*

$$|a(x)| \leqslant C(1 + |x|^p), \;\; \forall\, x \in \mathbb{R},$$

onde $C > 0$ é uma constante. Então, para qualquer $T > 0$,

$$
\begin{aligned}
\|\mathcal{U}^0\|_X^2 \;&=\; \|\mathcal{U}(\,\cdot\,,T)\|_X^2 + \frac{2}{b_1} \int_0^T \int_0^L b(x)(b_2 u^2 + v^2) \, dx \, dt \\
&\quad + \frac{1}{b_1} \int_0^T \left\{ \left[\sqrt{b_2} u_x(0,t) + \sqrt{a_3^2 b_2} v_x(0,t) \right]^2 + (1 - a_3^2 b_2) v_x^2(0,t) \right\} dt,
\end{aligned}
\tag{10}
$$

e

$$\|\mathcal{U}\|_{L^2(0,T;[H_0^1(0,L)]^2)}^2 \leqslant C \left\{ (1+T)\|\mathcal{U}^0\|_X^2 + T\|\mathcal{U}^0\|_X^6 + T\|\mathcal{U}^0\|_X^{\frac{8+2p}{4-p}} \right\}, \tag{11}$$

onde $C > 0$ é uma constante positiva.

Demonstração:

Seja $C > 0$ uma constante universal e defina

$$J(u) := \int_0^u a(s)\ ds \ \text{ e } \ \tilde{J}(u) := \int_0^u s\ a(s)\ ds.$$

Note que,

$$\partial_x \tilde{J}(u) = \partial_x \int_0^u s\ a(s)\ ds = u\ a(u) u_x \ \text{ e } \ |\tilde{J}(u)| \leqslant C \cdot \left(\frac{|u|^2}{2} + \frac{|u|^{p+2}}{p+2} \right).$$

Tome $p, q \in C^\infty([0,T] \times [0,L])$. Multiplique a primeira equação de (1) por $b_2 qu$ e a segunda equação de (1) por pv. Somando ambas as equações e integrando sob os domínios $(0,L)$ e $(0,T)$, obtemos:

$$\begin{aligned} 0 \ = \ & \int_0^T \int_0^L b_2 quu_t\ dx\ dt + \int_0^T \int_0^L b_2 qua(u)u_x\ dx\ dt \\ & + \int_0^T \int_0^L b_2 quu_{xxx}\ dx\ dt + \int_0^T \int_0^L b_2 a_3 quv_{xxx}\ dx\ dt \\ & + \int_0^T \int_0^L b_2 a_1 quvv_x\ dx\ dt + \int_0^T \int_0^L b_2 a_2 qu(uv)_x\ dx\ dt \\ & + \int_0^T \int_0^L b_2 qb(x)u^2\ dx\ dt + \int_0^T \int_0^L pb(x)v^2\ dx\ dt \\ & + \int_0^T \int_0^L b_1 pvv_t\ dx\ dt + \int_0^T \int_0^L pv(av)v_x\ dx\ dt \\ & + \int_0^T \int_0^L pvv_{xxx}\ dx\ dt + \int_0^T \int_0^L b_2 a_3 pvu_{xxx}\ dx\ dt \\ & + \int_0^T \int_0^L b_2 a_2 pvuu_x\ dx\ dt \int_0^T \int_0^L b_2 a_1 pv(uv)_x\ dx\ dt \\ & + \int_0^T \int_0^L rpvv_x\ dx\ dt := \sum_{i=1}^{15} I_i, \end{aligned} \tag{12}$$

respectivamente.

Agora, desprezando momentaneamente as constantes, obteremos as seguintes identidades:

$$\begin{aligned} I_1 \ := \ & \int_0^T \int_0^L quu_t\ dx\ dt = \int_0^L \left\{ (qu^2)|_0^T - \int_0^T (qu)_t u\ dt \right\} dx \\ = \ & \int_0^L \left\{ (qu^2)|_0^T - \int_0^T q_t u^2\ dt - \int_0^T quu_t\ dt \right\} dx \\ = \ & \frac{1}{2} \int_0^L (qu^2)|_0^T\ dx - \frac{1}{2} \int_0^T \int_0^L q_t u^2\ dx\ dt; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_2 &:= \int_0^T \int_0^L qua(u)u_x \; dx \; dt = \int_0^T \int_0^L q\partial_x \tilde{J}(u) \; dx \; dt \\
&= \int_0^T q\tilde{J}(u)|_0^L \; dt - \int_0^T \int_0^L q_x \tilde{J}(u) \; dx \; dt \\
&= -\int_0^T \int_0^L q_x \tilde{J}(u) \; dx \; dt;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_3 &:= \int_0^T \int_0^L quu_{xxx} \; dx \; dt = \int_0^T \left\{ (quu_{xx})|_0^L - \int_0^L (qu)_x u_{xx} \; dx \right\} dt \\
&= \int_0^T \left\{ -(q_x uu_x)|_0^L + \int_0^L (q_x u)_x \; dx - (qu_x^2)|_0^L + \int_0^L (qu_x)_x u_x \; dx \right\} dt \\
&= \int_0^T \left\{ \int_0^L q_{xx} uu_x \; dx + \int_0^L q_x u_x^2 \; dx - (qu_x^2)|_0^L + \int_0^L q_x u_x^2 \; dx + \int_0^L qu_{xx} u_x \; dx \right\} dt \\
&= \int_0^T \left\{ -(qu_x^2)|_0^L + (q_{xx} u^2)|_0^L - \int_0^L (q_{xx} u)_x \; dx + (qu_{xx} u)|_0^L - \int_0^L (qu_{xx})_x u \; dx \right. \\
&\quad \left. +2 \left[(q_x u_x u)|_0^L - \int_0^L (q_x u_x)_x u \; dx \right] \right\} dt \\
&= \frac{1}{2} \int_0^T \left\{ -(qu_x^2)|_0^L - \int_0^L q_{xxx} u^2 \; dx \; - 3 \left(\int_0^L q_{xx} u_x u \; dx + \int_0^L q_x u_{xx} u \; dx \right) \right\} dt;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_4 &:= \int_0^T \int_0^L quv_{xxx} \; dx \; dt = \int_0^T \left\{ (quv_{xx})|_0^L - \int_0^L (qu)_x v_{xx} \; dx \right\} dt \\
&= \int_0^T \left\{ -\int_0^L q_x uv_{xx} \; dx - \int_0^L qu_x v_{xx} \; dx \right\} dt \\
&= \int_0^T \left\{ \int_0^L q_{xx} uv_x \; dx + \int_0^L q_x u_x v_x \; dx - \int_0^L qu_x v_{xx} \; dx \right\} dt \\
&= \int_0^T \left\{ \int_0^L q_{xx} uv_x \; dx + 2 \int_0^L q_x u_x v_x \; dx + \int_0^L qu_{xx} v_x \; dx - (qu_x v_x)|_0^L \right\} dt;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_5 &:= \int_0^T \int_0^L quvv_x \; dx \; dt = \int_0^T \left\{ (quv^2)|_0^L - \int_0^L (quv)_x v \; dx \right\} dt \\
&= \int_0^T \left\{ -\int_0^L q_x uv^2 \; dx - \int_0^L qu_x v^2 \; dx - \int_0^L quv_x v \; dx \right\} dt \\
&= -\frac{1}{2} \int_0^T \left\{ \int_0^L q_x uv^2 \; dx + \int_0^L qu_x v^2 \; dx \right\} dt;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_6 &:= \int_0^T \int_0^L qu(uv)_x \; dx \; dt = \int_0^T \left\{ \int_0^L quu_x v \; dx + \int_0^L qu^2 v_x \; dx \right\} dt \\
&= \int_0^T \left\{ (qu^2 v)|_0^L - \int_0^L (quv)_x u \; dx + \int_0^L qu^2 v_x \; dx \right\} dt \\
&= \frac{1}{2} \int_0^T \left\{ \int_0^L qu^2 v_x \; dx - \int_0^L q_x u^2 v \; dx \right\} dt;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_{15} &:= \int_0^T \int_0^L pvv_x \; dx \; dt = \int_0^T \left\{ (pv^2)|_0^L - \int_0^L (pv)_x v \; dx \right\} dt \\
&= \int_0^T \left\{ - \int_0^L pxv^2 \; dx - \int_0^L pvv_x \; dx \right\} dt \\
&= -\frac{1}{2} \int_0^T \int_0^L p_x v^2 \; dx \; dt,
\end{aligned}$$

a menos da substituição de q por p e da troca entre u e v, a obtenção das demais identidades são análogas, assim temos,

$$I_9 := \int_0^T \int_0^L pvv_t \; dx \; dt = \frac{1}{2} \int_0^L \left\{ (pv^2)|_0^T - \int_0^T p_t v^2 \; dt \right\} dx;$$

$$I_{10} := \int_0^T \int_0^L pva(v) v_x \; dx \; dt = - \int_0^T \int_0^L p_x \tilde{J}(v) \; dx \; dt;$$

$$\begin{aligned}
I_{11} &:= \int_0^T \int_0^L pvv_{xxx} \; dx \; dt \\
&= \frac{1}{2} \int_0^T \left\{ -(pv_x^2)|_0^L - \int_0^L p_{xxx} v^2 \; dx - 3 \left(\int_0^L p_{xx} v_x v \; dx + \int_0^L p_x v_{xx} v \; dx \right) \right\} dt;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_{12} &:= \int_0^T \int_0^L pvu_{xxx} \; dx \; dt \\
&= \int_0^T \left\{ \int_0^L p_{xx} v u_x \; dx + 2 \int_0^L p_x v_x u_x \; dx + \int_0^L pv_{xx} u_x \; dx - (pv_x u_x)|_0^L \right\} dt;
\end{aligned}$$

$$I_{13} \;:=\; \int_0^T\int_0^L pvuu_x\ dx\ dt = -\frac{1}{2}\int_0^T\left\{\int_0^L p_x vu^2\ dx + \int_0^L pv_x u^2\ dx\right\}dt;$$

$$I_{14} \;:=\; \int_0^T\int_0^L pv(uv)_x\ dx\ dt = \frac{1}{2}\int_0^T\left\{\int_0^L pv^2u_x\ dx - \int_0^L p_x v^2 u\ dx\right\}dt.$$

A seguir analisaremos dois casos:

1º Caso: $q \equiv p \equiv 1$.

Substituindo as identidades I_1 à I_{15} na equação (12), obtemos,

$$\begin{aligned} 0 \;=\; & \frac{b_2}{2}\|u(\,\cdot\,,T)\|^2_{L^2(0,L)} - \frac{b_2}{2}\|u^0\|^2_{L^2(0,L)} + \frac{b_1}{2}\|v(\,\cdot\,,T)\|^2_{L^2(0,L)} - \frac{b_1}{2}\|v^0\|^2_{L^2(0,L)} \\ & + \int_0^T\left\{\frac{b_2}{2}u_x^2(0,t) + b_2a_3u_x(0,t)v_x(0,t) + \frac{1}{2}v_x^2(0,t) + \int_0^L b(x)\left[b_2u^2+v^2\right]dx\right\}dt. \end{aligned}$$

Multiplicando a equação anterior por $\dfrac{2}{b_1}$ e completando quadrado no termo da 2ª linha, obtemos,

$$\begin{aligned} \|(u^0,v^0)\|^2_X \;=\; & \|(u(\,\cdot\,,T),v(\,\cdot\,,T))\|^2_X + \frac{2}{b_1}\int_0^T\int_0^L b(x)[b_2u^2+v^2]dx\ dt \\ & + \frac{1}{b_1}\int_0^T\left\{\left[\sqrt{b_2}u_x(0,t) + \sqrt{a_3^2b_2}v_x(0,t)\right]^2 + (1-a_3^2b_2)v_x^2(0,t)\right\}dt. \end{aligned}$$

2º Caso: $q \equiv p \equiv x$, para $x \in [0,L]$.

Defina,

$$\begin{aligned} G \;:=\; & 2a_1b_2\int_0^T\int_0^L uv^2\ dx\ dt + 2a_2b_2\int_0^T\int_0^L vu^2\ dx\ dt \\ & + 2b_2\int_0^T\int_0^L \tilde{J}(u)\ dx\ dt + 2\int_0^T\int_0^L \tilde{J}(v)\ dx\ dt \\ :=\; & \sum_{i=1}^4 G_i, \end{aligned}$$

respectivamente.

Substituindo as identidades de I_1 à I_{15} na equação (12), e multiplicando por $\dfrac{2}{b_1}$, obtemos a equação abaixo,

$$
\begin{aligned}
&\int_0^T \int_0^L \left\{ \frac{3b_2}{b_1}u_x^2 + \frac{6b_2a_3}{b_1}u_xv_x + \frac{3}{b_1}v_x^2 \right\} dx\ dt \\
&+ \int_0^L x \left\{ \frac{b_2}{b_1}u^2(x,T) + v^2(x,T) + b(x) \int_0^T \left(\frac{b_2}{b_1}u^2 + v^2 \right) dt \right\} dx \\
&= \frac{r}{b_1} \int_0^T \int_0^L v^2\ dx\ dt + \int_0^L x \left(\frac{b_2}{b_1}(u^0)^2 + (v^0)^2 \right) dx + \frac{G}{b_1},
\end{aligned}
$$

observe que G reúne os termos não-lineares do sistema, que aparecem após as substituições. Por outro lado, $0 \leqslant x \leqslant L$, logo

$$
\begin{aligned}
&\int_0^T \int_0^L \left\{ \frac{3b_2}{b_1}u_x^2 + \frac{6b_2a_3}{b_1}u_xv_x + \frac{3}{b_1}v_x^2 \right\} dx\ dt \\
&\leqslant \int_0^T\int_0^L\left\{\frac{3b_2}{b_1}u_x^2+\frac{6b_2a_3}{b_1}u_xv_x+\frac{3}{b_1}v_x^2\right\}dxdt+\int_0^L x\left\{\frac{b_2}{b_1}u^2(x,T)+v^2(x,T)+b(x)\int_0^T\left(\frac{b_2}{b_1}u^2+v^2\right)dt\right\}dx \\
&= \frac{r}{b_1} \int_0^T \int_0^L v^2\ dx\ dt + \int_0^L x \left(\frac{b_2}{b_1}(u^0)^2 + (v^0)^2 \right)\ dx + \frac{G}{b_1} \\
&\leqslant \frac{r}{b_1} \int_0^T \int_0^L \left(\frac{b_2}{b_1}u^2 + v^2 \right)\ dx\ dt + L \int_0^L \left(\frac{b_2}{b_1}(u^0)^2 + (v^0)^2 \right)\ dx + \frac{G}{b_1} \\
&\leqslant \left(\frac{rT + b_1L}{b_1} \right) \|(u^0, v^0)\|_X^2 + \frac{G}{b_1}.
\end{aligned}
$$

Escolha $\varepsilon > 0$ tal que $0 < \sqrt{a_3^2b_2} < \varepsilon < 1$. Note que,

$$
2a_3b_2u_xv_x = 2(\varepsilon\sqrt{b_2}u_x) \left(\frac{1}{\varepsilon}\sqrt{a_3^2b_2}v_x \right) \leqslant -\varepsilon^2b_2u_x^2 - \frac{1}{\varepsilon^2}a_3^2b_2v_x^2,
$$

assim, substituindo a expressão acima na desigualdade anterior, obtemos

$$
\begin{aligned}
&\frac{3b_2(1-\varepsilon^2)}{b_1} \int_0^T \int_0^L u_x^2\ dx\ dt + \frac{3}{b_1} \left(1 - \frac{a_3^2b_2}{\varepsilon^2} \right) \int_0^T \int_0^L v_x^2\ dx\ dt \\
&\leqslant \left(\frac{rT + b_1L}{b_1} \right) \|(u^0, v^0)\|_X^2 + \frac{G}{b_1}.
\end{aligned}
$$

Por fim, basta multiplicar por b_1, que é positivo, obtendo

$$
\begin{aligned}
&3b_2(1-\varepsilon^2) \int_0^T \int_0^L u_x^2\ dx\ dt + 3 \left(1 - \frac{a_3^2b_2}{\varepsilon^2} \right) \int_0^T \int_0^L v_x^2\ dx\ dt \\
&\leqslant (rT + b_1L)\|(u^0, v^0)\|_X^2 + G.
\end{aligned} \tag{13}
$$

A partir de agora precisamos estimar os termos não-lineares reunidos em G. Lembre que para alguma constante $C > 0$ e $0 \leqslant p \leqslant 4$ temos $|a(x)| \leqslant C(1 + |x|^p)$, para todo $x \in \mathbb{R}$, com isso temos que

$$|\tilde{J}(u)| \leqslant C\left(\frac{|u|^2}{2}+\frac{|u|^{p+2}}{2}\right).$$

Daí,

$$\begin{aligned}
\left|\frac{G_3}{2b_2}\right| &:= \left|\int_0^T\int_0^L \tilde{J}(u)\ dx\ dt\right| \leqslant C\int_0^T\int_0^L\left(\frac{|u|^2}{2}+\frac{|u|^{p+2}}{p+2}\right)\ dx\ dt\\
&\leqslant C\int_0^T\left\{\frac{b_2}{b_1}\int_0^L|u|^2\ dx+\int_0^L|v|^2\ dx+\left(\int_0^L|u|^2\ dx\right)\|u\|^p_{L^\infty(0,L)}\right\}dt\\
&\leqslant C\left\{\int_0^T\|u(\,\cdot\,,t),v(\,\cdot\,,t)\|^2_X\ dt+\int_0^T\|u\|^2_{L^2(0,L)}\|u\|^p_{L^\infty(0,L)}\ dt\right\}.
\end{aligned}$$

Usando o Lema 2.6.5 (desigualdade de Gagliardo-Nirenberg) e a equação (10), segue que

$$\left|\frac{G_3}{2b_2}\right| \leqslant C\left\{\int_0^T\|(u^0,v^0)\|^2_X\ dt+\tilde{C}\int_0^T\|u\|^2_{L^2(0,L)}\|u\|^{\frac{p}{2}}_{L^2(0,L)}\|u_x\|^{\frac{p}{2}}_{L^2(0,L)}\ dt\right\}.$$

Do Lema 2.6.2 (desigualdade de Holder), temos

$$\left|\frac{G_3}{2b_2}\right| \leqslant C\left\{T\|(u^0,v^0)\|^2_X+\left[\int_0^T\|u\|^{r\left(\frac{4+p}{2}\right)}_{L^2(0,L)}\ dt\right]^{\frac{1}{r}}\left[\int_0^T\|u_x\|^{\frac{p}{2}s}_{L^2(0,L)}\ dt\right]^{\frac{1}{s}}\right\},$$

onde $\dfrac{1}{r}+\dfrac{1}{s}=1$. Escolha $s=\dfrac{4}{p}$ e $r=\dfrac{4}{4-p}$, daí

$$\left|\frac{G_3}{2b_2}\right| \leqslant C\left\{T\|(u^0,v^0)\|^2_X+T^{\frac{4-p}{4}}\|(u^0,v^0)\|^{\frac{4+p}{2}}_X\|u_x\|^{\frac{p}{2}}_{L^2(0,T;L^2(0,L))}\right\}.$$

Tomando $\delta>0$ e aplicando o Lema 2.6.1 (desigualdade de Young), obtemos

$$\begin{aligned}
\left|\frac{G_3}{2b_2}\right| &\leqslant CT\|(u^0,v^0\|^2_X+\left(\frac{CT^{\frac{4-p}{4}}}{\left(\frac{6\lambda}{p}\right)^{\frac{1}{s}}}\|(u^0,v^0)\|^{\frac{4+p}{2}}_X\right)\left(\left(\frac{6\lambda}{p}\right)^{\frac{1}{s}}\|u_x\|^{\frac{p}{2}}_{L^2(0,T;L^2(0,L))}\right)\\
&\leqslant CT\|(u^0,v^0)\|^2_X+\frac{\left(\frac{CT^{\frac{4-p}{4}}}{\left(\frac{6\lambda}{p}\right)^{\frac{1}{s}}}\|(u^0,v^0\|^{\frac{4+p}{2}}_X\right)^r}{r}+\frac{\left(\left(\frac{6\lambda}{p}\right)^{\frac{1}{s}}\|u_x\|^{\frac{p}{2}}_{L^2(0,T;L^2(0,L))}\right)^s}{s},
\end{aligned}$$

onde $\dfrac{1}{r}+\dfrac{1}{s}=1$. Escolhendo $s=\dfrac{4}{p}$ e $r=\dfrac{4}{4-p}$, temos que

$$\left|\frac{G_3}{2b_2}\right| \leqslant C\left\{T\|(u^0,v^0)\|^2_X+\frac{T}{\lambda^{\frac{p}{4-p}}}\|(u^0,v^0)\|^{\frac{8+2p}{4-p}}_X\right\}+\frac{3\lambda}{2}\|u_x\|^2_{L^2(0,T;L^2(0,L))},$$

onde C é uma constante positiva. Analogamente, obtemos

$$\begin{aligned}\left|\frac{G_4}{2}\right| &:= \left|\int_0^T\int_0^L \tilde{J}(v)\ dx\ dt\right|\\ &\leqslant C\left\{T\|(u^0,v^0)\|_X^2 + \frac{T}{\lambda^{\frac{p}{4-p}}}\|(u^0,v^0)\|_X^{\frac{8+2p}{4-p}}\right\} + \frac{3\lambda}{2}\|v_x\|^2_{L^2(0,T;L^2(0,L))}.\end{aligned}$$

Vamos analisar agora o seguinte termo não-linear,

$$\left|\frac{G_1}{2a_1b_2}\right| := \left|\int_0^T\int_0^L uv^2\ dx\ dt\right| \leqslant \int_0^T\int_0^L\left(\frac{1}{2}(u^2+v^4)\right) dx\ dt.$$

Usando os Lemas, 2.6.1, 2.6.2 e 2.6.5, obtemos

$$\left|\frac{G_1}{2a_1b_2}\right| \leqslant C\left\{T\|(u^0,v^0)\|_X^2 + \frac{T}{\lambda}\|(u^0,v^0)\|_X^6\right\} + \frac{3\lambda}{2|a_1|b_2}\|v_x\|^2_{L^2(0,T;L^2(0,L))}.$$

De forma análoga,

$$\begin{aligned}\left|\frac{G_2}{2a_2b_2}\right| &= \left|\int_0^T\int_0^L vu^2\ dx\ dt\right|\\ &\leqslant C\left\{T\|(u^0,v^0)\|_X^2 + \frac{T}{\lambda}\|(u^0,v^0)\|_X^6\right\} + \frac{3\lambda}{2|a_2|}\|u_x\|^2_{L^2(0,T;L^2(0,L))}.\end{aligned}$$

Assim, temos que

$$\begin{aligned}|G| &\leqslant |G_1|+|G_2|+|G_3|+|G_4|\\ &\leqslant C\left\{T\|(u^0,v^0)\|_X^2 + \frac{T}{\lambda}\|(u^0,v^0)\|_X^6 + \frac{T}{\lambda^{\frac{p}{4-p}}}\|(u^0,v^0)\|_X^{\frac{8+2p}{4-p}}\right\}\\ &\quad + 3b_2\left[2\lambda\|u_x\|^2_{L^2(0,T;L^2(0,L))}\right] + 3\left[2\lambda\|v_x\|^2_{L^2(0,T;L^2(0,L))}\right].\end{aligned} \tag{14}$$

Combinando as estimativas (13) e (14), vemos que

$$\begin{aligned}&3b_2(1-\varepsilon^2-2\lambda)\|u_x\|^2_{L^2(0,T;L^2(0,L))} + 3\left(1-\frac{a_3^2b_2}{\varepsilon^2}-2\lambda\right)\|v_x\|^2_{L^2(0,T;L^2(0,L))}\\ &\leqslant C\left\{(1+T)\|(u^0,v^0)\|_X^2 + \frac{T}{\lambda}\|(u^0,v^0)\|_X^6 + \frac{T}{\lambda^{\frac{p}{4-p}}}\|(u^0,v^0)\|_X^{\frac{8+2p}{4-p}}\right\},\end{aligned}$$

desde que, dado $\varepsilon > 0$, escolha $\lambda > 0$, tal que

$$(1-\varepsilon^2-2\lambda) \geqslant 0 \ \text{ e } \ \left(1-\frac{a_3^2b_2}{\varepsilon^2}-2\lambda\right) \geqslant 0.$$

Agora defina, $m = \min\left\{(1-\varepsilon^2-2\lambda), 3\left(1-\dfrac{a_3^2 b_2}{\varepsilon^2}-2\lambda\right)\right\}$. Pelo Lema 2.6.4 (desigualdade de Poincaré), existe $\tilde{C} > 0$ tal que

$$\begin{aligned}\tilde{C}\|(u,v)\|^2_{L^2(0,T;[H_0^1(0,L)]^2)} &\leqslant \int_0^T \|u_x\|^2_{L^2(0,L)} + \|v_x\|^2_{L^2(0,L)}\, dt \\ &\leqslant \frac{C}{m}\left\{(1+T)\|(u^0,v^0)\|_X^2 + \frac{T}{\lambda}\|(u^0,v^0)\|_X^6 + \frac{T}{\lambda^{\frac{p}{4-p}}}\|(u^0,v^0)\|_X^{\frac{8+2p}{4-p}}\right\}\end{aligned}$$

ou seja,

$$\|(u,v)\|^2_{L^2(0,T;[H_0^1(0,L)]^2)} \leqslant C\left\{(1+T)\|(u^0,v^0)\|_X^2 + T\|(u^0,v^0)\|_X^6 + T\|(u^0,v^0)\|_X^{\frac{8+2p}{4-p}}\right\}$$

■

Na sequência, provaremos um resultado de boa colocação que constitui o ingrediente básico para a obtenção do resultado principal desta seção.

Lema 3.2.4. *Seja $a = a(x)$ uma função C^1 e $1 \leqslant p < 2$ tal que*

$$|a(x)| \leqslant C(1+|x|^p) \text{ e } |a'(x)| \leqslant C(1+|x|^{p-1}),\ \forall\, x \in \mathbb{R},$$

onde $C > 0$ é uma constante. Então, para $T > 0$ e $\mathcal{U}^0 \in X$ o sistema (1)–(3) tem uma única solução global,

$$\mathcal{U} \in C(\mathbb{R}^+, X) \cap L^2_{loc}(\mathbb{R}^+; [H_0^1(0,L)]^2).$$

Demonstração:

Recordando o caso linear, veja que para qualquer $\mathcal{U}^0 \in D(\mathcal{A})$, tem-se que

$$\mathcal{U} \in C([0,T]; X) \cap L^2(0,T; [H^1(0,L)]^2),$$

segue que,

$$\|\mathcal{U}\|_{Y_{0,T}} = \|\mathcal{U}\|_{C([0,T];X)} + \|\mathcal{U}\|_{L^2(0,T;[H^1(0,L)]^2)} \leqslant C\|\mathcal{U}^0\|_X.$$

Além disso, com cálculos semelhantes aos realizados na demonstração do Lema 3.2.3, obtemos para qualquer $f = (f_1, f_2) \in C^1([0,T]; X)$, a solução $\mathcal{U}$ do sistema (9) satisfazendo,

$$\|\mathcal{U}\|_{Y_{0,T}} \leqslant C(T)\left\{\|\mathcal{U}^0\|_X + \|f\|_{L^1(0,T;X)}\right\}.$$

Assim, para $\mathcal{U}^0 \in X$ e $f \in L^1(0,T;X)$ através de um argumento de densidade garantimos que $\mathcal{U} \in C([0,T]; X)$.

Inicialmente mostraremos a existência local, para isso faremos uso do argumento de ponto fixo. Lembre que, em (9), definimos para $\mathcal{U} = (u, v)$,

$$f(\mathcal{U}) := \begin{pmatrix} -a(u)u_x - vv_x - a_2(uv)_x - b(x)u \\ -\dfrac{a(v)}{b_1}v_x - \dfrac{b_2a_2}{b_1}uu_x - \dfrac{b_2a_1}{b_1}(uv)_x - \dfrac{b(x)}{b_1}v \end{pmatrix},$$

assim usando a fórmula de variações dos parâmetros obtemos a solução generalizada,

$$\mathcal{U}(t) = S(t)\mathcal{U}^0 + \int_0^t S(t-s)f(\mathcal{U}(s))\ ds,$$

onde $\{S(t)\}_{t\geqslant 0}$ é o semigrupo fortemente contínuo obtido no Teorema 3.1.2 para o caso linear.

Dados $R > 0$ e $\theta > 0$ defina,

$$B_{R,\theta} = \left\{\mathcal{U} \in \left[Y_{0,\theta} \cap L^2(0,T; H_0^1(0,L))\right]^2; \|\mathcal{U}\|_{Y_{0,\theta}^2} \leqslant R\right\}.$$

Fixado $\mathcal{U}^0 \in X$ defina a seguinte aplicação

$$P(\mathcal{U}) = S(\theta)\mathcal{U}^0 + \int_0^\theta S(\theta - s)f(\mathcal{U}(s))\ ds. \tag{15}$$

Mostremos que

(i) $P : B_{R,\theta} \to B_{R,\theta}$;

(ii) P é uma contração.

Para mostrarmos que P leva bola em bola, tome $(u,v) \in B_{R,\theta} \subset \left[Y_{0,\theta} \cap L^2(0,T; H_0^1(0,L))\right]^2$ e usando os Lemas 3.2.1 e 3.2.2, obtemos

$$\begin{aligned}
\|P\| \ &:= \|P(u,v)\|_{Y_{0,\theta}^2} \leqslant C\|(u^0,v^0)\|_X + \tilde{C}\int_0^\theta \|f(u,v)\|_X\ ds \\
&\leqslant C\|(u^0,v^0)\|_X + \tilde{C}\int_0^\theta \left\{\|a(u)u_x\|_{L^2(0,L)} + \|a(v)v_x\|_{L^2(0,L)} + \|vv_x\|_{L^2(0,L)}\right. \\
&\quad \left. + \|uu_x\|_{L^2(0,L)} + 2\|u_xv\|_{L^2(0,L)} + 2\|uv_x\|_{L^2(0,L)} + \|bu\|_{L^2(0,L)} + \|bv\|_{L^2(0,L)}\right\}\ ds \\
&\leqslant C\left\{\|(u^0,v^0)\|_X + \theta^{\frac{4-p}{4}}\|u\|_{Y_{0,\theta}}^{p+1} + \theta^{\frac{4-p}{4}}\|v\|_{Y_{0,\theta}}^{p+1} + \theta^{\frac{1}{4}}\|u\|_{Y_{0,\theta}}^2 + \theta^{\frac{1}{4}}\|v\|_{Y_{0,\theta}}^2\right. \\
&\quad \left. + 2\theta^{\frac{1}{4}}\|u\|_{Y_{0,\theta}}\|v\|_{Y_{0,\theta}} + \theta^{\frac{3}{4}}\|b\|_{L^2(0,L)}\left(\|u\|_{Y_{0,\theta}} + \|v\|_{Y_{0,\theta}}\right)\right\} \\
&\leqslant C\left\{\|(u^0,v^0)\|_X + \theta^{\frac{4-p}{4}}\left(\|u\|_{Y_{0,\theta}}^{p+1} + \|v\|_{Y_{0,\theta}}^{p+1}\right)\theta^{\frac{1}{4}}\left(\|u\|_{Y_{0,\theta}} + \|v\|_{Y_{0,\theta}}\right)^2\right. \\
&\quad \left. + \theta^{\frac{3}{4}}\|b\|_{L^2(0,L)}\left(\|u\|_{Y_{0,\theta}} + \|v\|_{Y_{0,\theta}}\right)\right\} \\
&\leqslant C\left\{\|(u^0,v^0)\|_X + \theta^{\frac{4-p}{4}}R^{p+1} + \theta^{\frac{1}{4}}R^2 + \theta^{\frac{3}{4}}\|b\|_{L^2(0,L)}R\right\},
\end{aligned}$$

onde $\|(u,v)\|_{Y^2_{0,\theta}} \leqslant R$, pois $(u,v) \in B_{R,\theta}$.

Escolha $R = 2C\|(u^0,v^0)\|_X$ e θ suficientemente pequeno tal que

$$C\left\{\theta^{\frac{4-p}{4}}R^p + \theta^{\frac{1}{4}}R + \theta^{\frac{3}{4}}\|b\|_{L^2(0,L)}\right\} \leqslant \frac{1}{2}.$$

Com isso obtemos

$$\begin{aligned}\|P(u,v)\|_{Y^2_{0,\theta}} &\leqslant C\|(u^0,v^0)\|_X + CR\left\{\theta^{\frac{4-p}{4}}R^p + \theta^{\frac{1}{4}}R + \theta^{\frac{3}{4}}\|b\|_{L^2(0,L)}\right\}\\ &\leqslant \frac{R}{2} + \frac{R}{2} = R,\end{aligned}$$

logo $P(u,v) \in B_{R,\theta}$, como queríamos.

Agora mostraremos que P é uma contração. Tome $(u,v),(\gamma,\varphi) \in B_{R,\theta}$ e note que,

$$P(u,v) - P(\gamma,\varphi) = S(t)(\mathcal{U}^0 - \mathcal{U}^0) - \int_0^t S(t-s)\left[f(u,v) - f(\gamma,\varphi)\right]\, ds.$$

Adicionando e subtraindo termos convenientemente, obtemos

$$\begin{aligned}&\|P(u,v) - P(\gamma,\varphi)\|_{Y^2_{0,\theta}} \leqslant C\int_0^\theta \|f(u,v) - f(\gamma,\varphi)\|_X\, ds\\ &\leqslant C\int_0^\theta \|\{[(a(u)-a(\gamma)\gamma_x + v(v-\varphi)_x + (v-\varphi)\varphi_x + (u-\gamma)_x v + (u-\gamma)v_x + (v-\varphi)\gamma_x\\ &\quad + (v-\varphi)_x\gamma + b(u-\gamma)]\ ,\ [(v-\varphi)_x a(v) + (a(v)-a(\varphi))\varphi_x + (u-\gamma)_x u + \gamma_x(u-\gamma)\\ &\quad +\ v(u-\gamma)_x + (u-\gamma)v_x + \gamma_x(v-\varphi) + \gamma(v-\varphi)_x + b(v-\varphi)]\}\|_X\ ds.\end{aligned}$$

Daí, segue que

$$\begin{aligned}&\|P(u,v) - P(\gamma,\varphi)\|_{Y^2_{0,\theta}} \leqslant C\int_0^\theta \left\{\|b(u-\gamma)\|_{L^2(0,L)} + \|b(v-\varphi)\|_{L^2(0,L)}\right.\\ &+ \|a(u)(u-\gamma)_x\|_{L^2(0,L)} + \|(a(u)-a(\gamma))\gamma_x\|_{L^2(0,L)} + \|a(v)(v-\varphi)_x\|_{L^2(0,L)}\\ &+ \|(a(v)-a(\varphi))\varphi_x\|_{L^2(0,L)} + \|v(v-\varphi)_x\|_{L^2(0,L)} + \|\varphi_x(v-\varphi)\|_{L^2(0,L)} + \|u(u-\gamma)_x\|_{L^2(0,L)}\\ &+ \|\gamma_x(u-\gamma)\|_{L^2(0,L)} + 2\|v(u-\gamma)_x\|_{L^2(0,L)} + 2\|v_x(u-\gamma)\|_{L^2(0,L)} + 2\|\gamma_x(v-\varphi)\|_{L^2(0,L)}\\ &\left.+ 2\|\gamma(v-\varphi)_x\|_{L^2(0,L)}\right\} ds.\end{aligned}$$

Antes de continuarmos com a estimativa, observe que

$$\begin{aligned}&\int_0^\theta \|\gamma_x(a(u)-a(\gamma))\|_{L^2(0,L)}\ ds \leqslant C\int_0^\theta \left\|\left(1 + |u|^{p-1} + |\gamma|^{p-1}\right)(u-\gamma)\gamma_x\right\|_{L^2(0,L)}\ ds\\ &\leqslant C\theta^{\frac{1}{4}}\|\gamma\|_{Y_{0,\theta}}\|(u-\gamma)\|_{Y_{0,\theta}} + C\theta^{\frac{3-p}{4}}\left(\|u\|^{p-1}_{Y_{0,\theta}}\|\gamma\|_{Y_{0,\theta}} + \|\gamma\|^p_{Y_{0,\theta}}\right)\|(u-\gamma)\|_{Y_{0,\theta}}.\end{aligned}$$

Assim, pela desigualdade anterior juntamente com o Lemas 3.2.1 e 3.2.2, temos

$$\begin{aligned}
&\|P(u,v)-P(\gamma,\varphi)\|_{Y^2_{0,\theta}} \leqslant C\Big\{\theta^{\frac{3}{4}}\|b\|_{L^2(0,L)}\left(\|u-\gamma\|_{Y_{0,\theta}}+\|v-\varphi\|_{Y_{0,\theta}}\right)\\
&+\theta^{\frac{1}{4}}\|v-\varphi\|_{Y_{0,\theta}}\left(\|v\|_{Y_{0,\theta}}+\|\varphi\|_{Y_{0,\theta}}+4\,\|\gamma\|_{Y_{0,\theta}}\right)+\theta^{\frac{1}{4}}\|v-\varphi\|_{Y_{0,\theta}}\|\varphi\|_{Y_{0,\theta}}\\
&+\theta^{\frac{1}{4}}\|u-\gamma\|_{Y_{0,\theta}}\left(\|u\|_{Y_{0,\theta}}+\|\gamma\|_{Y_{0,\theta}}+4\,\|v\|_{Y_{0,\theta}}\right)+\theta^{\frac{1}{4}}\|u-\gamma\|_{Y_{0,\theta}}\|\gamma\|_{Y_{0,\theta}}\\
&+\theta^{\frac{4-p}{4}}\|u\|^p_{Y_{0,\theta}}\|u-\gamma\|_{Y_{0,\theta}}+\theta^{\frac{4-p}{4}}\|v\|^p_{Y_{0,\theta}}\|v-\varphi\|_{Y_{0,\theta}}\\
&+\theta^{\frac{3-p}{4}}\|u-\gamma\|_{Y_{0,\theta}}\left(\|u\|^{p-1}_{Y_{0,\theta}}\|\gamma\|_{Y_{0,\theta}}+\|\gamma\|^p_{Y_{0,\theta}}\right)\\
&+\theta^{\frac{3-p}{4}}\|v-\varphi\|_{Y_{0,\theta}}\left(\|v\|^{p-1}_{Y_{0,\theta}}\|\varphi\|_{Y_{0,\theta}}+\|\varphi\|^p_{Y_{0,\theta}}\right)\Big\}.
\end{aligned}$$

Segue daí que,

$$\begin{aligned}
\|P(u,v)-P(\gamma,\varphi)\|_{Y^2_{0,\theta}} \leqslant\ & C\Big\{\theta^{\frac{3}{4}}\|b\|_{L^2(0,L)}\|(u,v)-(\gamma,\varphi)\|_{Y^2_{0,\theta}}+\theta^{\frac{1}{4}}R\|(u,v)-(\gamma,\varphi)\|_{Y^2_{0,\theta}}\\
&+\theta^{\frac{3-p}{4}}R^p\|(u,v)-(\gamma,\varphi)\|_{Y^2_{0,\theta}}+\theta^{\frac{4-p}{4}}R^p\|(u,v)-(\gamma,\varphi)\|_{Y^2_{0,\theta}}\Big\},
\end{aligned}$$

onde $\|(u,v)\|_{Y^2_{0,\theta}} \leqslant R$, para todo $(u,v) \in B_{R,\theta}$. Escolhendo θ tal que

$$C\left\{\theta^{\frac{3}{4}}\|b\|_{L^2(0,L)}+\theta^{\frac{1}{4}}R+\theta^{\frac{3-p}{4}}R^p+\theta^{\frac{4-p}{4}}R^p\right\} \leqslant \frac{1}{2},$$

temos que

$$\|P(u,v)-P(\gamma,\varphi)\|_{Y^2_{0,\theta}} \leqslant \frac{1}{2}\|(u,v)-(\gamma,\varphi)\|_{Y^2_{0,\theta}}.$$

Logo pelo Teorema 2.8.2 (ponto fixo de Banach) a equação integral (15) tem única solução. Concluímos assim a existência e unicidade local. A existência global decorre de estimativas globais a priori, análoga as obtidas no Lema 3.2.3 assumindo $1 \leqslant p < 2$. ∎

Os mesmos argumentos usados na prova do Lema 3.2.4 e do Corolário 3.1.4 levam ao seguinte resultado de boa colocação local:

Corolário 3.2.5. *Sejam $b \in H^1(0,L)$ e $a = a(x)$ uma função de classe C^2 tal que,*

$$|a(x)| \leqslant C(1+|x|^p),\ \ |a'(x)| \leqslant C(1+|x|^{p-1}),\ \ |a''(x)| \leqslant C(1+|x|^{p-2}),\ \ \forall\ x \in \mathbb{R},$$

onde C é uma constante positiva e $p \geqslant 2$. Então, para qualquer $(u^0,v^0) \in [H^1_0(0,L)]^2$, existe uma $T^* > 0$, dependendo somente de $\|(u^0,v^0)\|_{[H^1_0(0,L)]^2}$ tal que o sistema (1)-(3) admite uma única solução $(u,v) \in L^\infty(0,T^*;[H^1_0(0,L)]^2)$.

Demonstração:

As ideias envolvidas na prova, segue de perto os argumentos anteriores e aqueles apresentados nas provas dos Lemas 2.11 e 2.12 de [27]. A extensão de tal resultado para o modelo acima considerado foi provado na Proposição 5.3. de [3] (ver também observação 5.5 em [4]). Portanto, omitiremos detalhes. ■

Observação. Para obter a boa colocação global é preciso estabelecer as estimativas globais a priori no espaço $H^1(0,L)$, correspondentes, a qual não conseguimos provar com as técnicas empregadas nesse trabalho.

O próximo resultado é o principal desta seção, e provaremos usando o Lema 3.2.4.

Teorema 3.2.6. *Sejam $a = a(x)$ uma função de classe C^2, e $2 \leqslant p < 4$ tal que*

$$|a(x)| \leqslant C(1+|x|^p),\ |a'(x)| \leqslant C(1+|x|^{p-1}),\ |a''(x)| \leqslant C(1+|x|^{p-2}),\ \forall\ x \in \mathbb{R},$$

onde $C > 0$ é uma constante. Então, para qualquer $\mathcal{U}^0 \in X$, o sistema $(1)-(3)$ admite pelo menos uma solução

$$\mathcal{U} \in C_\omega(\mathbb{R}; X) \cap L^2_{loc}(\mathbb{R}^+; [H^1(0,L)]^2).$$

Demonstração:

Consideremos a sequência $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em $C_0^\infty(\mathbb{R})$ tal que

$$\begin{aligned} &(i) \quad a_n(u) \to a(u) \text{ uniformemente em cada conjunto compacto de } \mathbb{R}, \\ &(ii) \quad |a_n^{(j)}(u)| \leqslant C(1+|u|^{p-j}),\ \forall\ n \geqslant 0,\ \forall\ u \in \mathbb{R}, C > 0, j = 0,1,2. \end{aligned} \tag{16}$$

Pelo corolário 3.2.5, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe uma única solução satisfazendo (9) tal que

$$\mathcal{U}_n \in C(\mathbb{R}^+; X) \cap L^2_{loc}(\mathbb{R}; [H_0^1(0,L)]^2).$$

Além disso, segue do Lema 3.2.3 que

$$\mathcal{U}_n \ \text{ é limitado em }\ L^\infty(\mathbb{R}^+; X) \cap L^2_{loc}(\mathbb{R}^+; [H_0^1(0,L)]^2).$$

Logo, pelo Teorema 2.8.9 (Banach-Alaoglu) e do Teorema 2.1.19, existe uma função $\mathcal{U}$ e uma subsequência, que denotaremos pelo mesmo índice n, tal que

$$\begin{aligned} &\mathcal{U}_n \overset{*}{\rightharpoonup} \mathcal{U} \text{ fraco}^* \text{ em } L^\infty(\mathbb{R}^+; X), \\ &\mathcal{U}_n \rightharpoonup \mathcal{U} \text{ fraco em } L^2_{loc}(\mathbb{R}^+; [H_0^1(0,L)]^2). \end{aligned} \tag{17}$$

satisfazendo

$$\begin{cases} \mathcal{U}_{n,t} = \mathcal{A}(\mathcal{U}_n) + f_n(\mathcal{U}_n), & \text{em } (0,L)\times\mathbb{R}^+, \\ \mathcal{U}_n(0,t) = \mathcal{U}_n(L,t) = \mathcal{U}_{n,x}(L,t) = 0, & \text{em } \mathbb{R}^+, \\ \mathcal{U}_n(x,0) = \mathcal{U}_n^0(x), & \text{em } (0,L), \end{cases} \tag{18}$$

onde temos

$$\mathcal{A}(\mathcal{U}_n) = \begin{pmatrix} -u_{n,xxx} - a_3 v_{n,xxx} \\ -\dfrac{r}{b_1} v_{n,x} - \dfrac{b_2 a_2}{b_1} u_{n,xxx} - \dfrac{1}{b_1} v_{n,xxx} \end{pmatrix}$$

e

$$f_n(\mathcal{U}_n) = \begin{pmatrix} -a_n(u_n)u_{n,x} - v_n v_{n,x} - a_2(u_n v_n)_x - b(x)u_n \\ -\dfrac{a_n(v_n)}{b_1} v_{n,x} - \dfrac{b_2 a_2}{b_1} u_n u_{n,x} - \dfrac{b_2 a_1}{b_1}(u_n v_n)_x - \dfrac{b(x)}{b_1} v_n \end{pmatrix}.$$

O objetivo é passar o limite quando $n \to \infty$ em (18) e mostrar que $\mathcal{U}$ é solução fraca do problema. No entanto, a principal dificuldade reside no estudo dos termos não-lineares. Considere as seguintes notações,

$$J_n(u) := \int_0^u a_n(s)\, ds \quad \text{e} \quad J_n(\mathcal{U}) := (J_n(u), J_n(v)).$$

Afirmação 1: Para qualquer $T > 0$ e $\beta \in \left(1, \dfrac{6}{p+1}\right]$ a sequência $\{J_n(\mathcal{U}_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada no espaço $L^\beta(0,T;[L^\beta(0,L)]^2)$.

De fato, por (16), temos

$$|J_n(u_n)| \leqslant \int_0^{u_n} |a_n(s)|\, ds \leqslant \int_0^{u_n} C(1+|s|^p)\, ds \leqslant C(1+|u_n|^{p+1}).$$

para algum $C > 0$ constante que não depende de n. Daí, segue que

$$|J_n(u_n)|^\beta \leqslant C(1+|u_n|^{\beta(p+1)}).$$

Note ainda que $\beta(p+1) \in (\, p+1, 6\,]$, logo $\dfrac{\beta(p+1)-2}{2} \leqslant 2$. Assim combinando o Lema 3.2.3 e o Lema 2.6.5, obtemos

$$
\begin{aligned}
&\int_0^T\int_0^L |J_n(u_n)|^\beta \, dx\, dt \leqslant C\left\{TL+\int_0^T\int_0^L |u_n|^{\beta(p+1)}\, dx\, dt\right\}\\
&\leqslant C\left\{TL+\int_0^T\left[\|u_n\|_{L^\infty(0,L)}^{\beta(p+1)-2}\left(\int_0^L |u_n|^2\, dx\right)\right]\, dt\right\}\\
&\leqslant C\left\{TL+\int_0^T \|u_n\|_{L^2(0,L)}^{\frac{\beta(p+1)-2}{2}}\|u_{n,x}\|_{L^2(0,L)}^{\frac{\beta(p+1)-2}{2}}\|u_n\|_{L^2(0,L)}^2\, dt\right\}\\
&\leqslant C\left\{TL+\|u_n\|_{C(0,T;L^2(0,L))}^{\frac{\beta(p+1)}{2}+1}\int_0^T \|u_{n,x}\|_{L^2(0,L)}^{\frac{\beta(p+1)}{2}-1}\, dt\right\}\\
&\leqslant C\left\{TL+\|(u^0,v^0)\|_X^{\beta(p+1)}T\right\}\leqslant C=C(T;\|\mathcal{U}^0\|_X).
\end{aligned}
$$

Analogamente,

$$\int_0^T\int_0^L |J_n(v_n)|^\beta \, dx\, dt \leqslant C=C(T;\|\mathcal{U}^0\|_X),$$

isso completa a prova da afirmação 1.

Afirmação 2: Para qualquer $T>0$ e $\beta\in(\,1,\frac{6}{p+1}\,]$ a sequência $\{\mathcal{U}_{n,t}\}_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada em $L^\beta(0,T;[H^{-2}(0,L)]^2)$.

Com efeito, note que $2\leqslant p<4$ daí $1<\beta\leqslant 2$. Aplicando a Proposição 2.5.3 item (vi) e como

$$L^1(0,L)\subset L^\beta(0,L)\subset L^2(0,L)\hookrightarrow H^{-1}(0,L)\hookrightarrow H^{-2}(0,L),$$

temos que

$$
\begin{aligned}
L^2(0,T;L^1(0,L)) &\subset L^\beta(0,T;L^\beta(0,L))\\
&\subset L^\beta(0,T;L^2(0,L))\\
&\hookrightarrow L^\beta(0,T;H^{-1}(0,L))\\
&\hookrightarrow L^\beta(0,T;H^{-2}(0,L)).
\end{aligned}
$$

Agora iremos verificar que cada termo de $\mathcal{A}(\mathcal{U}_n)$ e $f_n(\mathcal{U}_n)$ são limitadas em $L^\beta(0,T;H^{-2}(0,L))$. De fato, em relação a $\mathcal{A}(\mathcal{U}_n)$, como

$$u_n,v_n\in L^2(0,T;H^1(0,L)) \;\text{ e }\; L^2(0,T;H^1(0,L))\hookrightarrow L^\beta(0,T;H^{-2}(0,L)),$$

temos que $u_{n,xxx}$, $v_{n,xxx}$ e $v_{n,x}\in L^\beta(0,T;H^{-2}(0,L))$.

Em relação a $f_n(\mathcal{U}_n)$, analisemos dois casos:

Primeiro, observemos os termos $u_n u_{n,x}$, $v_n v_{n,x}$ e $(u_n v_n)_x$. Note que,

$$\|u_n v_{n,x}\|_{L^2(0,T;L^1(0,L))} \leqslant \|u_n\|_{L^\infty(0,T;L^2(0,L))} \cdot \|v_n\|_{L^2(0,T;H^1(0,L))},$$

logo, $u_n v_{n,x} \in L^2(0,T;L^1(0,L))$ e pelas imersões acima apresentadas concluímos que

$$u_n v_{n,x} \in L^\beta(0,T;H^{-2}(0,L)).$$

Outro caso, são os termos $(a(u_n)u_{n,x}; a(v_n)v_{n,x}) = \partial_x J_n(\mathcal{U}_n)$. Note que,

$$L^\beta(0,L) \hookrightarrow H^{-1}(0,L) \hookrightarrow H^{-2}(0,L).$$

Assim, da afirmação 1, concluímos que $\partial_x J_n(\mathcal{U}_n)$ é limitada em $[L^\beta(0,T;H^{-2}(0,L))]^2$.

Por fim, notando que $\mathcal{U}_{n,t} = \mathcal{A}(\mathcal{U}_n) + f_n(\mathcal{U}_n)$, obtemos a afirmação 2.

Afirmação 3: Para $\beta \in \left(1, \dfrac{6}{p+1}\right]$ temos que $\partial_x J_n(\mathcal{U}_n) \to \partial_x J(\mathcal{U})$ em $[D'((0,L)\times\mathbb{R}^+)]^2$.

Como,

$$\begin{aligned} &\mathcal{U}_n \ \text{ é limitada em } \ L^2(0,T;[H_0^1(0,L)]^2),\\ &\mathcal{U}_{n,t} \ \text{ é limitada em } \ L^\beta(0,T;[H^{-2}(0,L)]^2), \end{aligned}$$

onde $1 < \beta \leqslant 2$, e sabendo que $[H_0^1(0,L)]^2 \underset{c}{\hookrightarrow} X \hookrightarrow [H^{-2}(0,L)]^2$, pelo Lema 2.8.8, podemos obter uma subsequência que denotaremos pelo mesmo índice n, tal que

$$\mathcal{U}_n \to \mathcal{U} \text{ em } L^2(0,T;X). \tag{19}$$

Então, de (16) e (19), temos que

$$J_n(\mathcal{U}_n) \to J(\mathcal{U}) \text{ em } (0,L)\times\mathbb{R}^+.$$

Por outro lado, da afirmação 1, podemos obter uma subsequência, se necessário, tal que

$$J_n(\mathcal{U}_n) \rightharpoonup G = (g_1, g_2) \ \text{ fraco em } \ L^\beta(0,T;[L^\beta(0,L)]^2),$$

para alguma $G \in L^\beta(0,T;[L^\beta(0,L)]^2)$. Aplicando o Teorema 2.8.3 (Ergoroff), garantimos que $J(\mathcal{U}) = G$. Dessa forma, podemos concluir que

$$J_n(\mathcal{U}_n) \to J(\mathcal{U}) \ \text{ em } \ [D'((0,L)\times\mathbb{R}^+)]^2.$$

Daí, segue que

$$\partial_x J_n(\mathcal{U}_n) \to \partial_x J(\mathcal{U}) \ \text{ em } \ [D'((0,L)\times\mathbb{R}^+)]^2.$$

De (17) e das afirmações 1, 2 e 3, obtemos

$$\begin{aligned} &\mathcal{U}_n \overset{*}{\rightharpoonup} \mathcal{U} \ \text{ em } \ L^\infty(0,T;X) \ \text{ fraco}^* \\ &\mathcal{U}_n \rightharpoonup \mathcal{U} \ \text{ em } \ L^2(0,T;[H_1^0(0,L)]^2) \ \text{ fraco} \\ &\mathcal{U}_n \to \mathcal{U} \ \text{ em } \ L^2(0,T;X) \\ &J_n(\mathcal{U}_n) \to J(\mathcal{U}) \ \text{ em } \ [D'((0,L)\times(0,T)]^2. \end{aligned} \tag{20}$$

Finalmente, combinando as convergências (20) podemos passar o limite fraco no sistema (18). No entanto, para concluir que $\mathcal{U}$ é uma solução fraca resta provar que $\mathcal{U}$ satisfaz $\mathcal{U}(x,0)=\mathcal{U}^0(x)$ e $\mathcal{U}\in C_\omega([0,T];X)$.

Com efeito, como

$$\begin{aligned} &\mathcal{U}_n \ \text{ é limitada em } \ L^\infty(0,T;X), \\ &\mathcal{U}_{n,t} \ \text{ é limitada em } \ L^\beta(0,T;[H^{-2}(0,L)]^2), \end{aligned}$$

e sabendo que $X \hookrightarrow [H^{-1}(0,L)]^2 \hookrightarrow [H^{-2}(0,L)]^2$, pelo Lema 2.8.8, temos

$$\mathcal{U}_n \to \mathcal{U} \ \text{ em } \ C([0,T];[H^{-1}(0,L)]^2).$$

Em particular,

$$\mathcal{U}^0(x) = \mathcal{U}_n(x,0) \to \mathcal{U}(x,0).$$

Além disso, como $X \hookrightarrow [H^{-1}(0,L)]^2$, pelo Lema 2.8.5, obtemos que $\mathcal{U}\in C_\omega([0,T];X)$. Portanto,

$$\mathcal{U}\in C_\omega([0,T];X)\cap L^2(0,T;[H_0^1(0,L)]^2).$$

■

4 ESTABILIZAÇÃO EXPONENCIAL

Neste capítulo, chegamos no objetivo principal do trabalho, provar o decaimento exponencial uniforme da energia $E(t)$ associada ao sistema (1)–(3). Para isso utilizaremos o argumento de "Compacidade-Unicidade", o qual reduz nosso problema a provar uma propriedade de continuação única para uma classe de soluções do sistema. Contudo, devido as não-linearidades e da falta de regularidade das soluções obtidas, faz-se necessário uma desigualdade de Carleman para que possamos derivar uma propriedade de continuação única para soluções fracas do sistema.

4.1 Uma estimativa de Carleman

Inicialmente observe que,

$$\begin{cases} \mathcal{A}(\mathcal{U}) = -\dfrac{1}{b_1}A_1\mathcal{U}_{xxx} - \dfrac{1}{b_1}A_2\mathcal{U}_x, \\ f(\mathcal{U}) = -\dfrac{1}{b_1}[B(\mathcal{U}) + C(\mathcal{U})]\mathcal{U}_x - \dfrac{1}{b_1}D\mathcal{U}, \end{cases}$$

onde,

$$\mathcal{U} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, B(\mathcal{U}) = \begin{pmatrix} b_1a_2v & b_1a_1v + a_2b_1u \\ b_2a_2u + b_2a_1v & b_2a_1u \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix},$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} b_1 & b_1a_3 \\ b_2a_3 & 1 \end{pmatrix}, C(\mathcal{U}) = \begin{pmatrix} b_1a(u) & 0 \\ 0 & a(v) \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} b_1b(x) & 0 \\ 0 & b(x) \end{pmatrix}.$$

Assim, multiplicando o sistema (1)–(3) por b_1, obtemos,

$$b_1\mathcal{U}_t + A_1\mathcal{U}_{xxx} + [A_2 + B(\mathcal{U}) + C(\mathcal{U})]\mathcal{U}_x + D\mathcal{U} = 0. \tag{21}$$

Vamos agora linearizar o sistema (21). Substitua

$$[A_2 + B(\mathcal{U}) + C(\mathcal{U})] \ \text{ por } \ B_1 = \begin{pmatrix} f_1 & f_2 \\ f_3 & f_4 \end{pmatrix},$$

onde $f_i = f_i(x,t), i = 1,2,3,4$, são funções reais. Além disso, a matriz A_1 possui dois autovalores reais, então existe uma matriz inversível $P \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$, tal que $A_1 = PQP^{-1}$, na qual Q é uma matriz diagonal dada por

$$Q = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix},$$

onde λ_1 e λ_2 são os autovalores de A_1. Portanto, fazendo a mudança de variável $\tilde{\mathcal{U}} = P^{-1}\mathcal{U}$, obtemos

$$b_1\tilde{\mathcal{U}}_t + \tilde{B}_1\tilde{\mathcal{U}}_x + Q\tilde{\mathcal{U}}_{xxx} = 0 \tag{22}$$

e é nesse sistema que vamos estabelecer a estimativa de Carleman.

Observe que a mudança de variável é feita com o intuito de simplificar o sistema, já que os termos de acoplamento passam a ser de primeira ordem, esse fato não interfere no resultado, pois valendo a propriedade de continuação para (22), também valerá para o sistema sem a mudança de variável.

Note que o sistema (22) é equivalente à

$$\mathcal{L}\,\tilde{\mathcal{U}} = 0,$$

onde $\mathcal{L}$ é da forma

$$\mathcal{L} = \begin{pmatrix} L_1 & \tilde{f}_2\partial_x \\ \tilde{f}_3\partial_x & L_2 \end{pmatrix},$$

com L_1 e L_2 dados por

$$L_1 = b_1\partial_t + \lambda_1\partial_x^3 + \tilde{f}_1\partial_x \ \text{ e } \ L_2 = b_1\partial_t + \lambda_2\partial_x^3 + \tilde{f}_4\partial_x.$$

Por simplicidade, desprezemos a notação "$\sim$", ficando claro que a partir daqui utilizaremos a equação (22).

A fim de estabelecer o resultado, considere o seguinte espaço

$$V = \{q \in L^2(0,T;H^3(0,L)) \cap H^1(0,T;H^1(0,L)); q(0,t) = q(L,t) = q_x(L,t) = q_{xx}(L,t) = 0\},$$

munido da norma

$$\|q\|_V = \left\{ \|q\|^2_{L^2(0,T;H^3(0,L))} + \|q_t\|^2_{L^2(0,T;H^1(0,L))} \right\}^{\frac{1}{2}},$$

e notando que $V \subset C([0,T]; H^2(0,L))$.

Com toda a notação anteriormente apresentada, podemos enunciar o teorema, foco principal deste capítulo. A prova é obtida seguindo os argumentos desenvolvidos em [28] e [30].

Teorema 4.1.1. *Sejam T, L, R números positivos e $f_i \in V$, tais que $\|f_i\|_V \leqslant R$, para $1 \leqslant i \leqslant 4$. Então existe uma função suave positiva ψ definida em $[0,L]$ e duas constantes $C > 0$ e $s_0 > 0$ tais que para qualquer $\Phi \in V \times V$ e $s \geqslant s_0$ temos,*

$$\int_0^T \int_0^L \left\{ \frac{s^5}{t^5(T-t)^5}|\Phi|^2 + \frac{s^3}{t^3(T-t)^3}|\Phi_x|^2 + \frac{s}{t(T-t)}|\Phi_{xx}|^2 \right\} e^{-2s\frac{\psi(x)}{t(T-t)}}\, dx\, dt$$
$$\leqslant C \int_0^T \int_0^L |\mathcal{L}\Phi|^2 e^{-2s\frac{\psi(x)}{t(T-t)}}\, dx\, dt.$$

Demonstração:

Sejam $R > 0$, e $f_i \in V$ tais que $\|f_i\|_V < R$, para $i = 1, 2, 3, 4$. Considere $\psi = \psi(x)$ uma função positiva de classe C^3 em $[0, L]$ e denote $\varphi(x,t) = \frac{\psi(x)}{t(T-t)}$. Dados $q, p \in V$ e $s > 0$, defina

$$u = e^{-s\varphi} p \;\text{ e }\; v = e^{-s\varphi} q.$$

Além disso, considere

$$W := e^{-s\varphi}\mathcal{L}(p,q) = \begin{pmatrix} e^{-s\varphi}L_1(p) + e^{-s\varphi} f_2 \partial_x(q) \\ e^{-s\varphi} f_3 \partial_x(p) + e^{-s\varphi} L_2(q) \end{pmatrix}.$$

Note que,

$$\begin{aligned} \omega_1 &:= e^{-s\varphi}L_1(p) = e^{-s\varphi}L_1(e^{sp}u) = e^{-s\varphi}(b_1\partial_t(e^{sp}u) + \lambda_1\partial_x^3(e^{sp}u) + f_1\partial_x(e^{sp}u)) \\ &= b_1 s\varphi_t u + b_1 u_t + s f_1 \varphi_x u + f_1 u_x + \lambda_1 s^3 \varphi_x^3 u + 3\lambda_1 s^2 \varphi_x \varphi_{xx} u + 3\lambda_1 s^2 \varphi_x^2 u_x \\ &\quad + \lambda_1 s \varphi_{xxx} u + 3\lambda_1 s \varphi_{xx} u_x + 3\lambda_1 s \varphi_x u_{xx} + \lambda_1 u_{xxx}. \end{aligned}$$

Podemos reorganizar a expressão, e obter

$$\begin{aligned} \omega_1 &:= [s(b_1\varphi_t + f_1\varphi_x + \lambda_1\varphi_{xxx}) + 3\lambda_1 s^2 \varphi_x\varphi_{xx} + \lambda_1(s\varphi_x)^3]u \\ &\quad + [f_1 + 3\lambda_1 s\varphi_{xx} + 3\lambda_1(s\varphi_x)^2]u_x + [3\lambda_1 s\varphi_x]u_{xx} + \lambda_1 u_{xxx} + b_1 u_t \qquad (23) \\ &:= Au + Bu_x + Cu_{xx} + \lambda_1 u_{xxx} + b_1 u_t, \end{aligned}$$

onde,

$$\begin{aligned}
A &:= s(b_1\varphi_t + f_1\varphi_x + \lambda_1\varphi_{xxx}) + 3\lambda_1 s^2\varphi_x\varphi_{xx} + \lambda_1(s\varphi_x)^3,\\
B &:= f_1 + 3\lambda_1 s\varphi_{xx} + 3\lambda_1(s\varphi_x)^2,\\
C &:= 3\lambda_1 s\varphi_x.
\end{aligned}$$

Analogamente, para $\omega_2 := e^{-s\varphi}L_2(q)$, obtém-se

$$\begin{aligned}
\omega_2 &:= [s(b_1\varphi_t + f_4\varphi_x + \lambda_2\varphi_{xxx}) + 3\lambda_2 s^2\varphi_x\varphi_{xx} + \lambda_2(s\varphi_x)^3]v\\
&\quad + [f_4 + 3\lambda_2 s\varphi_{xx} + 3\lambda_2(s\varphi_x)^2]v_x + [3\lambda_2 s\varphi_x]v_{xx} + \lambda_2 v_{xxx} + b_1 v_t\\
&:= Ev + Fv_x + Gv_{xx} + \lambda_2 v_{xxx} + b_1 v_t
\end{aligned}$$

onde,

$$\begin{aligned}
E &:= s(b_1\varphi_t + f_4\varphi_x + \lambda_2\varphi_{xxx}) + 3\lambda_2 s^2\varphi_x\varphi_{xx} + \lambda_2(s\varphi_x)^3,\\
F &:= f_4 + 3\lambda_2 s\varphi_{xx} + 3\lambda_2(s\varphi_x)^2,\\
G &:= 3\lambda_2 s\varphi_x.
\end{aligned}$$

Observe que ω_1 e ω_2 são similares, de modo que só diferem em λ_1 e f_1 em vez de λ_2 e f_4. Dessa forma, analisemos apenas ω_1 sendo os resultados análogos para ω_2.

Denote por,

$$\begin{cases}
\tilde{A} := A - sf_1\varphi_x - 3\lambda_1 s^2\varphi_x\varphi_{xx} = sb_1\varphi_t + s\lambda_1\varphi_{xxx} + \lambda_1 s^3(\varphi_x)^3,\\
\tilde{B} := B - f_1 - \delta_1\lambda_1 s\varphi_{xx} = (3-\delta_1)\lambda_1 s\varphi_{xx} + 3\lambda_1 s^2(\varphi_x)^2,
\end{cases}$$

onde $\delta_1 \in (0,1)$. Com isso, definimos agora os operadores auto-adjuntos simétrico e anti-simétrico dados por

$$\begin{cases}
M_1(u) := b_1 u_t + \lambda_1 u_{xxx} + \tilde{B}u_x,\\
M_2(u) := \tilde{A}u + Cu_{xx},
\end{cases}$$

de modo que obtemos

$$M_1(u) + M_2(u) = \omega_1 - (sf_1\varphi_x + 3\lambda_1 s^2\varphi_x\varphi_{xx})u - (f_1 + \delta_1\lambda_1 s\varphi_{xx})u_x,$$

onde δ_1 será definido posteriormente.

Então, se $|f_1| \leqslant \delta_1\lambda_1 s|\varphi_{xx}|$ para todo $(x,t) \in \Omega = (0,L)\times(0,T)$, segue que

$$\begin{aligned}
&\|M_1(u)+M_2(u)\|^2_{L^2(\Omega)}\\
&\leqslant \|\omega_1\|^2_{L^2(\Omega)} + s^2\|(f_1+3\lambda_1 s\varphi_{xx})\varphi_x u\|^2_{L^2(\Omega)} + \ \|(f_1+\delta_1\lambda_1 s\varphi_{xx})u_x\|^2_{L^2(\Omega)} \\
&\leqslant 3\left(\|\omega_1\|^2_{L^2(\Omega)} + (3+\delta_1)^2 s^4\lambda_1^2\|\varphi_{xx}\varphi_x u\|^2_{L^2(\Omega)} \ + 4\delta_1^2\lambda_1^2 s^2\|\varphi_{xx}u_x\|^2_{L^2(\Omega)}\right).
\end{aligned} \tag{24}$$

Isto é possível se tomarmos s suficientemente grande e $|\psi''(x)| > 0$ sobre $[0,L]$, uma vez que temos $\|f_1\|_{L^\infty} \leqslant K\|f_1\|_V \leqslant KR$ para algum $K > 0$. Por outro lado,

$$\begin{aligned}
\|M_1(u)+M_2(u)\|^2_{L^2(\Omega)} \ &= \ \|M_1(u)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|M_2(u)\|^2_{L^2(\Omega)}\\
&\quad + 2\int_0^T\int_0^L M_1(u)M_2(u)\ dx\ dt.
\end{aligned} \tag{25}$$

De agora em diante, vamos utilizar a seguinte notação

$$\iint u := \int_0^T\int_0^L u(x,t)\ dx\ dt \quad \text{e} \quad \int u := \int_0^T u(L,t)\ dt.$$

Analisando o último termo de (25), temos

$$\begin{aligned}
&2\int_0^T\int_0^L M_1(u)M_2(u)\ dx\ dt := 2\iint M_1(u)M_2(u) = 2\iint M_1(u)[\tilde{A}u + Cu_{xx}]\\
&= 2\iint M_1(u)\tilde{A}u + 2\iint (b_1u_t + \lambda_1 u_{xxx} + \tilde{B}u_x)Cu_{xx}\\
&= \iint 2M_1(u)\tilde{A}u + \iint 2b_1u_tCu_{xx} + \iint 2(\lambda_1 u_{xxx} + \tilde{B}u_x)Cu_{xx}\\
&:= I_1 + I_2 + I_3\ .
\end{aligned} \tag{26}$$

Assim, integrando por partes e utilizando o fato de que $p \in V$, obtemos

$$
\begin{aligned}
I_1 \quad &:= \iint 2M_1(u)\tilde{A}u = \iint 2\tilde{A}u(b_1u_t + \lambda_1 u_{xxx} + \tilde{B}u_x) \\
&= \iint b_1(u^2)_t\tilde{A}_t + \iint 2\lambda_1 u u_{xxx}\tilde{A} + \iint \tilde{A}\tilde{B}(u^2)_x \\
&= -\iint b_1u^2\tilde{A}_t - \iint 2\lambda_1 u_{xx}(u\tilde{A})_x - \iint u^2(\tilde{A}\tilde{B})_x \\
&= -\iint b_1u^2\tilde{A}_t - \iint 2\lambda_1 u_x u_{xx}\tilde{A} - \iint 2\lambda_1 u u_{xx}\tilde{A}_x - \iint u^2(\tilde{A}\tilde{B})_x \\
&= -\iint b_1u^2\tilde{A}_t - \iint \lambda_1((u_x)^2)_x\tilde{A} + \iint 2\lambda_1 u_x(u\tilde{A}_x)_x - \iint u^2(\tilde{A}\tilde{B})_x \\
&= -\iint b_1u^2\tilde{A}_t - \int \lambda_1(u_x)^2\tilde{A} + \iint \lambda_1(u_x)^2\tilde{A}_x + \iint 2\lambda_1 u_x(u\tilde{A}_x)_x - \iint u^2(\tilde{A}\tilde{B})_x \\
&= -\iint b_1u^2\tilde{A}_t - \int \lambda_1(u_x)^2\tilde{A} + \iint 3\lambda_1(u_x)^2\tilde{A}_x + \iint \lambda_1(u^2)_x\tilde{A}_{xx} - \iint u^2(\tilde{A}\tilde{B})_x \\
&= -\iint b_1u^2\tilde{A}_t - \int \lambda_1(u_x)^2\tilde{A} + \iint 3\lambda_1(u_x)^2\tilde{A}_x - \iint \lambda_1 u^2\tilde{A}_{xxx} - \iint u^2(\tilde{A}\tilde{B})_x \\
&= -\iint (b_1\tilde{A}_t + \lambda_1\tilde{A}_{xxx} + (\tilde{A}\tilde{B})_x)u^2 - \int \lambda_1(u_x)^2\tilde{A} + \iint 3\lambda_1(u_x)^2\tilde{A}_x,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
I_2 \quad &:= \iint 2b_1u_tCu_{xx} = -\iint 2b_1C_xu_tu_x - \iint 2b_1Cu_{tx}u_x \\
&= -\iint 2b_1Cu_{tx}u_x + \iint 2C_xu_x(Au + Bu_x + Cu_{xx} + \lambda_1 u_{xxx} - \omega_1) \\
&= \iint b_1C_t(u_x)^2 - \iint (C_xA)_xu^2 + \iint 2C_xB(u_x)^2 + \int C_xC(u_x)^2 - \iint (C_xC)_x(u_x)^2 \\
&\quad + \int 2C_x\lambda_1 u_xu_{xx} - \iint 2\lambda_1 C_{xx}u_xu_{xx} - \iint 2\lambda_1 C_x(u_{xx})^2 - \iint 2C_xu_x\omega_1 \\
&= -\iint (C_xA)_xu^2 + \iint (u_x)^2\cdot(b_1C_t + 2C_xB - (CC_x)_x + \lambda_1 C_{xxx}) \\
&\quad + \int (C_xC(u_x)^2 + 2\lambda_1 C_xu_xu_{xx} - \lambda_1 C_{xx}(u_x)^2) - \iint 2\lambda_1 C_x(u_{xxx})^2 - \iint 2C_xu_x\omega_1,
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
I_3 \quad &:= \iint 2(\lambda_1 u_{xxx} + \tilde{B}u_x)Cu_{xx} = \iint 2\lambda_1 u_{xxx}u_{xx}C + \iint 2\tilde{B}Cu_xu_{xx} \\
&= \int \lambda_1 C(u_{xx})^2 - \iint \lambda_1 C_x(u_{xx})^2 + \int \tilde{B}C(u_x)^2 - \iint (\tilde{B}C)_x(u_x)^2\ .
\end{aligned}
$$

Daí, substituindo as identidades em (27), segue que

$$
\begin{aligned}
2\iint & M_1(u)M_2(u) = I_1 + I_2 + I_3 \\
= & \iint u^2[-b_1\tilde{A}_t - \lambda_1\tilde{A}_{xxx} - (\tilde{A}\tilde{B})_x - (C_xA)_x] \\
& + \iint (u_x)^2[3\lambda_1\tilde{A}_x + b_1C_t + 2C_xB - (CC_x)_x + \lambda_1C_{xxx} - (\tilde{B}C)_x] \\
& + \int (u_x)^2[-\lambda_1\tilde{A} + C_xC - \lambda_1C_{xx} + \tilde{B}C] - \iint 3\lambda_1C_x(u_{xx})^2 - \iint 2C_x\omega_1u_x \qquad (27) \\
& + \int \lambda_1C(u_{xx})^2 + \int 2\lambda_1C_xu_xu_{xx} \\
:= & \iint u^2\tilde{D} + \iint (u_x)^2\tilde{E} + \int (u_x)^2\tilde{F} \\
& + \int \lambda_1C(u_{xx})^2 + \int 2\lambda_1C_xu_xu_{xx} - \iint 3\lambda_1C_x(u_{xx})^2 - \iint 2C_xu_x\omega_1.
\end{aligned}
$$

Substituindo (25) em (27), temos que

$$
\|M_1(u)+M_2(u)\|^2_{L^2(\Omega)} = \|M_1(u)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|M_2(u)\|^2_{L^2(\Omega)} + \iint \tilde{D}u^2 + \iint \tilde{E}u_x^2 + \int \tilde{F}u_v^2
$$
$$
+ \int \lambda_1Cu_{xx}^2 + \int 2\lambda_1C_xu_xu_{xx} - \iint 3\lambda_1C_xu_{xx}^2 - \iint 2C_x\omega_1u_x \; .
$$

Agora, observe que

$$
2\left|\iint \omega_1C_xu_x\right| \leqslant \varepsilon\iint (C_x)^2(u_x)^2 + \frac{1}{\varepsilon}\iint \omega_1^2, \qquad (28)
$$

para algum $\varepsilon > 0$, e

$$
2\left|\int \lambda_1C_xu_xu_{xx}\right| \leqslant \lambda_1\int (u_{xx})^2 + \lambda_1\int (C_x)^2(u_x)^2. \qquad (29)
$$

Utilizando (24), (28) e (29), implica que

$$
\begin{aligned}
& \iint \tilde{D}u^2 + \iint \tilde{E}u_x^2 + \int \tilde{F}u_x^2 + \int \lambda_1Cu_{xx}^2 - \iint 3\lambda_1C_xu_{xx}^2 + \|M_1(u)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|M_2(u)\|^2_{L^2(\Omega)} \\
& = \|M_1(u)+M_2(u)\|^2_{L^2(\Omega)} + 2\iint C_xu_x\omega_1 - 2\int \lambda_1C_xu_xu_{xx} \\
& \leqslant 3\left(\|\omega_1\|^2_{L^2(\Omega)} + \lambda_1^2s^4(3+\delta_1)^2\|\varphi_{xx}\varphi_xu\|^2_{L^2(\Omega)} + 4\delta_1^2\lambda_1^2s^2\|\varphi_{xx}u_x\|^2_{L^2(\Omega)}\right) + \varepsilon\iint C_x^2u_x^2 \\
& \quad + \frac{1}{\varepsilon}\iint \omega_1^2 + \lambda_1\int u_{xx}^2 + \lambda_1\int C_x^2u_x^2.
\end{aligned}
$$

Concluímos assim que,

$$\begin{aligned}&\iint \left(\tilde{D} - 3(3+\delta_1)^2\lambda_1^2 s^4 \varphi_x\varphi_{xx}\right)u^2 + \iint \left(\tilde{E} - \varepsilon\ C_x^2 - 12\delta_1^2\lambda_1^2 s^2\varphi_{xx}^2\right)u_x^2\\ &+ \int (\tilde{F} - \lambda_1 C_x^2)u_x^2 + \int (\lambda_1 C - \lambda_1)u_{xx}^2 - \iint 3\lambda_1 C_x u_{xx}^2 \\ &\leqslant \left(3 + \frac{1}{\varepsilon}\right)\iint \omega_1^2.\end{aligned} \tag{30}$$

A função ψ e as constante δ_1, ε e s_0, que foram definidas no enunciado do Teorema 4.1.1, são escolhidas de tal forma que as funções entre parênteses no lado esquerdo de (30) sejam positivas.

Por outro lado, as funções f_1 e f_{1x} que aparecem em A, B, $\tilde{D}$ e $\tilde{E}$ satisfazem

$$\|f_1\|_{L^\infty(\Omega)} + \|f_{1x}\|_{L^\infty(\Omega)} \leqslant K\|f_1\|_V \leqslant KR,$$

logo são uniformemente limitadas.

Note que,

$$A_x = sb_1\varphi_{tx} + sf_1\varphi_{xx} + \lambda_1 s\varphi_{xxxx} + 3\lambda_1 s^2\varphi_{xx}^2 + 3\lambda_1 s^2\varphi_x\varphi_{xxx} + 3\lambda_1 s\varphi_x^2\varphi_{xx}\ ;$$

$$\tilde{A}_t = sb_1\varphi_{tt} + s\lambda_1\varphi_{xxxt} + 3\lambda_1 s^3\varphi_x^2\varphi_{xt}\ ;$$

$$\tilde{A}_x = sb_1\varphi_{tx} + s\lambda_1\varphi_{xxxx} + 3\lambda_1 s^3\varphi_x^2\varphi_{xx}\ ;$$

$$\tilde{A}_{xxx} = sb_1\varphi_{txxx} + s\lambda_1\varphi_{xxxxxx} + 6\lambda_1 s^3\varphi_{xx}^2 + 3\lambda_1 s^3\varphi_x^2\varphi_{xxxx} + 18\lambda_1 s^3\varphi_x\varphi_{xx}\varphi_{xxx}\ ;$$

$$\tilde{B}_x = (3-\delta_1)\lambda_1 s\varphi_{xxx} + 6\lambda_1 s^2\varphi_x\varphi_{xx}\ ;$$

$$\begin{aligned}(\tilde{A}\tilde{B})_x = {}&(3-\delta_1)s^2 b_1\lambda_1\varphi_{tx}\varphi_{xx} + (3-\delta_1)s^2 b_1\lambda_1\varphi_t\varphi_{xxx} + (3-\delta_1)\lambda_1^2 s^4\varphi_x^3\varphi_{xxx}\\ &+ 3(3-\delta_1)\lambda_1^2 s^4\varphi_x^2\varphi_{xx}^2 + 6\lambda_1^3 b_1\varphi_t\varphi_x\varphi_{xx} + 6\lambda_1^2 s^3\varphi_x\varphi_{xx}\varphi_{xxx} + 15\lambda_1^2 s^5\varphi_x^4\varphi_{xx}\ ;\end{aligned}$$

$$(CC_x) = 9\lambda_1^2 s^2\varphi_x\varphi_{xx}\ ;$$

$$(CC_x)_x = 9\lambda_1^2 s^2\varphi_{xx}^2 + 9\lambda_1^2 s^2\varphi_x\varphi_{xxx}\ ;$$

$$
\begin{aligned}
(C_xA)_x &= 3\lambda_1 s^2 b_1\varphi_t\varphi_{xxx} + 3\lambda_1 s^2 f_1\varphi_x\varphi_{xxx} + 3\lambda_1^2 s^2\varphi_{xxx}^2 + 9\lambda_1^2 s^3\varphi_x\varphi_{xx}\varphi_{xxx} + 3\lambda_1^2 s^4\varphi_x^3\varphi_{xxx}\\
&\quad + 3\lambda_1 s^2 b_1\varphi_{tx}\varphi_{xx} + 3\lambda_1 s^2 f_{1x}\varphi_x\varphi_{xx} + 3\lambda_1 s^2\varphi_{xx}^2 f_1 + 3\lambda_1^2 s^2\varphi_{xx}\varphi_{xxxx} + 9\lambda_1^2 s^3\varphi_{xx}^3\\
&\quad + 9\lambda_1^2 s^3\varphi_x\varphi_{xx}\varphi_{xxx} + 6\lambda_1^2 s^4\varphi_x\varphi_{xx}^2 \ ;
\end{aligned}
$$

$$
(C_xB) = 3\lambda_1 s f_1\varphi_{xx} + 9\lambda_1^2 s^2\varphi_{xx}^2 + 9\lambda_1^2 s^3\varphi_x^2\varphi_{xx} \ ;
$$

$$
(C\tilde{B}) = 9\lambda_1^2 s^3\varphi_x^3 + 3(3-\delta_1)\lambda_1^2 s^2\varphi_x\varphi_{xx} \ ;
$$

$$
(C\tilde{B})_x = 18\lambda_1^2 s^3\varphi_x^2\varphi_{xx} = 3(3-\delta_1)\lambda_1^2 s^2\varphi_x\varphi_{xxx} + 9\lambda_1^2 s^3\varphi_x^2\varphi_{xx} + 3(3-\delta_1)\lambda_1^2 s^2\varphi_{xx}^2 \ .
$$

Agora, relembre que,

$$
\begin{cases}
\tilde{D} = -b_1\tilde{A}_t - \lambda_1\tilde{A}_{xxx} - (\tilde{A}\tilde{B})_x - (C_xA)_x \ ,\\[2ex]
\tilde{E} = 3\lambda_1\tilde{A}_x + b_1 C_t + 2C_xB - (CC_x)_x + \lambda_1 C_{xxx} - (C\tilde{B})_x \ ,\\[2ex]
\tilde{F} = -\lambda_1\tilde{A} + C_xC - \lambda_1 C_{xx} + C\tilde{B} \ .
\end{cases}
$$

Substituindo as identidades anteriormente mencionadas em $\tilde{D}$, $\tilde{E}$ e $\tilde{F}$, temos que

$$
\tilde{D} - 3(3+\delta_1)^2\lambda_1 s^4\varphi_x^2\varphi_{xx}^2 = -15\lambda_1^2(\psi'(x))^4\psi''(x)\frac{s^5}{t^5(T-t)^5} + \mathcal{O}\left(\frac{s^4}{t^4(T-t)^4}\right),
$$

quando $s\to\infty$. Além disso, para s suficientemente grande e escolhendo

$$
|\psi'(x)| > 0 \ \text{ e } \ \psi''(x) < 0, \ \forall\ x\in[0,L],
$$

obtemos para alguma constante $K_1 > 0$,

$$
\tilde{D} - 3(3+\delta_1)^2\lambda_1 s^4\varphi_x^2\varphi_{xx}^2 \geqslant K_1\frac{s^5}{t^5(T-t)^5} \ . \tag{31}
$$

Segue também que

$$
\begin{aligned}
\tilde{E} - \varepsilon\, C_x^2 - 12\delta_1^2\lambda_1^2 s^2\varphi_{xx}^2 &= \mathcal{O}\left(\frac{s}{t(T-t)}\right)\\
&+ \frac{s^2}{t^2(T-t)^2}\left[\lambda_1^2(3\delta_1 - 9\varepsilon - 12\delta_1^2)(\psi''(x))^2 + (3\delta_1 - 18)\lambda_1^2\psi'(x)\psi'''(x)\right] \ ,
\end{aligned}
$$

quando $s\to\infty$. Tomando s suficientemente grande, δ_1, $\varepsilon > 0$ tais que $3\delta_1 - 9\varepsilon - 12\delta_1^2 > 0$ e escolhendo

$$
\psi''(x) \neq 0 \ \text{ e } \ \psi'(x)\psi'''(x) \leqslant 0, \ \forall\ x\in[0,L],
$$

obtemos para alguma constante $K_2 > 0$,

$$\tilde{E} - \varepsilon\, C_x^2 - 12\delta_1^2\lambda_1^2\varphi_{xx} \geqslant K_2\frac{s^2}{t^2(T-t)^2}\ . \tag{32}$$

Por fim, de forma análoga, temos

$$\tilde{F} - \lambda_1 C_x^2 = 8\lambda_1^2(\psi'(x))^3\frac{s^3}{t^3(T-t)^3} + \mathcal{O}\left(\frac{s^2}{t^2(T-t)^2}\right) \geqslant K_3\frac{s^3}{t^3(T-t)^3}\ , \tag{33}$$

$$-3\lambda_1 C_x = -9\lambda_1^2\psi''(x)\frac{s}{t(T-t)} \geqslant K_4\frac{s}{t(T-t)} \tag{34}$$

e

$$\lambda_1 C - \lambda_1 = 3\lambda_1^2\psi'(x)\frac{s}{t(T-t)} - \lambda_1 \geqslant K_5\frac{s}{t(T-t)}\ , \tag{35}$$

onde K_3, K_4 e K_5 são constantes positivas, s suficientemente grande e

$$\psi''(x) < 0 \ \text{ e } \ \psi'(x) > 0, \forall\ x \in [0, L].$$

De modo geral, analisando a função ψ, vemos que

$$\psi \in C^3([0,L]), \psi > 0, \psi' > 0, \psi'' < 0 \ \text{ e } \ \psi'\psi''' \leqslant 0 \ \text{ em } \ [0,L],$$

assim, vamos considerar a função $\psi(x) = 1 + 4L^2 + x(3L - x)$, que satisfaz as condições acima mencionados. Então, usando (31)–(35), e tomando s suficientemente grande, deduzimos que

$$\iint \left\{\frac{s^5}{t^5(T-t)^5}u^2 + \frac{s^2}{t^2(T-t)^2}u_x^2 + \frac{s}{t(T-t)}u_{xx}^2\right\} \leqslant K_6 \iint \omega_1^2\ ,$$

para alguma constante $K_6 = \left(3 + \dfrac{1}{\varepsilon}\right)\dfrac{1}{\min\{K_1, K_2, K_4\}} > 0.$

A fim de melhorar a estimativa acima, note que

$$\begin{aligned}\iint \frac{s^3}{t^3(T-t)^3}u_x^2 \ &= \ -\iint \frac{s^3}{t^3(T-t)^3}uu_{xx} \\ &\leqslant \ \frac{1}{2}\left\{\iint \frac{s^5}{t^5(T-t)^5}u^2 + \iint \frac{s}{t(T-t)}u_{xx}^2\right\} \leqslant \frac{K_6}{2}\iint \omega_1^2\ .\end{aligned}$$

Logo, para s suficientemente grande, obtemos

$$\iint \left\{\frac{s^5}{t^5(T-t)^5}u^2 + \frac{s^3}{t^3(T-t)^3}u_x^2 + \frac{s}{t(T-t)}u_{xx}^2\right\} \leqslant \frac{3K_6}{2}\iint \omega_1^2\ . \tag{36}$$

Com cálculos análogos, temos também

$$\iint \left\{ \frac{s^5}{t^5(T-t)^5} v^2 + \frac{s^3}{t^3(T-t)^3} v_x^2 + \frac{s}{t(T-t)} v_{xx}^2 \right\} \leqslant \frac{3K_7}{2} \iint \omega_2^2 \ , \tag{37}$$

para alguma constante $K_7 > 0$.

Defina $\Phi = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$. Recordando que,

$$u = e^{-s\varphi} p, \ v = e^{-s\varphi} q, \ \omega_1 = L_1(p) e^{-s\varphi}, \ \omega_2 = L_2(q) e^{-s\varphi}, \ \varphi(x,t) = \frac{\psi(x)}{t(T-t)},$$

e combinando (36) e (37), temos

$$\begin{aligned} I \ &:= \ \iint \left\{ \frac{s^5}{t^5(T-t)^5} |\Phi|^2 + \frac{s^3}{t^3(T-t)^3} |\Phi_x|^2 + \frac{s}{t(T-t)} |\Phi_{xx}|^2 \right\} e^{\frac{-2s\psi(x)}{t(T-t)}} \\ &\leqslant \ C_0 \iint \left\{ L_1(p)^2 + L_2(q)^2 \right\} e^{\frac{-2s\psi(x)}{t(T-t)}} \ , \end{aligned}$$

onde $C_0 = C_0(L, T, R)$. Note ainda que,

$$C_0 \iint |f_2 q_x|^2 e^{-2s\varphi} \leqslant C_0 \|f_2\|^2_{L^\infty(\Omega)} \iint |q_x|^2 e^{-2s\varphi} \leqslant \frac{1}{4} I$$

e

$$C_0 \iint |f_3 p_x|^2 e^{-2s\varphi} \leqslant C_0 \|f_3\|^2_{L^\infty(\Omega)} \iint |p_x|^2 e^{-2s\varphi} \leqslant \frac{1}{4} I.$$

Com isso, podemos obter

$$\frac{1}{2} I + 2C_0 \iint |f_2 q_x|_2 e^{-2s\varphi} \leqslant \frac{1}{2} I + \frac{1}{2} I = I \leqslant C_0 \iint \left\{ L_1(p)^2 + L_2(q)^2 \right\} e^{-2s\varphi}.$$

Consequentemente,

$$\frac{1}{2} I \leqslant C_0 \iint \left\{ L_1(p)^2 + L_2(q)^2 - 2|f_2 q_x|^2 \right\} e^{-2s\varphi}$$

e

$$\frac{1}{2} I \leqslant C_0 \iint \left\{ L_1^2(p) + L_2^2(q) - 2|f_3 p_x|^2 \right\} e^{-2s\varphi}.$$

Logo,

$$I \leqslant C_0 \iint \left\{ L_1^2(p) + L_2^2(q) - 2|f_2 q_x|^2 - 2|f_3 p_x|^2 \right\} e^{-2s\varphi}.$$

Além disso, temos a seguinte relação

$$|L_1(p)|^2 \leqslant 2|L_1(p) + f_2 q_x|^2 + 2|f_2 q_x|^2$$

e

$$|L_2(q)|^2 \leqslant 2|L_2(q) + f_3 p_x|^2 + 2|f_3 p_x|^2.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
&\int_0^T \int_0^L \left\{ \frac{s^5}{t^5(T-t)^5}|\Phi|^2 + \frac{s^3}{t^3(T-t)^3}|\Phi_x|^2 + \frac{s}{t(T-t)}|\Phi_{xx}|^2 \right\} e^{\frac{-2s\psi(x)}{t(T-t)}}\ dx\ dt \\
&\leqslant 2C_0 \int_0^T \int_0^L \left\{ (L_1(p) + f_2 q_x)^2 + (L_2(q) + f_3 p_x)^2 \right\} e^{\frac{-2s\psi(x)}{t(T-t)}}\ dx\ dt \\
&\leqslant C \int_0^T \int_0^L |\mathcal{L}\Phi|^2 e^{\frac{-2s\psi(x)}{t(T-t)}}\ dx\ dt\ ,
\end{aligned}$$

provando assim o resultado. ∎

4.2 Propriedade de continuação única

Enunciaremos a seguir o primeiro passo para estabelecer o resultado de continuação única.

Proposição 4.2.1. *Sejam T e l números positivos. Se $\mathcal{U} \in L^\infty(0,T;[H^1(0,L)]^2)$ e resolve,*

$$\begin{cases}
b_1 \mathcal{U}_t + A_1 \mathcal{U}_{xxx} + A_2 \mathcal{U}_x + [B(\mathcal{U}) + C(\mathcal{U})]\mathcal{U}_x = 0, & \textit{em}\ \ (0,l) \times (0,T), \\
\mathcal{U}(0,t) = 0, & \textit{para}\ \ t \in (0,T), \\
\mathcal{U} \equiv 0, & \textit{em}\ \ (l',l) \times (0,T),
\end{cases}$$

com A_1, A_2, $B(\mathcal{U})$ e $C(\mathcal{U})$ definidos em (21), a função "a"em $C(\mathcal{U})$ de classe $C^0(\mathbb{R};\mathbb{R})$ e ainda $0 < l' < l$. Então, $\mathcal{U} \equiv 0$ em $(0,l) \times (0,T)$.

Demonstração:

Seja $\tilde{\mathcal{U}}$ satisfazendo as hipóteses do problema e considere a função $\tilde{\mathcal{U}}^{[h]} := \left(\tilde{u}^{[h]}, \tilde{v}^{[h]}\right)$ conforme é definido no Teorema 2.8.4. Então para $T' < T$ e h suficientemente pequeno, $\tilde{\mathcal{U}}^{[h]} \in W^{1,\infty}(0,T';[H_0^1(0,l)]^2)$ e resolve,

$$\begin{cases}
b_1 \tilde{\mathcal{U}}_t^{[h]} + A_1 \tilde{\mathcal{U}}_{xxx}^{[h]} + A_2 \tilde{\mathcal{U}}_x^{[h]} + ([B(\tilde{\mathcal{U}}) + C(\tilde{\mathcal{U}})]\tilde{\mathcal{U}}_x)^{[h]} = 0, & \text{em}\ \ (0,l) \times (0,T), \\
\tilde{\mathcal{U}}^{[h]}(0,t) = 0, & \text{para}\ \ t \in (0,T), \\
\tilde{\mathcal{U}}^{[h]} \equiv 0, & \text{em}\ \ (l',l) \times (0,T).
\end{cases} \tag{38}$$

Observemos agora que,

(i) $\tilde{\mathcal{U}}^{[h]} \in L^\infty(0,T';[H^3(0,l)]^2)$;

(ii) $\tilde{\mathcal{U}}^{[h]}(0,t) = \tilde{\mathcal{U}}^{[h]}(l,t) = \tilde{\mathcal{U}}^{[h]}_x(l,t) = \tilde{\mathcal{U}}^{[h]}_{xx}(l,t) = 0$;

(iii) Defina, $A_2 := \tilde{B}_1 = \begin{pmatrix} \tilde{f}_1 & \tilde{f}_2 \\ \tilde{f}_3 & \tilde{f}_4 \end{pmatrix}$, ou seja, $\tilde{f}_1 = \tilde{f}_2 = \tilde{f}_3 = 0$ e $\tilde{f}_4 = r$.

De fato, de (38) temos que $\tilde{\mathcal{U}}^{[h]}_{xxx} \in L^\infty(0,T';X)$ o que nos permite concluir (i), bem como (ii) combinando $\tilde{\mathcal{U}}^{[h]}(0,t) = 0$ em $(0,T')$ e $\tilde{\mathcal{U}}^{[h]} \equiv 0$ em $(l',l)\times(0,T')$. Assim, recordando o Teorema 4.1.1, observamos que T', l e r são números positivos, de (i) e (ii) garantimos que $\tilde{\mathcal{U}}^{[h]} \in V \times V$, e a partir de (iii) podemos afirmar que $\tilde{f}_i \in V$ com $\|\tilde{f}_i\|_V \leqslant r$, $1 \leqslant i \leqslant 4$.

Como vimos na seção 4.1, existe uma matriz inversível P tal que $A_1 = PQP^{-1}$. Para efeito de cálculos, considere

$$P := \begin{pmatrix} c & d \\ e & f \end{pmatrix} \text{ e } Q := \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} .$$

onde λ_1 e λ_2 são os autovalores de A. Fazendo a mudança de variável,

$$\mathcal{U} = P^{-1}\tilde{\mathcal{U}} \Rightarrow \tilde{\mathcal{U}} = P\mathcal{U},$$

obtemos a equação

$$b_1 P\mathcal{U}^{[h]}_t + A_1 P\mathcal{U}^{[h]}_{xxx} + A_2 P\mathcal{U}^{[h]}_x = [(-B(P\mathcal{U}) - C(P\mathcal{U})P\mathcal{U}_x)]^{[h]} .$$

Agora, multiplicando a igualdade acima por P^{-1}, temos

$$b_1\mathcal{U}^{[h]}_t + B_1\mathcal{U}^{[h]}_x + Q\mathcal{U}^{[h]}_{xxx} = \left[P^{-1}(-B(P\mathcal{U}) - C(P\mathcal{U})P\mathcal{U}_x)\right]^{[h]} := \mathcal{L}(\mathcal{U}^{[h]}) ,$$

onde $B_1 = P^{-1}A_2P$ e $\mathcal{L}$ são definidos conforme as notações da seção 4.1.

Dessa forma, podemos aplicar o Teorema 4.1.1, ou seja, existem constantes $C > 0$, $s_0 > 0$ e uma função suave positiva ψ em $[0,l]$, tal que para $s > s_0$, temos

$$
\begin{aligned}
&\int_0^{T'}\int_0^l \left\{ \frac{s^5}{t^5(T'-5)^5}|\mathcal{U}^{[h]}|^2 + \frac{s^3}{t^3(T'-t)^3}|\mathcal{U}_x^{[h]}|^2 + \frac{s}{t(T'-t)}|\mathcal{U}_{xx}^{[h]}|^2 \right\} e^{\frac{-2s\psi(x)}{t(T'-t)}}\ dx\ dt \\
&\leqslant C\int_0^{T'}\int_0^l \left|\mathcal{L}\left(\mathcal{U}^{[h]}\right)\right|^2 e^{\frac{-s\psi(x)}{t(T'-t)}}\ dx\ dt \\
&= C\int_0^{T'}\int_0^l \left|\left[P^{-1}(B(P\mathcal{U})+C(P\mathcal{U}))P\mathcal{U}_x\right]^{[h]}\right|^2 e^{\frac{-2s\psi(x)}{t(T'-t)}}\ dx\ dt \\
&\leqslant C\left\{\iint \left|(a(cu+dv)u_x)^{[h]}\right| e^{-2s\varphi} + \iint \left|(a(eu+fv)v_x)^{[h]}\right| e^{-2s\varphi}\right. \\
&\qquad + \iint \left|(a(eu+fv)u_x)^{[h]}\right| e^{-2s\varphi} + \iint \left|(a(cu+dv)v_x)^{[h]}\right| e^{-2s\varphi} \\
&\qquad + \iint \left|(uu_x)^{[h]}\right|^2 e^{-2s\varphi} + \iint \left|(vv_x)^{[h]}\right|^2 e^{-2s\varphi} + \iint \left|(uv_x)^{[h]}\right|^2 e^{-2s\varphi} \\
&\qquad \left. + \iint \left|(vu_x)^{[h]}\right|^2 e^{-2s\varphi}\right\} := C\left\{\sum_{i=1}^{8} I_i\right\} ,
\end{aligned}
$$

onde $C>0$ é uma constante e $\varphi(x,t)=\dfrac{\psi(x)}{t(T'-t)}$. Observe que,

$$
\begin{aligned}
I_1 &:= \iint \left|(a(cu+dv)u_x)^{[h]}\right|^2 \cdot e^{-2s\varphi} \\
&\leqslant 2\iint \left[\left|(a(cu+dv)u_x)^{[h]} - a(cu+dv)u_x^{[h]}\right|^2\right] e^{-2s\varphi} + \iint \left|a(cu+dv)u_x^{[h]}\right|^2 e^{-2s\varphi} \\
&:= I_{11}+I_{12} \ .
\end{aligned}
$$

Como $a(cu+dv)\in L^\infty(0,T';L^\infty(0,l))$, temos que

$$
I_{12} := \iint \left|a(cu+dv)u_x^{[h]}\right|^2 e^{-2s\varphi} \leqslant C_{12}\iint \left|u_x^{[h]}\right|^2 e^{-2s\varphi} \leqslant C_{12}\iint \left|\mathcal{U}_x^{[h]}\right|^2 e^{-2s\varphi} \quad .
$$

Aplicando a mesma ideia para cada $i=1,\ldots,8$, obtemos

$$
I_{i2} \leqslant C_{i2}\iint \left|\mathcal{U}_x^{[h]}\right|^2 e^{-2s\varphi} \ .
$$

Daí, garantimos que

$$
\begin{aligned}
&\iint \left\{ \frac{s^5}{t^5(T'-t)^5}|\mathcal{U}^{[h]}|^2 + \left(\frac{s^3}{t^3(T'-t)^3} - C\sum_{i=1}^{8} C_{i2}\right)|\mathcal{U}_x^{[h]}|^2 + \frac{s}{t(T'-t)}|\mathcal{U}_{xx}^{[h]}|^2 \right\} e^{-2s\varphi} \\
&\leqslant C\sum_{i=1}^{8} I_{i1} \ ,
\end{aligned}
$$

tomando, se necessário, s_0 cada vez maior a fim de garantir que para todo $s > s_0$ sempre tenhamos

$$\left(\frac{s^3}{t^3(T'-t)^3} - C \sum_{i=1}^{8} C_{i2} \right) > 0.$$

Vejamos agora o termo,

$$I_{11} := 2 \iint \left| (a(cu+dv)u_x)^{[h]} - a(cu+dv)u_x^{[h]} \right|^2 e^{-2s\varphi}.$$

Como $a(cu+dv)u_x \in L^2(0,T';L^2(0,l))$, aplicando o Teorema 2.8.4, quando $h \to 0$ obtemos

$$\begin{cases} (a(cu+dv)u_x)^{[h]} \to a(cu+dv)u_x, & \text{em } \ L^2(0,T';L^2(0,l)), \\ a(cu+dv)u_x^{[h]} \to a(cu+dv)u_x, & \text{em } \ L^2(0,T';L^2(0,l)). \end{cases}$$

Sabendo que $e^{-s\varphi} \leqslant 1$, para s suficientemente grande, segue que $I_{11} \to 0$ quando $h \to 0$. Essa análise é equivalente a todos os demais termos, ou seja,

$$I_{i1} \to 0, \ \forall\, i = 1, \ldots, 8, \ \ \text{quando} \ \ h \to 0 \ .$$

Consequentemente, quando $h \to 0$,

$$\iint \left\{ \frac{s^5}{t^5(T'-t)^5} |\mathcal{U}^{[h]}|^2 + \frac{s^3}{t^3(T'-t)^3} |\mathcal{U}_x^{[h]}|^2 + \frac{s}{t(T'-t)} |\mathcal{U}_{xx}^{[h]}|^2 \right\} e^{-2s\varphi} \to 0 \ ,$$

e daí, segue que $\mathcal{U}^{[h]} \to 0$. Por outro lado, pelo Teorema 2.8.4, $\mathcal{U}^{[h]} \to \mathcal{U}$ em $L^2(0,T';X)$ quando $h \to 0$, logo pela unicidade do limite em $L^2(0,T';X)$ temos $\mathcal{U} \equiv 0$ em $(0,l) \times (0,T')$. Em particular, T' é tomado arbitrariamente próximo de T, portanto, $\mathcal{U} \equiv 0$ em $(0,l) \times (0,T)$.

∎

Enunciaremos agora o resultado de continuação única desejado nesta seção.

Corolário 4.2.2. *Sejam $\omega \subset (0,L)$, um aberto não vazio e $\mathcal{U} \in L^\infty(0,T;[H^1(0,L)]^2)$ solução do sistema*

$$\begin{cases} b_1\mathcal{U}_t + A_1\mathcal{U}_{xxx} + A_2\mathcal{U}_x + [B(\mathcal{U}) + C(\mathcal{U})]\mathcal{U}_x = 0, & \textit{em} \ \ (0,L) \times (0,T), \\ \mathcal{U}(0,t) = 0, & \textit{para} \ \ t \in (0,T), \\ \mathcal{U} \equiv 0, & \textit{em} \ \ \omega \times (0,T), \end{cases}$$

com A_1, A_2, $B(\mathcal{U})$, $C(\mathcal{U})$ definidos em (21), e $a \in C^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Então, $\mathcal{U} \equiv 0$ em $(0,L) \times (0,T)$.

Demonstração:

Sem perda de generalidade suponha $\omega = (l_1, l_2)$ com $0 \leqslant l_1 \leqslant l_2 \leqslant L$. Defina, $l = \dfrac{l_1 + l_2}{2}$, logo $\mathcal{U}$ satisfaz

$$\begin{cases} b_1\mathcal{U}_t + A_1\mathcal{U}_{xxx} + A_2\mathcal{U}_x + [B(\mathcal{U}) + C(\mathcal{U})]\mathcal{U}_x = 0, & \text{em } (0,l) \times (0,T), \\ \mathcal{U}(0,t) = 0, & \text{para } t \in (0,T), \\ \mathcal{U} \equiv 0, & \text{em } (l_1, l) \times (0,T). \end{cases}$$

Assim, pela Proposição 4.2.1, temos $\mathcal{U} \equiv 0$ em $(0,l) \times (0,T)$.

Considere agora uma função $W = W(x,t)$ dada por

$$W(x,t) = \mathcal{U}(L - x, T - t) \ \text{ em } \ (0, L - l) \times (0,T)\ .$$

Temos que W satisfaz

$$\begin{cases} b_1W_t + A_1W_{xxx} + A_2W_x + [B(W) + C(W)]W_x = 0, & \text{em } (0, L-l) \times (0,T), \\ W(L, T-t) = 0, & \text{para } t \in (0,T), \\ W \equiv 0, & \text{em } (L - l_2, L - l) \times (0,T), \end{cases}$$

e novamente, pela Proposição 4.2.1, temos $W \equiv 0$ em $(0, L-l) \times (0,T)$, isso significa que, $\mathcal{U} \equiv 0$ em $(l, L) \times (0,T)$. Portanto, $\mathcal{U} \equiv 0$ em $(0,L) \times (0,T)$. ∎

4.3 Estabilização

Como já discutido anteriormente, as soluções fracas de (1)–(3) podem não ser únicas. Sendo assim, vamos dizer que a solução do sistema é exponencialmente estável se satisfaz a seguinte propriedade:

Definição 4.3.1. *O sistema* $(1) - (3)$ *é dito localmente uniformemente exponencialmente estável em* X*, se para qualquer* $R > 0$*, existem constantes positivas* C *e* α*, tais que para qualquer* $\mathcal{U}^0 \in X$ *com* $E(0) \leqslant R$ *e para qualquer solução fraca* $\mathcal{U}$ *de* $(1) - (3)$*, temos*

$$E(t) \leqslant CE(0)e^{-\alpha t}, \ \forall\ t > 0.$$

Se a constante α *é independente de* R*, o sistema* $(1) - (3)$ *é dito globalmente uniformemente exponencialmente estável em* X*.*

Para provar o decaimento exponencial uniforme da energia total $E(t)$, primeiramente analisaremos um resultado de decaimento local.

Proposição 4.3.2. *Sejam $a = a(x)$ uma função de classe C^2 e $1 \leqslant p < 4$ tal que*

$$|a(x)| \leqslant C(1+|x|^p), |a'(x)| \leqslant C(1+|x|^{p-1}), |a''(x)| \leqslant C(1+|x|^{p-2}), \ \forall\ x \in \mathbb{R}$$

onde $C > 0$ é uma constante. Então, se b satisfaz (5), o sistema $(1)-(3)$ é localmente uniformemente estável.

Demonstração:

Primeiramente note de (7) que

$$E(t) = \frac{b_1}{2}\|\mathcal{U}(\ \cdot\ , t)\|_X^2.$$

Conforme mencionado na introdução deste trabalho, iremos primeiramente mostrar que a seguinte desigualdade

$$E(0) \leqslant C\frac{1}{2}\int_0^T \left\{\left[\sqrt{b_2}u_x(0,t) + \sqrt{a_3^2 b_2}v_x(0,t)\right]^2 + (1-a_3^2 b_2)v_x^2(0,t) + 2\int_0^L b(x)[b_2 u^2 + v^2]dx\right\}dt,$$

ocorre. Para isso, defina:

$$I(\mathcal{U}) := \int_0^T \left\{\left[\sqrt{b_2}u_x(0,t) + \sqrt{a_3^2 b_2}v_x(0,t)\right]^2 + (1-a_3^2 b_2)v_x^2(0,t) + 2\int_0^L b(x)[b_2 u^2 + v^2]dx\right\}dt.$$

Afirmação 4: Sendo válido as hipóteses da Proposição 4.3.2, para qualquer $T > 0$ temos,

$$\begin{aligned}\|\mathcal{U}^0\|_X^2 \ \leqslant\ & \frac{1}{T}\|\mathcal{U}\|^2_{L^2(0,T;X)} + \frac{2}{b_1}\int_0^T\int_0^L b(x)(b_2u^2+v^2)\ dx\ dt \\ & + \frac{1}{b_1}\int_0^T \left\{\left[\sqrt{b_2}u_x(0,t) + \sqrt{a_3^2 b_2}v_x(0,t)\right]^2 + (1-a_3^2 b_2)v_x^2(0,t)\right\} dt.\end{aligned}$$

De fato, na prova do Lema 3.2.3, foi obtido as identidades de I_2 à I_8 e I_{10} à I_{15}. Substituindo-as na equação (12), e assumindo $q \equiv p \equiv (T-t)$, para $t \in [0,T]$, obtemos

$$
\begin{aligned}
0 &= \int_0^L \left\{ \int_0^T \frac{(T-t)}{2} \partial_t (b_2(u^2) + b_1(v^2)) \ dt \right\} dx \\
&+ \int_0^T (T-t) \left\{ \frac{1}{2} \left[\sqrt{b_2} u_x(0,t) + \sqrt{a_3^2 b_2} v_x(0,t) \right]^2 + \frac{1}{2}(1 - a_3^2 b_2) v_x^2(0,t) \right. \\
&+ \left. \int_0^L b(x)[b_2 u^2 + v^2] \ dx \right\} dt \\
&= -\frac{Tb_2}{2} \int_0^L (u^0)^2 \ dx - \frac{Tb_1}{2} \int_0^L (v^0)^2 \ dx + \int_0^T \int_0^L \left(\frac{b_2 u^2}{2} + \frac{b_1 v^2}{2} \right) dx \ dt \\
&+ \int_0^T (T-t) \left\{ \frac{1}{2} \left[\sqrt{b_2} u_x(0,t) + \sqrt{a_3^2 b_2} v_x(0,t) \right]^2 + \frac{1}{2}(1 - a_3^2 b_2) v_x^2(0,t) \right. \\
&+ \left. \int_0^L b(x)[b_2 u^2 + v^2] \ dx \right\} dt.
\end{aligned}
$$

Sabendo que $\dfrac{T-t}{T} \leqslant 1$, e colocando $\dfrac{b_1}{2}$ em evidência, segue que

$$
\begin{aligned}
\|(u^0, v^0)\|_X^2 &\leqslant \frac{1}{T} \|(u,v)\|_{L^2(0,T;X)}^2 + \frac{2}{b_1} \int_0^T \int_0^L b(x)(b_2 u^2 + v_2) \ dx \ dt \\
&+ \frac{1}{b_1} \int_0^T \left\{ \left[\sqrt{b_2} u_x(0,t) + \sqrt{a_3^2 b_2} v_x(0,t) \right]^2 + (1 - a_3^2 b_2) v_x^2(0,t) \right\} dt.
\end{aligned}
$$

como queríamos mostrar.

Pela afirmação 4, obtemos

$$
E(0) = \frac{b_1}{2} \|\mathcal{U}^0\|_X^2 \leqslant \frac{b_1}{2T} \|\mathcal{U}\|_{L^2(0,T;X)}^2 + \frac{1}{2} I(\mathcal{U}).
$$

Logo, basta mostrar que para qualquer $T > 0$ e $R > 0$, existe uma constante $C(R,T) > 0$ satisfazendo

$$
\|\mathcal{U}\|_{L^2(0,T;X)}^2 \leqslant C(R,T) I(\mathcal{U}), \tag{39}
$$

para qualquer solução fraca $\mathcal{U}$, sempre que $\|\mathcal{U}^0\|_X \leqslant R$.

Com efeito, suponha, por contradição, que (39) não seja válida. Logo, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe uma sequência de funções $\{\mathcal{U}_n\}$, tais que

$$
\mathcal{U}_n \in C_\omega([0,T]; X) \cap L^2(0,T; [H_0^1(0,L)]^2) \ , \tag{40}
$$

é solução do seguinte problema

$$\begin{cases} b_1\mathcal{U}_{n,t} + A_1\mathcal{U}_{n,xxx} + [A_2 + B(\mathcal{U}_n) + C(\mathcal{U}_n)]\mathcal{U}_{n,x} + D\mathcal{U}_n = 0, & \text{em} \quad (0,L)\times\mathbb{R}^+, \\ \mathcal{U}_n(0,t) = \mathcal{U}_n(L,t) = \mathcal{U}_{n,x}(L,t) = 0, & \text{em} \quad \mathbb{R}^+, \\ \mathcal{U}_n(x,0) = \mathcal{U}_n^0(x), & \text{em} \quad (0,L), \end{cases}, \tag{41}$$

com

$$\|\mathcal{U}_n^0\|_X \leqslant R \ , \tag{42}$$

e valendo a seguinte desigualdade

$$\|\mathcal{U}_n\|^2_{L^2(0,T;X)} > nI(\mathcal{U}_n) \ , \tag{43}$$

onde A_1, A_2, $B(\mathcal{U}_n)$, $C(\mathcal{U}_n)$ e D estão definidos em (21).

Denote por $\delta_n := \|\mathcal{U}_n\|_{L^2(0,T;X)}$. Pelo Lema 3.2.3 e da condição (42) temos que δ_n é limitado. Segue de (43) que,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\delta_n}{I(\mathcal{U}_n)} = \infty, \tag{44}$$

consequentemente, $I(\mathcal{U}_n) \to 0$ quando $n \to \infty$.

Agora considere $Z_n(x,t) = \dfrac{1}{\delta_n}\mathcal{U}_n(x,t)$. Assim, temos para cada $n \in \mathbb{N}$, que

$$\begin{cases} \|Z_n\|^2_{L^2(0,T;X)} = 1 \ ; \\ Z_n \ \text{ satisfaz } \ (40) - (44) \ ; \\ \|Z_n^0\|_X \ \text{ é limitada} \ . \end{cases} \tag{45}$$

Note que, como δ_n é limitado, existe δ e uma subsequência, ainda denotada pelo mesmo índice, tal que $\delta_n \to \delta$. Além disso, temos que $|a_n(\delta_n u)| \leqslant C(1 + |\delta_n|^p|u|^p) \leqslant C(1 + |u|^p)$, onde C é uma constante positiva. Dessa forma, dos resultados acima e seguindo os argumentos utilizados na prova do Teorema 3.2.6, temos que existe Z tal que

$$\begin{aligned} & Z_n \rightharpoonup Z \quad \text{em} \quad L^\infty(0,T;X) \quad \text{fraco}^*; \\ & Z_n \rightharpoonup Z \quad \text{em} \quad L^2(0,T;[H^1(0,L)]^2) \quad \text{fraco}; \\ & Z_n \to Z \quad \text{em} \quad L^2(0,T;X); \\ & Z_n \to Z \quad \text{em} \quad C([0,T];[H^{-1}(0,L)]^2); \\ & C(\delta_n Z_n)Z_{n,x} \to C(\delta Z)Z_x \quad \text{em} \quad D'((0,L)\times(0,T)). \end{aligned} \tag{46}$$

Consequentemente, combinando (45) e (46), temos

$$|Z\|_{L^2(0,T;X)} = 1, \tag{47}$$

e pela semicontinuidade inferior da norma, obtemos

$$I(Z) \leqslant \liminf_{n\to\infty} I(Z_n) = 0. \tag{48}$$

Devido a (46),(47) e (48) podemos concluir que Z satisfaz

$$\begin{cases} b_1 Z_t + A_1 Z_{xxx} + [A_2 + \delta B(Z) + C(\delta Z)]Z_x + DZ = 0, \\ Z(0,t) = Z(L,t) = 0, \end{cases} \tag{49}$$

em $D'((0,L)\times(0,T))$. Em particular, como b satisfaz (5) e vale (48), concluímos que $I(Z) = 0$ em $\omega \subset (0,L)$, logo

$$Z \equiv 0 \ \text{ em } \ \omega \times (0,T). \tag{50}$$

Veja que, se $Z \in L^\infty(0,T;[H^1(0,L)]^2)$ com as condições (47)–(50) satisfeitas, podemos aplicar a propriedade de continuação única, Corolário 4.2.2, possibilitando assim concluir que $Z \equiv 0$ em $(0,L)\times(0,T)$, contradizendo assim o fato de que $\|Z\|_{L^2(0,T;X)} = 1$ e, neste caso, (39) se verifica, como queríamos demonstrar.

Por fim, falta mostrar que

$$Z \in L^\infty(0,T;[H^1(0,L)]^2).$$

Afirmação 5: Para $0 < t_1 < t_2 < T$, existe um subconjunto $(t_1', t_2') \subset (t_1, t_2)$ tal que

$$Z \in L^\infty(t_1', t_2';[H^1(0,L)]^2).$$

De fato, conforme foi visto na demonstração do Teorema 3.2.6, para cada solução fraca W_n, com $n \in \mathbb{N}$, é possível obter uma sequência $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em $C_0^\infty(\mathbb{R})$ satisfazendo (17). Segue que, se W_n for solução de

$$\begin{cases} b_1 W_{n,t} + A_1 W_{n,xxx} + [A_2 + \delta_n B(W_n) + C(\delta_n W_n)]W_{n,x} + DW_n = 0, \\ W_n(0,t) = W_n(L,t) = W_{n,x}(L,t) = 0, \\ W_n(x,0) = Z_n^0(x), \end{cases}$$

obtemos que $W_n - Z_n \to 0$ em $C([0,T];[H^{-1}(0,L)]^2)$, quando $n \to \infty$.

Tome uma sequência $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \left(t_1, \frac{t_1+t_2}{2}\right)$ tal que $\alpha_n \to \alpha$, como W_n é limitado em $L^2(0,T;[H^1(0,L)]^2)$, para alguma constante $C>0$, temos

$$\|W_n(\,\cdot\,,\alpha_n)\|_{[H^1(0,L)]^2} \leqslant C.$$

Por outro lado (46), para a sequência W_n, nos garante que

$$W_n(\,\cdot\,,\alpha_n+\cdot) \to Z(\,\cdot\,,\alpha+\cdot) \ \text{ em } \ C([0,\varepsilon];[H^{-1}(0,L)]^2),$$

quando $n\to\infty$, para qualquer $\varepsilon < \dfrac{t_2-t_1}{2}$.

Consequentemente, do Corolário 3.2.5, para ε suficientemente pequeno, obtemos

$$W_n(\,\cdot\,,\alpha_n+\cdot) \in L^\infty(0,\varepsilon;[H^1(0,L)]^2),$$

isso nos permite concluir que

$$Z(\,\cdot\,,\alpha+\cdot) \in L^\infty(0,\varepsilon;[H^1(0,L)]^2),$$

ou seja,

$$Z \in L^\infty(t_1',t_2';[H^1(0,L)]^2),$$

para $(t_1',t_2') = (\alpha,\alpha+\varepsilon)$.

Combinando o Corolário 4.2.2 com a afirmação 5, temos garantido que $Z\equiv 0$ em $(0,L)\times(t_1',t_2')$. Pelo enunciado da afirmação 5, é possível tomar t_2 arbitrariamente próximo de t_1, assim, pela continuidade de Z em $H^{-1}(0,L)$ obtemos $Z(\,\cdot\,,t)=0$, para todo $t\in(0,T)$. Portanto, $Z\in L^\infty(0,T;[H^1(0,L)]^2)$, como desejávamos.

Retornando ao objetivo principal da demonstração, vimos anteriormente que existe existe uma constante positiva $C(R,T) := \tilde{C}$, satisfazendo (39), logo do Lema 3.2.3 obtemos

$$-E(0) \geqslant -\tilde{C}I(\mathcal{U}) \quad \text{e} \quad \tilde{C}E(T) = \tilde{C}E(0) - \tilde{C}I(\mathcal{U})\ .$$

Definindo $\gamma := \dfrac{\tilde{C}-1}{\tilde{C}}$, segue que $E(T)\leqslant \gamma E(0)$. Note ainda que,

$$\|\mathcal{U}(\,\cdot\,,T)\|_X^2 \leqslant |S(T)|^2\|\mathcal{U}^0\|_X^2 \leqslant \gamma\|\mathcal{U}^0\|_X^2.$$

Das propriedades de semigrupos segue que

$$|S^2(T)| \leqslant \gamma \Rightarrow |S^2(kT)| = |S^{2k}(T)| \leqslant \gamma^k, k\in\mathbb{N}.$$

Assim para todo t tal que $kT \leqslant t \leqslant (k+1)T$, temos

$$E(t) \leqslant E(kT) \leqslant \gamma^k E(0) \leqslant \frac{1}{\gamma} E(0) e^{\frac{\ln \gamma}{T} t},$$

onde $0 < \gamma < 1$ e $k - 1 \leqslant \dfrac{t}{T} \leqslant k$. Defina $C := \dfrac{1}{\gamma}$, daí $\ln \gamma = -\ln C$, onde $C > 1$, denotemos $\alpha := \dfrac{\ln C}{T}$, para obter

$$E(t) \leqslant C E(0) e^{-\alpha t}, \ \forall \ t \in \mathbb{R}^+,$$

provando assim o resultado. ■

Note que a Proposição 4.3.2 garante a estabilidade do sistema em X localmente, uma vez que a constante α depende de R. Enunciaremos agora o caso global, principal resultado deste trabalho.

Teorema 4.3.3. *Seja $a = a(x)$ uma função de classe C^2 tal que $|a(x)| \leqslant C(1+|x|^p)$, $|a'(x)| \leqslant C(1+|x|^{p-1})$, $|a''(x)| \leqslant C(1+|x|^{p-2})$, $\forall \ x \in \mathbb{R}$, onde $C > 0$ é uma constante universal e $1 \leqslant p < 4$. Então, se b satisfaz (5), o sistema (1) – (3) é globalmente uniformemente exponencialmente estável.*

Demonstração:

Observe que pela Proposição 4.3.2, sempre que $E(0) \leqslant R$, existem $C(R) > 0$ e $\beta(R) > 0$ constantes tais que

$$E(t) \leqslant C(R) E(0) e^{-\beta(R) t}, \ \forall \ t > 0.$$

Defina, $T_R = \dfrac{1}{\beta(R)} \ln(RC(R))$. Fazendo a mudança de variável $s = t - T_R$, segue que

$$\tilde{E}(s) = E(t - T_R) \Rightarrow \tilde{E}(0) = E(T_R) \leqslant 1.$$

Pela Proposição 4.3.2, para $\tilde{E}(0) \leqslant 1$, existem constantes $C' > 0$ e $\alpha > 0$ tais que

$$\tilde{E}(s) \leqslant C' \tilde{E}(0) e^{-\alpha s}, \ \forall \ s > 0.$$

Assim, retornando a variável original e aplicando propriedades de semi-grupos, obtemos

$$E(t) \leqslant E(t - T_R) \leqslant C' E(T_R) e^{-\alpha(t - T_R)} \leqslant C' C'' E(0) e^{\alpha T_R} e^{-\alpha t} \leqslant C E(0) e^{-\alpha t},$$

para todo $t > 0$, onde α não depende de R. ■

REFERÊNCIAS

[1] Bergh, J., and Löfström, J. *"Interpolation spaces: an introduction"*. Vol. 223. Springer-Verlag, Berlin 1976.

[2] Bisognin, E., Bisognin, V., and Menzala, G. P., *"Exponential stabilization of a coupled system of Korteweg-de Vries equations with localized damping"*. Advances in Differential Equations, 8.4 (2003): 443-469.

[3] Bona, J. L., et al. *"A model system for strong interaction between internal solitary waves"*. Communications in mathematical physics, 143.2 (1992): 287-313.

[4] Bona, J. L., Sun, S. M., and Zhang, B. Y. *"A nonhomogeneous boundary-value problem for the Korteweg-de Vries equation posed on a finite domain"*. (2003): 1391-1436.

[5] Brezis, H., *"Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations"*. Springer Science & Business Media, 2010.

[6] Capistrano-Filho, R. A., *"Contrôle d'equations dispersives pour les ondes de surfaces"*. Phd Thesis, Institut Élie Cartan de Lorraine, Université de Lorraine, Nancy - France (2014).

[7] Coron, J. M., *"Control and nonlinearity"*. No. 136. American Mathematical Soc., 2007.

[8] Cavalcanti, M. M., e Cavalcanti, V. D., *"Introdução teoria das distribuições e aos espaços de Sobolev"*. Maringá: UEM (2009).

[9] Cazenave, T., and Haraux, A. *"An introduction to semilinear evolution equations.* Vol. 13. Oxford University Press on Demand, 1998.

[10] Davila, M. *"On the unique continuation property for a coupled system of Korteweg-de Vries equations"*. To appear, (1994).

[11] Folland, G. B., *"Real analysis: modern techniques and their applications"*. John Wiley & Sons, 2013.

[12] Gear, J. A., and Grimshaw, R., *"Weak and strong interactions between internal solitary waves"*. Studies in Applied Mathematics, 70.3 (1984): 235-258.

[13] Gomes, A. M., *"Semigrupos de operadores lineares e aplicações às equações de evolução.* No. 19. Universidade Federal do Rio de Janeiro, Centro de Ciências Matemáticas e da Natureza Instituto de Matemática, 1985.

[14] Korteweg, D. J., and De Vries, G., *"XLI. On the change of form of long waves advancing in a rectangular canal, and on a new type of long stationary waves"*. The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science, 39.240 (1895): 422-443.

[15] Linares, F., and Pazoto, A. F., *"On the exponential decay of the critical generalized Korteweg-de Vries equation with localized damping"*. Proceedings of the American Mathematical Society, 135.5 (2007): 1515-1522.

[16] Lions, J. L., and Magenes, E., *"Problèmes aux limites non homogènes et applications.* Volume I."(1968).

[17] Massarolo, C. P., Menzala, G. P., and Pazoto, A. F., *"Uniform stabilization of a class of coupled systems of KdV equations with localized damping"*. Quarterly of Applied Mathematics, 69.4 (2011): 723-746.

[18] Massarolo, C. P., and Pazoto, A. F., *"Uniform stabilization of a nonlinear coupled system of Korteweg-de Vries equations as a singular limit of the Kuramoto-Sivashinsky system"*. Differential and Integral Equations, 22.1/2 (2009): 53-68.

[19] Medeiros, L. A., e Miranda, M. M., *"Espaços de Sobolev"*. Rio de janeiro, IM-UFRJ (2000).

[20] Menzala, G. P., Vasconcellos, C. F., and Zuazua, E., *"Stabilization of the Korteweg-de Vries equation with localized damping"*. Quarterly of Applied Mathematics, 60.1 (2002): 111-129.

[21] Micu, S., and Ortega, J. H., *"On the controllability of a linear coupled system of Korteweg-de Vries equations"*. Mathematical and numerical aspects of wave propagation. 2000.

[22] Micu, S., Ortega, J. H., and Pazoto, A. F., *"On the controllability of a coupled system of two Korteweg-de Vries equations"*. Communications in Contemporary Mathematics, 11.05 (2009): 799-827.

[23] Nina, D., Pazoto, A. F., and Rosier, L., *"Global stabilization of a coupled system of two generalized Korteweg-de Vries type equations posed on a finite domain"*. Math. Control Relat. Fields, 1.3 (2011): 353-389.

[24] Pazoto, A. F., *"Unique continuation and decay for the Korteweg-de Vries equation with localized damping"*. SAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations, 11.3 (2005): 473-486.

[25] Pazy, A., *"Semigroups of Linears Operators and Applications to Partial Differential Equations"*. Springer New York, 1983.

[26] Rivera, J. E. M., *"Teoria das distribuiçoes e equaçoes diferenciais parciais"*. Laboratorio Nacional de Computação Cientifica, 1999.

[27] Rosier, L., and Zhang, B. Y., *"Global Stabilization of the Generalized Korteweg–de Vries Equation Posed on a Finite Domain"*. SIAM Journal on Control and Optimization, 45.3 (2006): 927-956.

[28] Rosier, L., *"Control of the surface of a fluid by a wavemaker"*. ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations, 10.3 (2004): 346-380.

[29] Rosier, L., *"Exact boundary controllability for the Korteweg-de Vries equation on a bounded domain"*. ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations, 2 (1997): 33-55

[30] Rosier, L., *"Exact Boundary Controllability for the Linear Korteweg–de Vries Equation on the Half-Line"*. SIAM Journal on Control and Optimization, 39.2 (2000): 331-351.

[31] Simon, J., *"Compact sets in the space $L^p(0,T;B)$"*. Annali di Matematica pura ed applicata, 146.1 (1986): 65-96.

[32] Temam, R. *"Navier-Stokes equations: theory and numerical analysis.* Vol. 343. American Mathematical Soc., 2001.

[33] Villagran, O. V., *"Gain of regularity of the solutions of a coupled system of equations of Korteweg-de Vries type"*. Diss. Ph. D. Thesis, Institute of Mathematics, Federal University of Rio de Janeiro, Brazil, 2001.