PRÉ CÁLCULO

para economistas

PET UFPE
ECONOMIA

Autores:
Caio de Holanda
caiohmedeiros@hotmail.com
Dante Pimentel
danteapp@bol.com.br
Filipe Cavalcanti
f.matheus.cavalcanti@gmail.com
Jaime Macedo
jaime.macedo95@hotmail.com
Laura Maranhão
lauramftorres@icloud.com
Paulo Silva
paulfsilva7@gmail.com
Felipe Borges
felipecborges2009@gmail.com

Índice

1 Funções e Introdução a Cálculo **5**
1.1 Definição 5
1.2 Características de uma função 5
1.3 Domínio e Imagem 6
1.4 Representações 7
1.4.1 Zeros da função 7
1.4.2 Intervalos de crescimento e decrescimento 8
1.4.3 Máximos e mínimos 8
1.5 Simetria 9
1.6 Tipos de função 10
1.6.1 Função Linear 10
1.6.2 Função quadrática 10
1.6.3 Função Cúbica 11
1.6.4 Função Racional 12
1.6.5 Função Raiz Quadrada 13
1.6.6 Função Valor Absoluto 13
1.7 Introdução a Cálculo 14
1.7.1 Limite 14
1.7.2 Derivadas 14

2 Potências e Logarítmos **24**
2.1 Potências 24
2.1.1 Definição 24
2.1.2 Tipos de potência 24
2.1.3 Propriedades 24
2.2 Logarítmos 24
2.2.1 Definição 24
2.2.2 Propriedades 25
2.2.3 Operações com logarítmos 25
2.3 Logarítmos usuais 25

3 Progressão Aritimética e geométrica **29**
3.1 Progressão Aritmética 29
3.2 Progressão Geométrica 30

4 Polinômios e frações parciais **34**
4.1 Definição 34
4.2 Funções polinomiais 34
4.3 Valor numérico de um polinômio 35
4.4 Raiz de um polinômio 35
4.5 Igualdade de polinômios 36
4.6 Operações com polinômios 36
4.7 Divisão de polinômios 36
4.7.1 Método da chave ou divisão euclidiana 37
4.8 Teorema de D'Alembert 38

4.9 Equações Algébricas . . . 38
4.10 Multiplicidade de uma raiz . . . 38
4.11 Frações Parciais . . . 39

5 Matrizes e Sistemas Lineares 43
5.1 Conceitos básicos de matrizes . . . 43
5.2 Tipos de Matrizes . . . 43
5.3 Operações Matriciais . . . 44
5.3.1 Igualdade de matrizes . . . 44
5.3.2 Soma e Subtração matricial . . . 44
5.3.3 Multiplicação por Escalar . . . 45
5.3.4 Multiplicação de Matrizes . . . 45
5.3.5 Transposição . . . 45
5.4 Determinantes . . . 45
5.4.1 Definição e Propriedades . . . 45
5.4.2 Cálculo de Determinante . . . 46
5.5 Matrizes Inversas . . . 47
5.5.1 Matriz Adjunta . . . 47
5.5.2 Matriz Inversa . . . 47
5.6 Sistemas Lineares . . . 47
5.6.1 Equação Linear . . . 47
5.6.2 Sistema Linear . . . 47
5.7 Matrizes Associadas a um Sistema Linear . . . 48
5.7.1 Operações Elementares . . . 48
5.7.2 Forma Escada . . . 49
5.8 Regra de Cramer . . . 49

6 Análise Combinatória 54
6.1 Arranjos fatoriais . . . 54
6.1.1 Arranjo com repetição . . . 54
6.1.2 Arranjo sem repetição . . . 54
6.2 Combinações . . . 54

7 Estatística Básica 57
7.1 Introdução à Estatística . . . 57
7.2 Estatística Descritiva . . . 57
7.2.1 Tipos de variáveis . . . 57
7.2.2 Medidas resumo . . . 58
7.2.3 Quantis e box-plot . . . 59
7.3 Probabilidades . . . 59
7.3.1 Definições . . . 59
7.3.2 Propriedades . . . 59

Capítulo 1

Funções e Introdução a Cálculo

Bibliografia recomendada:
STEWART, J. Cálculo, Volume I. Cengage Learning. 8ª ed. 2016.

1.1 Definição

O conceito de função está relacionado à ideia de associação de um elemento a outro, segundo uma regra específica.

Ex.: A população humana do mundo (P) depende do período de tempo (t).

$$P(1950) = 2.560.000.000 \text{ (P está em função de t)}$$

O resultado de f(x) é o valor da função no instante em que x varia, logo, percebe-se um relação na qual f(x) depende de x. Denominamos então f(x) como a variável dependente, e x como variável independente. Uma função pode ser vista como um algoritmo, ou uma máquina. Enquanto x estiver dentro do domínio da função ele é aceito como parâmetro, a maquina ou algoritmo produzirá um resultado f(x) de acordo com a lei específica.

- Envolve uma relação de dependência, um elemento depende de outro ou de vários;
- Para cada relação temos uma variável dependente e uma ou mais variáveis independentes;
  Ex.: $f(x, y, z) = z$;

Uma função é uma relação entre dois conjuntos quaisquer que associa a cada elemento do conjunto de partida um único elemento do conjunto de chegada.

- O conjunto de partida é denominado domínio da função
- O conjunto de chegada é denominado contradomínio da função
- Os elementos do contradomínio que estão associados em algum elemento do domínio constituem o conjunto imagem da função

Exemplo:
Dado um retângulo de base x e altura x + 2, determine a função f(x) que expressa a área do retângulo. Sabendo que a área de um retângulo é o produto da base pela altura, podemos escrever a função f(x) como: $f(x) = (x) \cdot (x + 2)$.: $f(x) = x^2 + 2x$
Ou seja, a função f(x) que expressa a área do retângulo especificado na questão é $f(x) = x^2 + 2x$.

1.2 Características de uma função

Seja D o domínio e C o contradomínio de uma função f, que associa a $x \in D$ um valor $y \in C$. Nesse caso:

- Todo elemento de D deve estar associado a um elemento de C. Ou seja, f deve estar definida para todo o elemento x do domínio D.
- Nem todo elemento de C precisa estar associado a um elemento de D.
- Um elemento de D não pode estar associado a dois elementos de C. Ou seja, a função não pode fornecer dois valores de y para um único x.
- Um elemento de C pode estar associado a mais de um elemento de D. Ou seja, dois valores de x podem estar associados a um mesmo y.

1.3 Domínio e Imagem

Domínio é o conjunto de todos os valores de x para os quais f está definida.
Dada uma função f, com domínio D, denominamos conjunto imagem (ou simplesmente Im) o conjunto de todos os valores f(x) obtidos a partir de $x \in D$.

Exemplo 1:
Determine o domínio da função: $f(x) = \frac{1}{(x^2-1)}$
O domínio da função é o conjunto de todos os valores de x para os quais f(x) está definida. Como a única exigência é que o denominador desta expressão não seja zero, temos
$x^2 - 1 \neq 0 \Rightarrow x^2 \neq 1 \Rightarrow x \neq \pm 1$
Logo, o domínio de f é
$D = \{x \in \mathbb{R} | x \neq 1 \text{ e } x \neq -1\}$

Exemplo 2:
Para a função abaixo, determine o conjunto imagem.
$f(x) = 2x^2 + 1$
A função f(x) pode ser calculada para qualquer x real. Desse modo, podemos afirmar que $D = \mathbb{R}$. Por outro lado, como $x^2 \geq 0$ para todo x real, concluímos que $2x^2 + 1 \geq 1$. Assim,
$Im = \{y \in \mathbb{R} | y \geq 1\}$

Exemplo 3:
Durante um programa nacional de imunização da população contra uma forma virulenta de gripe, representantes do Ministério da Saúde constataram que o custo de vacinação de x% da população era de aproximadamente $f(x) = \frac{150x}{(200-x)}$ milhões de reais.
a) Qual é o domínio da função?
Dado que a função é representada por uma fração, sabemos que o denominador não pode ser nulo. Daí:
$200 - x \neq 0$
$x \neq 200$
Ou seja: $Dom(f) = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 200\}$

b) Qual foi o custo para que os primeiros 50% da população fossem vacinados?
Como queremos saber o custo para vacinar 50% da população, basta calcularmos f(50):
$f(50) = (150 \cdot 50)/(200 - 50) \Rightarrow (150 \cdot 50)/150 \Rightarrow 50$
Sendo assim, o custo para vacinar os primeiros 50% da população é de R$50 milhões.

c) Qual a porcentagem vacinada da população sabendo que foram gastos R$37,5 milhões?
Se o custo de vacinar determinada porcentagem da população foi de R$37,5 milhões, sabemos que f(x) = 37,5. Daí:
37,5 = 150x/(200-x)
$150x = 37,5 \cdot (200 - x) \Rightarrow 150x = 7500 - 37,5x$
$187,5x = 7500 \Rightarrow x = 40$
Concluímos que 40% da população foi vacinada quando foram gastos R$37,5 milhões.

1.4 Representações

A **expressão matemática** de uma função f que a cada ponto x de um conjunto A associa um ponto f(x) de um conjunto B é dada por:
f: A→B
$x \mapsto f(x)$
Neste caso, A é domínio e B o contra-domínio.

A **representação gráfica** de uma função f é um subconjunto do plano xy dado por:
$G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = f(x)\}$

- O gráfico é posicionado em um sistema de eixos cartesianos, onde o eixo horizontal contém a variável independente x e o eixo vertical contém a variável dependente y = f(x)
- O domínio é o conjunto de valores sobre o eixo x para os quais a função está definida.
- O conjunto imagem é o conjunto de valores do eixo y associados a pontos do gráfico.
- Os eixos se cruzam na origem e o sentido de crescimento se dá da esquerda para direita e de baixo para cima.

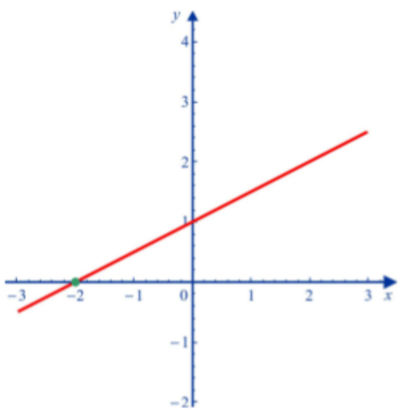
A representação gráfica permite saber se é uma representação de uma função ou não. Para saber isso basta traçarmos retas paralelas ao eixo y e ver quantas vezes estas retas interceptam a curva. Se interceptar mais de uma vez conclui-se que não se trata do gráfico de uma função.

Teste da Reta Vertical: Uma curva no plano xy é o gráfico de uma função de x se e somente se nenhuma reta vertical cortar a curva mais de uma vez.

1.4.1 Zeros da função

Os valores de x que satisfazem a equação $f(x) = 0$ são chamados de zeros de f. Esses correspondem aos interceptos-x do gráfico da função.

Exemplo: Determine graficamente os zeros da função: $f(x) = \frac{x}{2} + 1$ Ao satisfazer f(x) = 0 encontram-se os zeros da função. Daí $\frac{x}{2} + 1 = 0 \Rightarrow \frac{x}{2} = -1 \Rightarrow x = -2$
Concluímos que -2 é zero da função.
Graficamente, temos:



(a) $f(x) = \frac{x}{2} + 1$

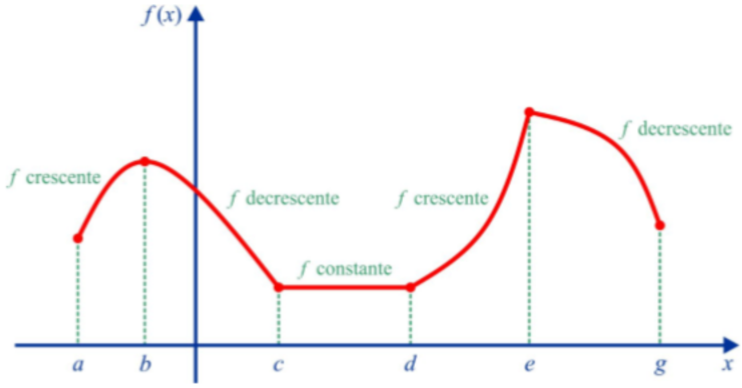
1.4.2 Intervalos de crescimento e decrescimento

Seja f uma função definida em um intervalo D. Dizemos que

- f é crescente em D se, dados quaisquer x_1 e x_2 em D, tais que $x_1 < x_2$, tivermos $f(x_1) < f(x_2)$;
- f é decrescente em D se, dados quaisquer x_1 e x_2 em D, tais que $x_1 < x_2$, tivermos $f(x_1) > f(x_2)$;
- f é constante em D se, dados quaisquer x_1 e x_2 em D, tivermos $f(x_1) = f(x_2)$;

O gráfico abaixo mostra os intervalos de crescimento e decrescimento da função f. A partir dele, podemos inferir que

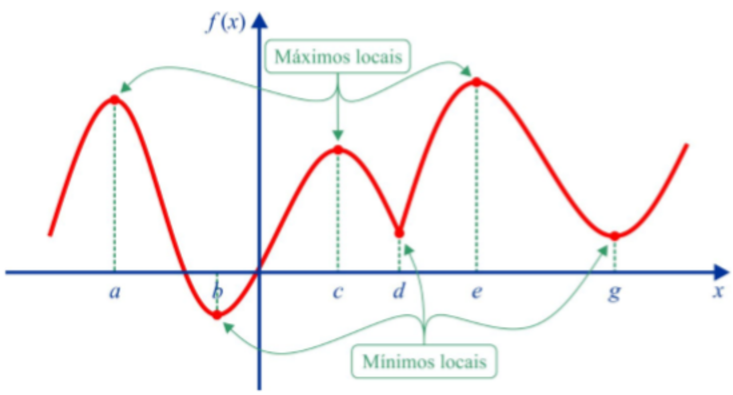
- f é crescente no intervalo (a,b) e no intervalo (d,e);
- f é decrescente no intervalo (b,c) e no intervalo (e,g);
- f é constante em [c,d];



1.4.3 Máximos e mínimos

- O valor $f(\bar{x})$ é um máximo local – ou máximo relativo – de f se existe um intervalo (a,b) contendo $\bar{x}$, tal que: $f(\bar{x}) \geq f(x)$ para todo $x \in (a, b)$. O valor $\bar{x}$ é chamado ponto de máximo local
- O valor de $f(\bar{x})$ é um mínimo local – ou mínimo relativo – de f se existe um intervalo (a,b), contendo $\bar{x}$, tal que:$f(\bar{x}) \leq f(x)$ para todo $x \in (a, b)$. O valor de $\bar{x}$ é chamado ponto de mínimo local.

Ao nos referirmos a valores de máximo e mínimo, usamos os adjetivos local e relativo para deixar claro que a análise cabe apenas a uma vizinhança de $\bar{x}$ O gráfico abaixo mostra os valores de máximos locais – **a**, **c** e **e** – e os de mínimos locais – **b**, **d** e **g**.



1.5 Simetria

Alguns gráficos de funções possuem uma característica geométrica denominada simetria. O gráfico da função $f(x) = x^2$, por exemplo, é simétrico em relação ao eixo y. Ou seja, a parte da curva que está à esquerda do eixo é uma imagem refletida da parte que está à direita. Algebricamente falando, a simetria é caracterizada por:

$$f(x) = f(-x)$$

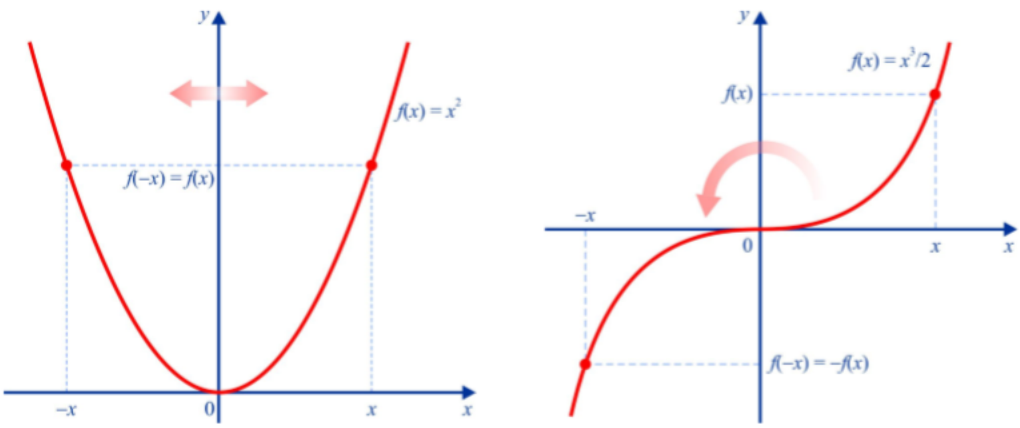
Função Simétrica Par: Uma função cujo gráfico é simétrico com relação ao eixo y é denominada par.

Outra simetria comum é a que ocorre em relação à origem. Nesse caso, a curva não se altera caso viremos o gráfico de cabeça para baixo. Algebricamente, corresponde a dizermos que:

$$f(x) = -f(-x)$$

Função Simétrica ímpar: Uma função cujo gráfico é simétrico com relação a origem é denominado ímpar.

Resumindo, uma função f é par (a) se seu gráfico é simétrico em relação ao eixo y e uma função f é ímpar (b) se seu gráfico é simétrico em relação a origem:



(a) Função par. (b) Função ímpar.

Exemplo:
Verifique quais funções abaixo são pares e quais são ímpares.
$a) f(x) = x^3 - 16x$
$b) f(x) = x^4 - 12x + 10$
$c) f(x) = x^3 - 2x^2 + 1$

a) Para testarmos a paridade da função, começamos calculando o f(-x). Se o resultado for igual ao f(x) sabemos que a função é par, e se for igual a –f(x) é ímpar. Então:
$f(-x) = (-x^3) - 16(-x)$
$= -x^3 + 16x$
$= -(x^3 - 16x)$, logo, $= -f(x)$
Como f(-x)= -f(x), a função é ímpar.

b) De modo análogo como fizemos na letra a), teremos:
$f(-x) = (-x)^4 - 12(-x)^2 + 10$
$= x^4 - 12x^2 + 10$, logo, $= f(x)$
Como f(-x)=f(x), a função é par.

c) Do mesmo modo, faremos:
$f(-x) = (-x)^3 - 2(-x)^2 + 1$
$= -x^3 - 2x^2 + 1$
Como f(x) não é igual a –f(x) ou a f(-x), a função nem é par nem é ímpar.

1.6 Tipos de função

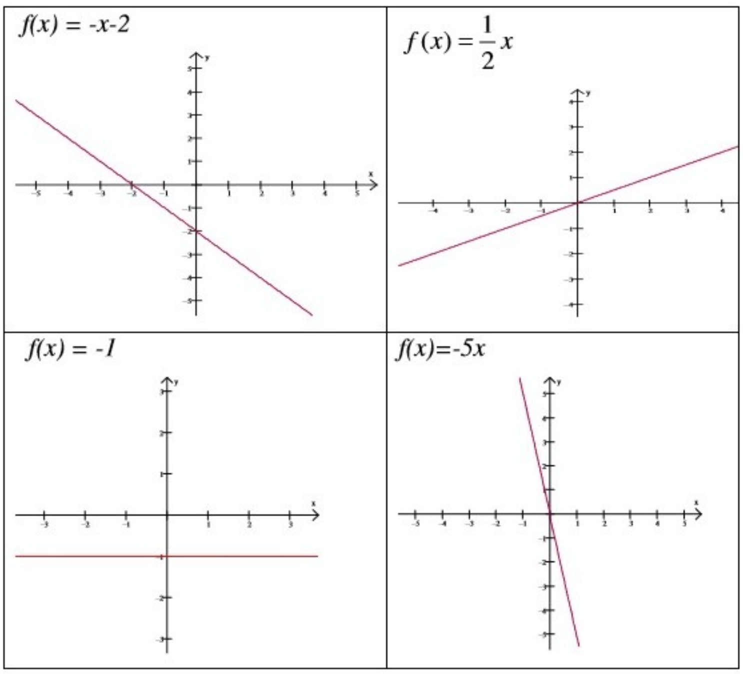
1.6.1 Função Linear

Funções lineares são funções cujos gráficos descrevem retas no plano e são expressas por:
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto ax + b$
Sendo a e b constantes e sendo o domínio todos os reais.

- Se b = 0 o gráfico é uma reta passando pela origem.
- Se a = 0 o gráfico é uma reta paralela ao eixo x, interceptando o eixo y em b. Neste caso, é dita uma **função constante**
- **a** é dito o **coeficiente angular** da reta - se for positivo a reta tem sentido crescente, caso contrário decrescente - e **b** é o **coeficiente linear**.
- O coeficiente angular é definido como sendo:

$$a = \frac{(y_2 - y_1)}{(x_2 - x_1)}$$

A resolução pode ser dada por: $x = \frac{-b}{a}$ **Exemplos:**



1.6.2 Função quadrática

Funções quadráticas são funções cujos gráficos são parábolas e são expressas por:
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto ax^2 + bx + c$

- onde a, b e c são constantes e $a \neq 0$. $Dom(f) = \mathbb{R}$.
- $a > 0$ indica uma parábola voltada para cima.
- $a < 0$ indica uma parábola voltada para baixo.

- $\delta < 0$ indica duas raízes reais e distintas.
- $\delta = 0$ indica duas raízes reais e iguais.
- $\delta < 0$ indica que não há raízes reais.

$$a = \frac{(y_2 - y_1)}{(x_2 - x_1)}$$

Método de resolução pode ser dado através da Fórmula de Bhaskara:

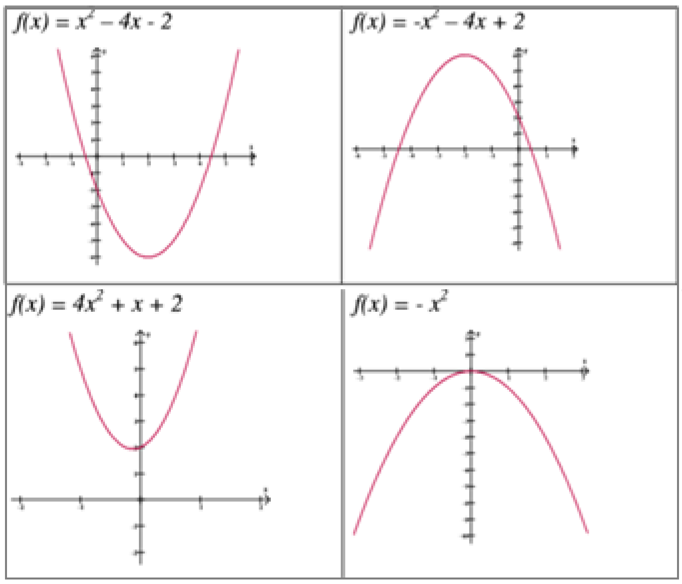
$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2a}$

ou, através das relações de Girard ou sua forma simplificada conhecida como soma e produto:

Soma: $x1 + x2 = \frac{-b}{a}$
Produto: $x1 \cdot x2 = \frac{c}{a}$

Exemplo: $f(x) = x^2 – 5x + 6$
A soma precisa ser o valor de $\frac{-b}{a}$, ou seja, 5.
O produto deve ser correspondente a $\frac{c}{a}$, ou seja, 6.
Logo, os números correspondentes são: 2 e 3;
Pois sua soma equivale a 5 e a seu produto a 6, o que satisfaz a premissa.

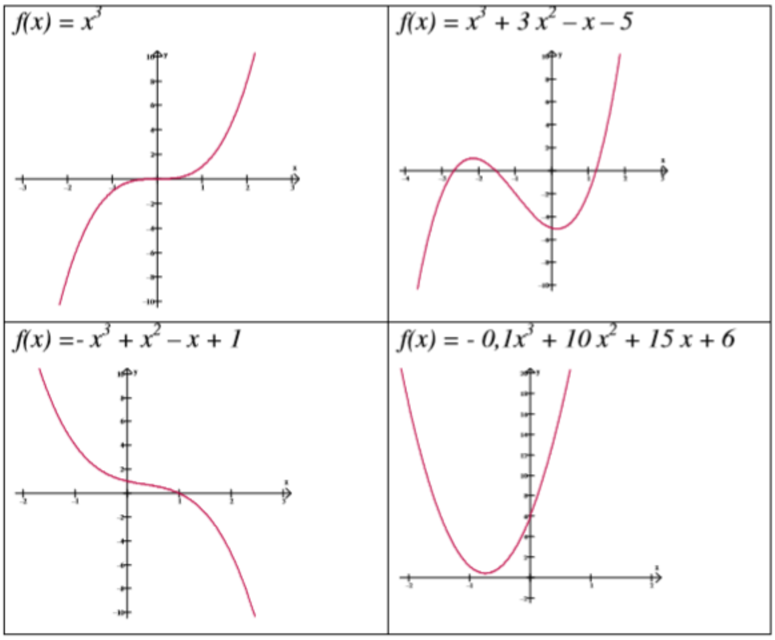
Exemplos:



1.6.3 Função Cúbica

São funções cujos gráficos recebem o mesmo nome e são expressas por:
$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
$x \mapsto ax^3 + bx^2 + cx + d$
Onde a, b, c e d são constantes e $a \neq 0$. $Dom(f) = \mathbb{R}$.
Suas resoluções são dadas através das relações de Girard e do cálculo.

Exemplos:



1.6.4 Função Racional

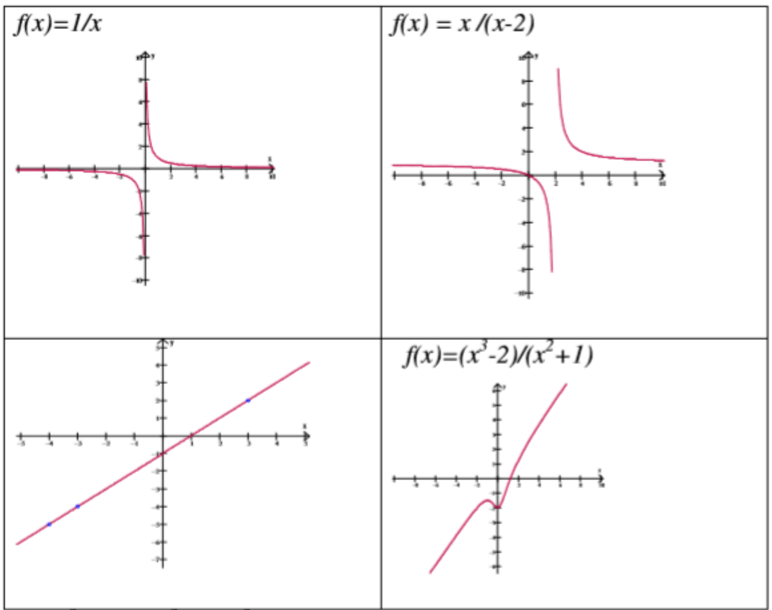
São funções dadas pelo quociente entre dois polinômios, ou seja:

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

onde P(x) e Q(x) são polinômios. $Dom(f) = \{x \in \mathbb{R} : Q(x) \neq 0\}$

Observe que ao trabalharmos com funções racionais devemos ter cuidado com o domínio de definição da função, uma vez que o denominador não pode se anular. Ou seja, as funções não são definidas para denominadores iguais a 0.

Exemplos:

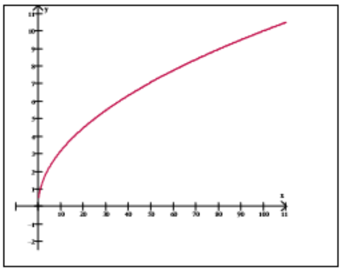


$f(x) = (x^2+3x-4)(x^2-9)/(x^2+x-12)(x+3)$

1.6.5 Função Raiz Quadrada

São funções definidas por:
$f(x) = \sqrt{x}$
onde $Dom(f) = \{x \in R : x \geq 0\}$
Observe que ao lidarmos com funções de raiz quadrada precisamos atentar para o fato de que o domínio da função abrange apenas os números reais maiores ou iguais a 0. Ou seja, as funções de raiz quadrada não são definidas para denominadores menores de 0.

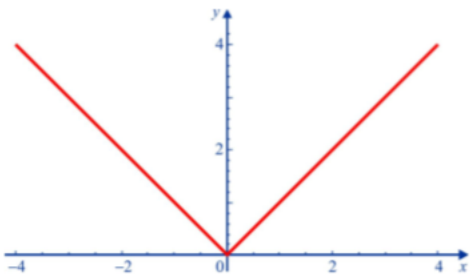
Exemplos:



1.6.6 Função Valor Absoluto

A função valor absoluto, ou função modular, é uma função definida por partes, dada por:
$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0 \\ -x, & \text{se } x < 0 \end{cases}$$
Também apresentamos a essa função por meio da notação $f(x) = |x|$.

Exemplo:



Características da função modular

- O domínio da função é $\mathbb{R}$.
- O conjunto imagem é $[0, \infty)$.
- Há um zero em $x = 0$.
- A função é decrescente em $(-\infty, 0)$ e crescente em $(0, \infty)$.
- Não há máximos locais.
- Há um único ponto de mínimo local, em $x = 0$.
- A função é par

1.7 Introdução a Cálculo

1.7.1 Limite

A medida que tomamos o valor arbitrariamente de x próximo a a, o limite de f(x) torna-se arbitrariamente próximo a L.
Definição: $\lim_{x \to ä"} f(x) = L$
Exemplo:

$$\lim_{x \to \acute{2}'} x^2 - x + 2 = 4$$

x	$f(x)$	x	$f(x)$
1,0	2,000000	3,0	8,000000
1,5	2,750000	2,5	5,750000
1,8	3,440000	2,2	4,640000
1,9	3,710000	2,1	4,310000
1,95	3,852500	2,05	4,152500
1,99	3,970100	2,01	4,030100
1,995	3,985025	2,005	4,015025
1,999	3,997001	2,001	4,003001

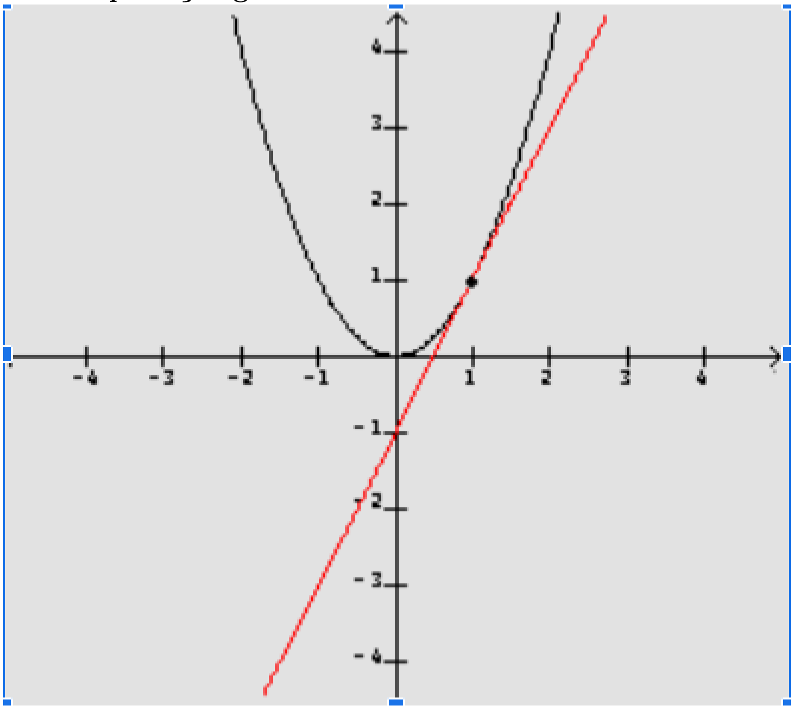
1.7.2 Derivadas

O calculo diferencial calcula o valor da inclinação da reta tangente num determinado ponto.

Definição: $f'(x) = \frac{f(x2)-f(x1)}{x2-x1} talque, x2 - x1 = h$

$\lim_{h \to ö"} \frac{h+x1-f(x1)}{h} = f'(x)$ no ponto x1.

Interpretação geométrica:



Desenhando uma reta secante, de modo que, x2 tenda a x1 no limite, o coeficiente angular dela tenderá ao coeficiente angular da reta tangente no ponto x1.

Exercícios Propostos

1. Calcule as funções nos pontos indicados.
a) $f(x) = -2(x+1)$
$f(-2),\ f(-1),\ f(0),\ f(1),\ f(a),\ f(-a)$

b) $g(y) = 3(y-2)^2$
$g(-2),\ g(-1),\ g(0),\ g(1),\ g(2)$

c) $h(x) = \frac{x+1}{x^2-1}$
$h(0),\ h(-2),\ h(1/2),\ h(a),\ h(a-1)$

d) $f(w) = w - \frac{2}{w}$
$f(-1),\ f(1/2),\ f(x),\ f(1/x),\ f(2z)$

e) $f(y) = \frac{1}{y^2}$
$f(-1),\ f(3),\ f(1/5),\ f(2x),\ f(1/x^2)$

2. Determine o domínio das funções.
a) $f(x) = 3x+2$
b) $f(x) = \frac{1}{x-2}$
c) $f(x) = \frac{1}{2x+5}$
d) $g(x) = \sqrt{x+9}$
e) $f(x) = \sqrt{5-2x}$
f) $f(x) = \sqrt{4x-3}$
g) $p(x) = \sqrt[3]{x-2}$

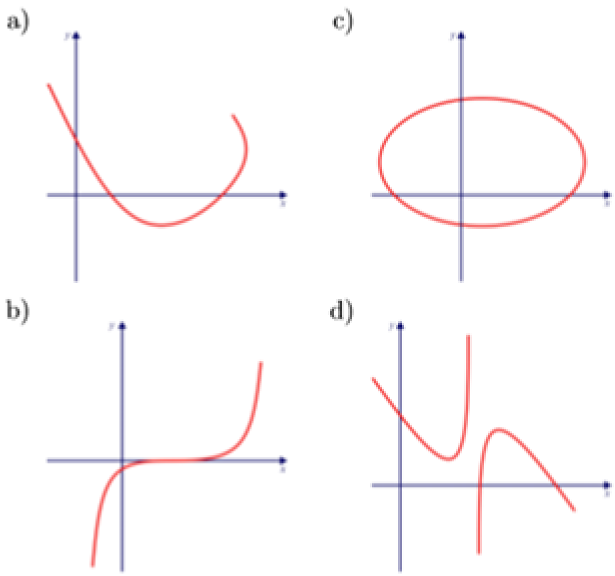
h) $f(x) = \frac{5x}{5x-13}$
i) $g(x) = \frac{3x+1}{4x+6}$
j) $h(x) = \frac{1}{2x-1}$
k) $f(x) = \frac{\sqrt{3-x}}{x+1}$
l) $f(x) = \frac{\sqrt{1-5x}}{x^2+4}$
m) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-3}}$
n) $f(x) = \frac{x-1}{\sqrt{2x-7}}$
o) $f(x) = \frac{1}{|x|-6}$
p) $f(x) = \frac{1}{|x-4|+2}$
q) $f(x) = \sqrt{16-x^2}$
r) $f(x) = \sqrt{x-1} + \sqrt{5-x}$

3. Na superfície do oceano, a pressão da água é a mesma do ar, ou seja, 1atm. Abaixo da superfície da água, a pressão aumenta 1atm a cada 10m de aumento na profundidade.
a) Escreva uma função P(x) que forneça a pressão (em atm) com relação à profundidade (em m). Considere que x=0m na superfície da água do mar.
b) Determine a pressão a 75m de profundidade

4. Um instalador de aparelhos de ar condicionado cobra R$ 50,00 pela visita, além de R$ 75,00 por hora de serviço (sem incluir o custo do material por ele utilizado)
a) Escreva uma função C(t) que forneça o custo de instalação de um aparelho ar condicionado, em relação ao tempo gasto pelo instalador, em horas.
b) Se a instalação de um aparelho consumir 3,5 horas, qual será o custo da mão de obra?

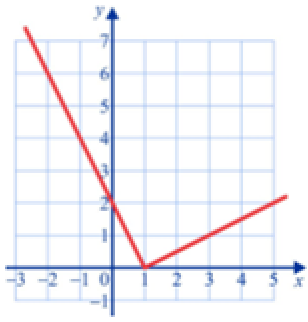
5. Um notebook custa R$ 2.900,00 e perde 12% de seu valor inicial a cada ano de uso.
a) Escreva a função V(t) que fornece o valor do notebook após t anos de uso
b) Determine após quantos anos de uso o valor do notebook chega a R$ 800,00, momento em que é conveniente trocá-lo

6. Usando o teste da reta vertical, indique quais gráficos representam funções

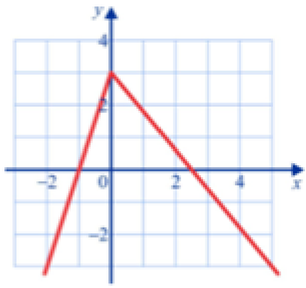


7. O gráfico de uma função f é mostrado abaixo. Com base no gráfico, determine
a) os valores de f(-2), f(0) e f(4)
b) o conjunto imagem de f
c) os pontos em que f(x) = 2
d) os pontos em que f(x) < 1

e) os pontos de máximo e mínimo local
f) os intervalos de crescimento e decrescimento



8. O gráfico de uma função f é mostrado abaixo. Com base no gráfico, determine
a) O conjunto imagem de f
b) Os pontos zeros de f
c) Os pontos em que $-3 \leq f(x) \leq 0$
d) Os pontos de máximo e mínimo local
e) Os intervalos de crescimento e decrescimento



9. Dá-se o nome de taxa de ocupação ao percentual de pessoas ocupadas em relação ao número de pessoas dispostas a trabalhar. O gráfico abaixo mostra a taxa de ocupação na região metropolitana de São Paulo, em junho de cada ano, segundo o IBGE.

a) Determine entre quais anos consecutivos houve maior aumento do desemprego em junho, ou seja, a maior variação negativa da taxa de ocupação.
b) Determine entre quais anos consecutivos houve o maior aumento na taxa de ocupação em junho. Calcule a variação da taxa nesse caso.
c) Forneça os intervalos de crescimento e decrescimento da taxa de ocupação.
d) Determine quais anos apresentaram a maior e a menor taxa de ocupação em junho.

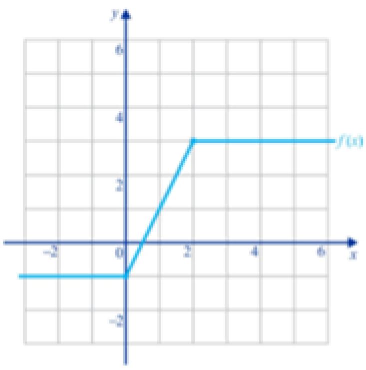
10. Determine algebricamente se as funções abaixo são pares ímpares ou não possuem simetria.
a) $f(x) = 4$
b) $f(x) = -2x$

c) $f(x) = 2x - 1$
d) $f(x) = x^2 - 3$
e) $f(x) = x^2 - 4x + 4$
f) $f(x) = -x^3 + 2x$
g) $f(x) = 2x^5 - x^3 + x$
h) $f(x) = x^6 - 3x^4 + x^2 - 15$
i) $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$
j) $f(x) = \sqrt[3]{x}$
k) $f(x) = x\sqrt{x}$
l) $f(x) = |x|$

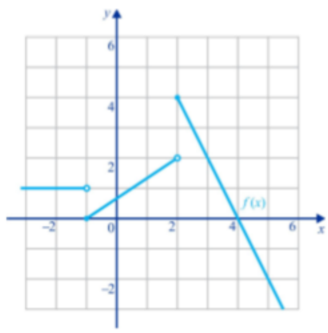
11. Esboce o gráfico de cada uma das funções abaixo com base em uma tabela de valores da função em pontos que você escolheu.
a) $f(x) = 3 - 2x$
b) $f(x) = 2x^2 - 3$
c) $f(x) = (x - 1)^2$
d) $f(x) = 1 + \sqrt{x}$
e) $f(x) = \sqrt{1 + x}$
g) $f(x) = 2/x$

12. Trace o gráfico das funções abaixo para $x \in [-2, 4]$
a) $f(x) = \begin{cases} 1 - x, & \text{se } x \leq 2 \\ x, & \text{se } x > 2 \end{cases}$
b) $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x < 0 \\ -1, & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$
c) $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x < 1 \\ x^2 - 1, & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$

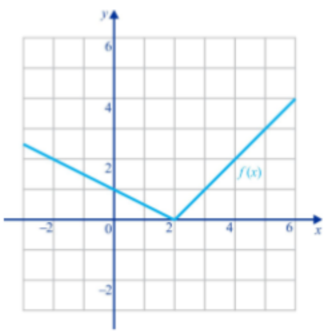
13. As figuras abaixo mostram os gráficos de funções definidas por partes. Escreva a expressão de cada função.
a)



b)



c)



14. A geração de energia eólica no Brasil saltou de 342 GWh em 2006 para 2177 GWh em 2010.
a) Escreva uma função linear (ou afim) E(t) que forneça aproximadamente a energia gerada (em GWh) com relação ao número de anos, t, decorridos desde 2006
b) Esboce o gráfico de E(t)

15. Explique com suas palavras o significado de:

$$\lim_{x\to} f(x) = 15$$

16. Resolva a equação abaixo:

$$\lim_{x\to} x^2 + 5x - 4$$

17. Dada a equação abaixo, resolva:

$$\lim_{x\to} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$$

18. Sendo $f(x) = x^2$, calcule a derivada nos pontos:
A)(2,4)
B)(3,9)
c)(1,1)

Respostas

1.
a) 2; 0; -2; -4; -2 -a; -2+a
b) 48; 27; 12; 3; 0
c) -1 ; -1/3 ; -2 ; (1+a)/($a^2 - 1$); 1/(a-2)
d) 1; -7/2; x − 2/x; -2x + 1/x; 2z − 1/z
e) 1; 1/9; 25; 1/4x^2; x^4

2.
a) $\mathbb{R}$
b) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 2\}$
c) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq -5/2\}$
d) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -9\}$
e) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 5/2\}$
f) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 3/4\}$
g) $\mathbb{R}$
h) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 13/5\}$
i) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq -3/2\}$
j) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 1/2\}$
k) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 3, x \neq -1\}$
l) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 1/5\}$
m) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0, x \neq 9\}$
n) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 7/2\}$
o) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq -6 \text{ e } x \neq 6\}$

p) $\mathbb{R}$
q) $\{x \in \mathbb{R} \mid -4 \leq x \leq 4\}$
r) $\{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x \leq 5\}$

3. a) P(x) = 1 + x/10 (considerando que a profundidade é um número positivo) b) 8,5 atm

4. a) C(t) = 50 + 75t b) R$ 312,50

5. a) V(t) = 2900 – 348t b) Após cerca de 6 anos de uso

6. a) Não representa função b) Representa função c) Não representa função d) Representa função

7. a) f(-2) = 6; f(0) = 2; f(4) = 1,5 b) $Im = \{y \in \mathbb{R} | y \geq 0\}$ c) x=0 e x=5 d) $0,5 < x < 3$ e) x=1 é ponto de mínimo local, com f(1) = 0. Não há máximo local. f) f é decrescente em $(-\infty, 1)$ e crescente em $(1, \infty)$

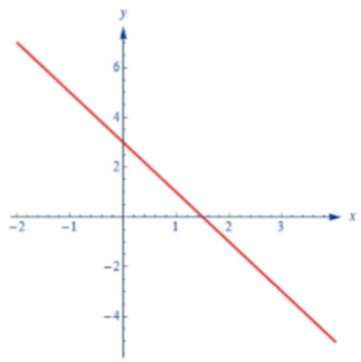
8. a) $Im = \{y \in \mathbb{R} | y \leq 3\}$ b) x = -1 e x = 2,5 c) [-2,-1] ∩ [2,5;5] d) x=0 é ponto de máximo local, com f(0) = 3. Não há mínimo local. e) f é crescente em $(-\infty, 0)$ e decrescente em $(0, \infty)$

9. a) Entre 2014 e 2015 b) Entre 2004 e 2005. Nesse período, a taxa de ocupação subiu 2,8% c) De 2008 a 2015 d) Crescente de 2003 a 2005, de 2006 a 2008, de 2009 a 2012 e de 2013 a 2014. Decrescente entre 2002 e 2003, 2005 e 2006, 2008 e 2009, 2012 e 2013 e entre 2014 e 2015 e) A menor taxa de ocupação ocorreu em 2003 (85,5%) e a maior em 2014 (94,9%)

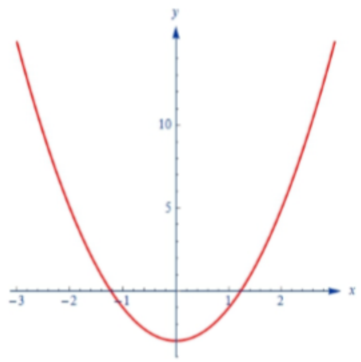
10. a) Par b) Ímpar c) Nada d) Par e) Nada f) Ímpar g) Ímpar h) Par i) Par j) Ímpar k) Nada l) Par

11.

a)

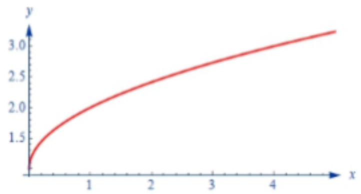


b)

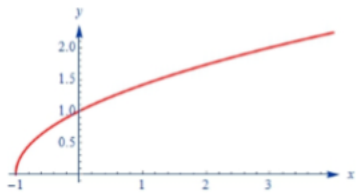


c)

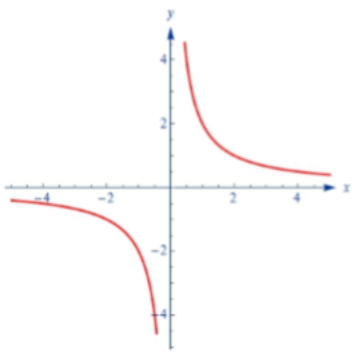
d)



e)

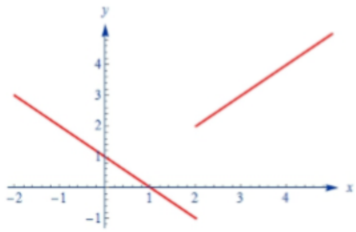


f)

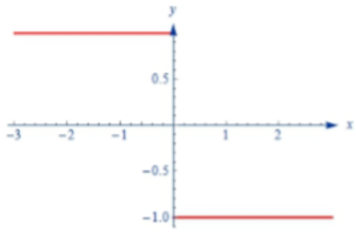


12.

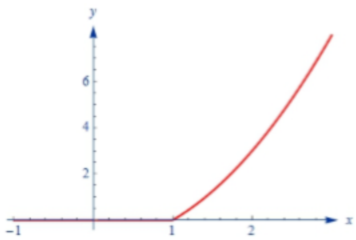
a)



b)



c)



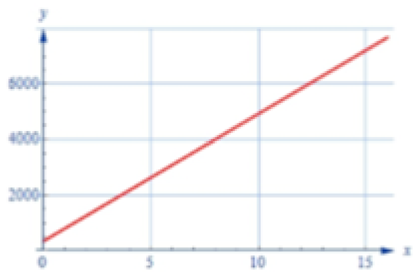
13.

a) $f(x) = \begin{cases} -1, & \text{se } x < 0 \\ 2x - 1, & \text{se } 0 \leq x < 2 \\ 3, & \text{se } x \geq 2 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x < -1 \\ \frac{2}{3}x + \frac{2}{3}, & \text{se } -1 \leq x < 2 \\ 8 - 2x, & \text{se } x \geq 2 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} -\frac{x}{2} + 1, & \text{se } x < 2 \\ x - 2, & \text{se } x \geq 2 \end{cases}$

14. a) E(t) = 342 + 458,75t



b)

15.
A medida que o x tende a 2, o f(x) tende a 15, até que possamos dizer que o limite de f(x) tendendo a dois seja igual a 5.

16.
A solução desse limite é 20.

17.
A solução desse limite é 4.

18.
A) 4
B) 6
C) 2

Capítulo 2

Potências e Logarítmos

2.1 Potências

2.1.1 Definição

$$a^n = a \cdot a \cdot a \cdot a...$$

a = base
n = expoente
$a \cdot a \cdot a \cdot a...$ = produto de n fatores iguais que gera como resultado a potência

2.1.2 Tipos de potência

- Expoente zero
  $a^0 = 1$
- Expoente positivo
  $a^n = a \cdot a \cdot a \cdot a \; ...$
- Expoente negativo
  $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$
- Expoente fracionário
  $x^{\frac{a}{b}} = \sqrt[b]{x^a}$

2.1.3 Propriedades

- Produto de potências de mesma base
  $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$
- Divisão de potências de mesma base
  $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$
- Potência da potência
  $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$
- Potência do produto
  $(a \cdot b)^n = (a^n \cdot b^n)$

2.2 Logarítmos

2.2.1 Definição

$$log_a(b) = x \Leftrightarrow a^x = b$$

a = base do logarítmo
b = logaritmando
x = logaritmo

2.2.2 Propriedades

- $\log_a(1) = 0$
- $a^{\log_a(b)} = b$
- $\log_a(a^m) = m$
- $\log_a(a) = 1$
- $\log_a(b) = \log_a(c) \Rightarrow b = c$

2.2.3 Operações com logarítmos

- Logarítimo do produto
  $\log_b(xy) = \log_b(x) + \log_b(y)$
- Logarítimo do quociente
  $\log_b(\frac{x}{y}) = \log_b(x) - \log_b(y)$
- Logarítimo da potência
  $\log_b(x^p) = p \cdot \log_b(x)$
- Mudança de base
  $\log_b(x) = \frac{\log_k(x)}{log_k(b)}$

2.3 Logarítmos usuais

Os logaritmos mais comumente empregados possuem uma notação particular, para facilitar seu uso. São eles:

- O logaritmo na base 10, também chamado logaritmo comum ou decimal, que é apresentado sem a indicação da base.$log(x) = \log_{10}(x)$
- O logaritmo na base e, também chamado logaritmo natural ou Neperiano, que é representado por ln. $ln(x) = \log_e(x)$

Exercícios Propostos

1. Calcule o valor da expressão C = $(10^{-3} \cdot 10^5) : (10x10^4)$

2. Classifique como verdadeiro ou falso:
a) $5^7 \cdot 5^2 = 5^9$
b) $3^9 : 3^4 = 3^5$
c) $8^5 : 8^{-3} = 8^2$
d) $7^5 - 7^3 = 7^2$
e) $7^{6-5} = 7^6/7^5$
f) $(7^3)^2 = 7^5$
g) $(5+2)^2 = 5^2 + 2^2$
h) $3^2 + 3^3 + 3^5 = 3^{10}$

3. Simplifique, aplicando a propriedades de potência:
a) $(3 \cdot 7)^5 \cdot (3 \cdot 7)^2 =$
b) $(5xy^2) \cdot (2x^2y^3) =$
c) $(a^2.b)^2 \cdot (a \cdot b)^3 =$
d) $(7xy^2)^2 \cdot (x^3y^2)^4 =$

4. Simplifique a expressão $\frac{(a^3)(a^3)^2b^3 \cdot b^7}{a^5 \cdot b^3}$

5. Simplifique a expressão $\frac{(-5)^2-3^2+(\frac{2}{3})^0}{3^{-2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{2}}$

6. Supondo que $x \neq 0$ e $y \neq 0$, simplifique: $(x^{-2})^1 + (y^2)^{-1} + 2(xy^1)^{-1}$

7. Reescreva a expressão na forma $k \cdot x^n$: $2\sqrt{x} \cdot 4x^{-5/2}$

8. Calcule pela definição os seguintes logaritmos:
a) $\log_2 \frac{1}{8}$
b) $\log_8 4$
c) $\log_{0,25} 32$

9. Calcule pela definição os seguintes logaritmos:
a) $\log_{1/2} 8$
b) $\log_{1/4} 32$
c) $\log_{25} 0,008$

10.
Calcule a soma S nos seguintes casos:
a) $S = \log_{100} 0,001 + \log_{1,5} 4/9 - \log_{1,25} 0,64$
b) $S = \log_8 \sqrt{2} + \log_8 \sqrt{8}$
c) $S = \log_{\sqrt[8]{9}} \sqrt{1/27} - log_{\sqrt[8]{0,5}} \sqrt{8} + \log_{\sqrt[8]{100}} \sqrt[6]{0,1}$

11. Calcule o valor de S em: S= $\log_4(\log_3 9) + \log_2(\log_{81} 3) + \log_{0,8}(\log_{16} 32)$

12. Calcular o valor de:
a) $8^{\log_2 5}$
b) $3^{(1+\log_3 4)}$

13. Desenvolva aplicando as propriedades dos logaritmos (a, b e c são reais positivos):
a)$\log_2(\frac{2ab}{c})$
b) $\log_3(\frac{a^3b^2}{c^4})$
c) $\log(\frac{a^3}{b^2\sqrt{c}})$

14. Qual é a expressão cujo desenvolvimento logarítmico é: $1+\log_2 a - \log_2 b - 2\log_2 c$ (a, b e c são reais positivos)?

15. Se $\log 2 = a$ e $\log 3 = b$, colocar em função de a e de b os seguintes logarítmos decimais
a) $\log 6$
b) $\log 4$
c) $\log 12$
d) $\log \sqrt{2}$
e) $\log 0,5$
f) $\log 20$
g) $\log 5$
h) $\log 15$

16. Sabendo que $\log_{30} 3 = a$ e $\log_{30} 5 = b$, calcular $\log_{10} 2$

17. Se $\log_{ab} a = 4$, calcule $\log_{ab} = \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt{b}}$

18. Lembrando que $a^{\log_a b} = b$, calcule o valor das expressões:
a) $3^{\log_3 10}$
b) $8^{2+log_8 2}$
c) $10^{4-\log 400}$
d) $7^{\log_7 3 \cdot \log_3 2}$

19. Dados $\log 2 = 0,3$ e $\log 3 = 0,48$, determine:
a) $\log 72$
b) $\log 5,4$
c) $\log 5$
d) $\log \frac{32}{243}$
e) $\log_8 27$

Respostas

1. 10^{-3}

2. a) V; b) V; c) F; d) F; e) V; f) F; g) F; h) F;

3. a)$3^7 \cdot 7^7$; b) $10x^3y^5$; c) $a^7 \cdot b^5$; d) $49x^{14}y^{12}$

4. $a^4 \cdot b^7$

5. $\frac{1530}{73}$

6. $(\frac{x+y}{xy})^2$

7. $8x^{-2}$

8. a) -3; b) $2/3$; c) $-5/2$

9. a) -3; b) $-5/2$; c) $-3/2$

10. a) $S = -3/2$; b) $S = 4/6$; c) $S = 2$

11. $S = -5/2$

12. a) 125; b) 12

13. a) $1 + \log_2 a + \log_2 b - \log_2 c$
b) $3 \log_3 a + 2 \log_3 b - 4 \log_3 c$
c) $3 \log a - 2 \log b - \frac{1}{2} \log c$

14. $\log_2(\frac{2a}{bc^2})$

15.
a) a+b
b) 2a
c) 2a+b
d) a/2
e) -a
f) 1+a
g) 1-a
h) 1-a+b

16. $\frac{1-a-b}{1-a}$

17. 17/6

18. a) 10; b) 128; c) 25; d) 2

19. a) 1,86; b) 0,74; c) 0,7; d) -0,9

Capítulo 3

Progressão Aritimética e geométrica

3.1 Progressão Aritmética

No ensino médio estudamos dois tipos de progressão: a Aritmética (PA) e a geométrica (PG). Uma progressão é uma série numérica de quantidades, ou seja, que ocorre de forma sucessiva, uma após a outra. Ela sempre é estabelecida por uma lei de formação, que é uma fórmula matemática.

Na PA, cada termo é obtido com a soma do termo anterior a um certo valor constante, chamado de "razão". Tem-se assim a seguinte fórmula para obtenção dos termos de uma PA:

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot r$$

a_n = n-ésimo termo da sequência
a_1 = primeiro termo
n = posição do termo na sequência
r= razão

Ainda podemos obter a soma dos termos de uma PA, utilizando a seguinte fórmula:

$$S_n = n \cdot \frac{(a_1 + a_n)}{2}$$

S_n = soma dos n primeiros termos de uma PA
n = posição do termo na sequência
a_1 = primeiro termo da sequência
a_n = n-ésimo termo da sequência

Exemplo:
Encontre o décimo primeiro termo da sequência (1, 3, 5, 7...) e encontre também a soma dos vinte primeiros termos dessa sequência:
a_1= 1
r = 2
n = 11

assim: $a_{11} = 1 + (11-1) \cdot 2$
$a_{11} = 21$

Para sabermos a soma dos vinte primeiros termos, necessitamos primeiro achar o vigésimo termo, logo:
$a_{20} = 1 + (20-1) \cdot 2$
$a_{20} = 39$

Agora, fica claro que
$S_{20} = 20 \cdot \frac{(1+39)}{2}$
$S_{20} = 400$

3.2 Progressão Geométrica

Na PG, a formação da sequência se dá de forma diferente da PA. Nesse caso, o termo seguinte é obtido através da multiplicação do termo anterior pela razão. Ex: (2,4,8,16,32 ...)

Temos a fórmula:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

a_n = n-ésimo termo da sequência
a_1 = primeiro termo da sequência
q = razão
n = posição do termo da sequência

E para a soma dos termos de uma PG:

$$S_n = a_1 \cdot \frac{(q_n - 1)}{q - 1}$$

S_n = soma dos n primeiros termos de um PG
a_1 = primeiro termo da sequência
q = razão
n = posição do termo na sequência

Exemplo:
Encontre o nono termo da sequência (2,4,8,16..), também ache a soma dos 10 primeiros termos.
$a_1 = 2$
r = 2

Assim,
$a_9 = 2 \cdot 2^{(9-1)}$
$a_9 = 512$

e, também,
$S_{10} = (2 \cdot (2^{10} - 1))/(2 - 1)$
$S_{10} = 2048$

Caso a razão (q) da PG esteja num intervalo entre -1 e 1, quando n tende a infinito, o termo q^n tende a 0. Assim, a soma de uma **PG infinita** será:

$$S_n = \frac{a_1}{1 - q}$$

Exercícios Propostos

1. O valor de x, de modo que os números 3x − 1, x + 3 e x + 9 estejam, nessa ordem, em PA é
a) 1
b) 0
c) -1
d) −2

2. O centésimo número natural par não negativo é
a) 200
b) 210
c) 198
d) 196

3. Quantos números ímpares há entre 18 e 272?
a) 100
b) 115
c) 127
d) 135

4. Um estacionamento cobra R$ 6,00 pela primeira hora. A partir da segunda hora, os preços caem em progressão aritmética. O valor da segunda hora é R$ 4,00 e o da sétima é R$ 0,50. Quanto gastará o proprietário de um automóvel estacionado 5 horas nesse local?
a) R$ 17,80
b) R$ 20,00
c) R$ 18,00
d) R$ 18,70

5. Um doente toma duas pílulas de certo remédio no primeiro dia, quatro no segundo dia, seis no terceiro dia e assim sucessivamente até terminar o conteúdo do vidro. Em quantos dias terá tomado todo o conteúdo, que é de 72 pílulas?
a) 6
b) 8
c) 10
d) 12

6. Se cada coelha de uma colônia gera três coelhas, qual o número de coelhas da 7ª geração que serão descendentes de uma única coelha?
a) 3000
b) 1840
c) 2187
d) 3216

7. Comprei um automóvel e vou pagá-lo em 7 prestações crescentes, de modo que a primeira prestação seja de 100 reais e cada uma das seguintes seja o dobro da anterior. Qual é o preço do automóvel?
a) R$ 12 700,00
b) R$ 13 000,00
c) R$ 11 800,00
d) R$ 13 200,00

8. Ao escalar uma trilha de montanha, um alpinista percorre 256 m na primeira hora, 128 na segunda hora, 64 na terceira hora e assim sucessivamente. Determine o tempo (em horas) necessário para completar um percurso de:
a) 480 m
b) 510 m

9. Uma criação de coelhos foi iniciada há exatamente um ano e, durante esse período, o número de coelhos duplicou a cada 4 meses. Hoje, parte dessa criação deverá ser vendida para se ficar com a quantidade inicial de coelhos. Para que isso ocorra, a porcentagem da população atual dessa criação de coelhos a ser vendida é
a) 75%
b) 80%
c) 83,33%
d) 87,5%

10. Numa PG de quatro termos, a razão é 5 e o último termo é 375. O primeiro termo dessa PG é
a) 1
b) 2
c) 3
d) 4

11. A medida do lado, o perímetro e a área de um quadrado estão, nessa ordem, em progressão geométrica. Qual a área do quadrado?

12. São dados quatro números positivos: 12, x, y, 4. Sabendo que os três primeiros estão em PA e os três últimos estão em PG, achar x e y.

13. Um professor de educação física organizou seus 210 alunos para formar um triângulo. Colocou um aluno na primeira linha, dois na segunda, três na terceira, e assim por diante. O número de linhas é
a) 10
b) 15
c) 20
d) 30
e) NRA

14. Quantos termos tem a PA (5, 10, ..., 785)?
a) 157
b) 205
c) 138
d) 208

15. Um atleta corre sempre 500 metros a mais do que no dia anterior. Sabendo-se que ao final de 15 dias ele correu um total de 67 500 metros, o número de metros percorridos no terceiro dia foi:
a) 1000
b) 2000
c) 1500
d) 2500
e) 2600

16. Uma certa espécie de bactéria divide-se em duas a cada 20 minutos, e uma outra, a cada 30 minutos. Determine, após 3 horas, a razão entre o número de bactérias da 1ª e o da 2ª espécies, originadas por uma bactéria de cada espécie.
a) 8
b) 4
c) 2
d) 0
e) 12

17. Um pintor consegue pintar uma área de 5 m^2 no primeiro dia de serviço e, a cada dia, ele pinta 2 m^2 a mais do que pintou no dia anterior. Em que dia ele terá conseguido pintar 31 m^2?
a) 11°
b) 12°
c) 13°
d) 14°

Respostas

1. c)

2. a)

3. c)

4. a)

5. b)

6. c)

7. a)

8. a) 4h b) 8h

9. d)

10. c)

11. 256

12. x=9 e y=6

13. c)

14. a)

15. b)

16. b)

17. d)

Capítulo 4

Polinômios e frações parciais

Bibliografia recomendada:
DANTE, L. Matemática, Contexto e Aplicações. Volume Único. Editora Ática. 3ª ed. 2008
IEZZI, G. Fundamentos das Matemática Elementar, 6: complexos, polinômios, equações. Atual Editora. 7ª ed. 2005
STEWART, J. Cálculo, Volume I.Cengage Learning. 6ª ed. 2012

4.1 Definição

Define-se como polinômio ou expressão polinomial na variável complexa x qualquer expressão do tipo:

$$a_0x^n + a_1x^{(n-1)} + a_2x^{(n-2)} + ... + a_n$$

Em que:
n é um número natural
os coeficientes $a_0, a_1, ..., a_n$ são números complexos
x é a variável do polinômio
o maior expoente de x, com coeficiente não-nulo, é o grau da expressão

Veja os seguintes exemplos:
1.1 $2x + 7$: polinômio do 1º grau (grau 1)
1.2 $x^3 + 8x$: polinômio do 3º grau (grau 3)
1.3 $x^{(-1)} + 4$: não é um polinômio, pois o expoente da variável x não pode ser negativo

4.2 Funções polinomiais

As funções complexas definidas por expressões polinomiais são denominadas funções polinomiais. Assim, toda função definida por:

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{(n-1)} + a_2x^{(n-2)} + ... + a_n$$

para todo x complexo, é denominada função polinomial de grau n, em que n é um número inteiro positivo ou nulo e a_0, a_1, a_2,..., a_n são números complexos denominados coeficientes.

Exemplos:
2.1 $P(x) = x^2 + 5$
2.2 $f(x) = -4x^5 + 5x^3 - 4$
2.3 $N(x) = 0$

Se o grau de uma função polinomial for 0, então a função é definida por $f(x) = a_n$ e a_n tem que ser não-nulo. Caso todos os coeficiente sejam nulos, incluindo o a_n, define-se o polinômio como polinômio identicamente nulo (PIN), e não se define grau para este – caso do problema 2.3

OBS: A cada função polinomial associa-se um único polinômio (ou expressão polinomial) e vice-versa, de forma que NÃO há confusão em nos referimos indistintamente às funções polinomiais ou aos polinômios. Exemplo: $P(x) = x^2 + 5$, que anteriormente foi definido como função polinomial no exemplo 2.1, é também um polinômio de grau 2.

Exercícios
1. Em que condições o grau do polinômio $p(x) = (a + 2)x^2 + (b - 3)x + (c - 1)$ é 0?

2. Identifique se as seguintes funções são polinômios. Caso sejam, determine o seu grau.
a)$f(x) = 5x^3 - \sqrt{2x^2} + \frac{1}{3}x - 10$
b)$g(x) = 1/x + \sqrt{x}$
c)$P(x) = 3$

4.3 Valor numérico de um polinômio

O valor numérico de um polinômio $P(x)$, para $x = k$, é o número que se obtém substituindo x por k e efetuando todas as operações indicadas pela relação que define o polinômio.

Exemplo:
3.1 O valor numérico de $P(x) = 2x^2 - 3x + 5$ para $x = 4$ é:

$$P(4) = 2 \cdot 4^2 - 3 \cdot 4 + 5 = 25$$

Logo, $P(4) = 25$

O valor numérico do polinômio nulo é 0 para qualquer valor de x

Assim, dado o polinômio

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{(n-1)} + a_2x^{(n-2)} + ... + a_n$$

o valor numérico de $f(x)$ para $x = k$ será:

$$f(k) = a_0k^n + a_1k^{(n-1)} + a_2k^{(n-2)} + ... + a_n$$

OBS: O valor numérico de P(x), para $x = k$, nada mais é do que a respectiva imagem do elemento k pertencente ao domínio da função P.

Exercícios
3. Dado o polinômio $p(x) = 2x^3 - x^2 + x + 5$, calcule $p(2) - p(-1)$

4. Um polinômio p(x) é do 2º grau. Sabendo que $p(2) = 0$, $p(-1) = 12$ e $p(0) = 6$, escreva o polinômio e determine $p(5)$.

4.4 Raiz de um polinômio

Já sabemos que P(k) é o valor numérico do polinômio P(x) para x = k. Se um número complexo (real ou imaginário) k é tal que P(k) = 0, então esse número k é chamado de raiz do polinômio P(x).
Exemplo:
4.1 Dado o polinômio $p(x) = x^3 - 3x^2 + 2$, temos:
$p(1) = 0 \Rightarrow$ 1 é raiz de p(x)
$p(3) = 2 \Rightarrow$ 3 não é raiz de p(x)

4.5 Igualdade de polinômios

Diz-se que dois polinômios são iguais ou idênticos se, e somente se, seus valores numéricos são iguais para todo $k \in \mathbb{C}$. Assim:

$$p(x) = q(x) \Leftrightarrow p(k) = q(k)(\forall k \in \mathbb{C})$$

Para que isso aconteça, sua diferença p(x) - q(x) deve ser o Polinômio Identicamente Nulo. Assim, dois polinômios p(x) e q(x) são iguais se, e somente se, têm coeficientes respectivamente iguais (os coeficientes dos termos de mesmo grau são todos iguais).

Exercícios

5. O polinômio $p(x) = x^3 + ax^2 + bx$ admite as raízes 6 e 1. Calcule os coeficientes a e b.

6. Determine os valores de a e b para que sejam iguais os polinômios $p(x) = 3x + 2$ e $q(x) = (a + b)x^2 + (a + 3)x + (2 - b)$

4.6 Operações com polinômios

Por meio de exemplos, vamos retomar operações conhecidas no estudo de expressões algébricas, como adição, subtração e multiplicação de polinômios, além da multiplicação de um número real por um polinômio.

Exemplo 1:
$p(x) = 3x^2 + 2x - 1$ e $q(x) = -x^3 + 4x^2 - 2x - 5$, temos:
$p(x) + q(x) = -x^3 + (3 + 4)x^2 + (2 - 2)x + (-1 - 5) = -x^3 + 7x^2 - 6$

Exemplo 2:
$p(x) = 3x^2 - 4x + 1$ e $q(x) = 5x^2 - 3x + 4$, temos:
$p(x) - q(x) = 3x^2 - 4x + 1 - 5x^2 + 3x - 4 = -2x^2 - x - 3$

Exemplo 3:
Dado $p(x) = 2x^3 - 4x^2 + 5x - 3$, temos:
$7p(x) = 7(2x^3 - 4x^2 + 5x - 3) = 14x^3 - 28x^2 + 35x - 21$

Exemplo 4:
Dado $p(x) = 3x - 4$ e $q(x) = -2x + 5$, temos:
$p(x).q(x) = (3x - 4)(-2x + 5) = -6x^2 + 15x + 8x - 20 = -6x^2 + 23x - 20$

Exercícios

7. Sabendo que $\frac{a}{(x+2)} + \frac{b}{(x-1)} = \frac{(7x+8)}{(x^2+x-2)}$, determine os valores de a e b

4.7 Divisão de polinômios

Sejam dois polinômios P(x) e D(x), com $D(x) \neq 0$. Dividir P(x) por D(x) significa encontrar dois polinômios, Q(x) e R(x), que verificam as seguintes condições para

$$\begin{array}{l|l} P(x) & D(x) \\ \cline{2-2} R(x) & Q(x) \end{array}$$

Onde: P(x) é o dividendo; D(x), o divisor; Q(x), o quociente; e o R(x) é o resto.

- 1ª condição: P(x) = D(x)·Q(x) + R(x)

- 2ª condição: Grau (Q) = Grau (P) – Grau (D)
- 3ª condição: Grau (R) < Grau (D), ou R(x) = 0

Para a divisão de polinômios, existem 3 métodos principais:
- Método da Chave (Divisão Euclidiana)
- Método dos coeficientes a determinar (Método de Descartes)
- Algorítmo de Briot – Ruffini

Neste material só será abordado o Método da Chave.

4.7.1 Método da chave ou divisão euclidiana

Vejamos alguns exemplos de divisão de polinômios pelo método da chave:

Exemplo 1:
Determinar o quociente de $A(x) = x^3 + 4x^2 + x - 6$ por $B(x) = x + 2$

$$\begin{array}{r|l}
x^3+4x^2+x-6 & x+2 \\ \cline{2-2}
-x^3-2x^2 \quad & x^2+2x-3 \rightarrow \textit{quociente } Q(x) \\ \cline{1-1}
2x^2+x-6 & \\
-2x^2-4x \quad & \\ \cline{1-1}
-3x-6 & \\
+3x+6 & \\ \cline{1-1}
0 & \rightarrow \textit{resto } R(x)
\end{array}$$

Verificamos, facilmente, que: $\underbrace{x^3 + 4x^2 + x - 6}_{A(x)} \equiv \underbrace{(x+2)}_{B(x)} \cdot \underbrace{(x^2 + 2x - 3)}_{Q(x)}$

Como $R(x) \equiv 0$, A(x) é divisível por B(x).

Resposta: $x^2 + 2x - 3$

Exemplo 2:
Determinar o quociente de $A(x) = x^4 + x^3 - 7x^2 + 9x - 1$ por $B(x) = x^2 + 3x - 2$

$$\begin{array}{r|l}
x^4+x^3-7x^2+9x-1 & x^2+3x-2 \\ \cline{2-2}
-x^4-3x^3+2x^2 \qquad & x^2-2x+1 \rightarrow \textit{quociente } Q(x) \\ \cline{1-1}
-2x^3-5x^2+9x-1 & \\
+2x^3+6x^2-4x \quad & \\ \cline{1-1}
x^2+5x-1 & \\
-x^2-3x+2 & \\ \cline{1-1}
2x+1 & \rightarrow \textit{resto } R(x)
\end{array}$$

Verificamos, facilmente, que:

$$\underbrace{x^4 + x^3 - 7x^2 + 9x - 1}_{A(x)} \equiv \underbrace{(x^2 + 3x - 2)}_{B(x)} \cdot \underbrace{(x^2 - 2x + 1)}_{Q(x)} + \underbrace{(2x+1)}_{R(x)}$$

Como $R(x) \neq 0$, A(x) não é divisível por B(x)

Resposta: $x^2 - 2x + 1$

Exercícios
8. Efetue a divisão $p(x) = 2x^4 - 2x^3 - 13x^2 + 10x - 1$ por $h(x) = 2x^2 + 4x - 3$ e faça a verificação

9. O polinômio $p(x) = x^3 - 4x^2 - x + 4$ é divisível por $h(x) = x^2 - 3x - 4$. Nessas condições, resolva a equação $x^3 - 4x^2 - x + 4 = 0$

4.8 Teorema de D'Alembert

"**a** é raiz de um polinômio P(x) se, e somente se, P(x) for divisível por (x - a)"

De fato:
1) Se **a** é raiz de P(x), então P(x) é divisível por x - a
   Mas **a** é raiz, logo P(a) = 0. Portanto R = 0.
2) Se P(x) é divisível por x - a, então P(a) = 0

4.9 Equações Algébricas

Equação polinomial é toda a equação de forma P(x) = 0, onde P(x) é um polinômio. Raiz de uma equação polinomial P(x) = 0 é todo número a, tal que P(a) = 0.

TEOREMA FUNDAMENTAL DA ÁLGEBRA: Toda equação polinomial P(x) = 0, de grau n ($n \geq 1$), admite pelo menos uma raiz complexa.

TEOREMA DA DECOMPOSIÇÃO EM FATORES DO 1º GRAU: Todo polinômio $P(x) = a_0x^n + a_1x^{(n-1)} + a_2x^{(n-2)} + ... + a_n$, de grau $n \geq 1$, pode ser escrito na forma fatorada.

P(x)=$a_0 \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2)...(x - x_n)$, onde x_1,x_2,. . . ,x_n são todos raízes de P(x)

Baseados nesse teorema, conclui-se que: Toda equação polinomial P(x) = 0, de grau n ($n \geq 1$), possui n e somente n raízes complexas.

4.10 Multiplicidade de uma raiz

Dada a equação $a_0x^n + a_1x^{(n-1)} + a_2x^{(n-2)} + ... + a_n = 0(a_0 \neq 0)$, diz-se que a é raiz de multiplicidade m ($m \in \mathbb{N}*$ e $m < n$) se, e somente se, das n raízes, apenas m forem iguais a **a**

Exemplo 1:
Considerando a equação polinomial $(x - 4)(x - 1)^2(x - 3)^4(x - 2)^3x^2 = 0$ vemos que o polinômio é de grau 12 = (1 + 2 + 4 + 3 + 2) e, portanto, tem dez raízes:

- De (x-4), concluímos que uma das raízes é 4 (raiz simples ou de multiplicidade 1)
- De $(x - 1)^2$, concluímos que duas das raízes são iguais a 1 (1 é raiz dupla ou de multiplicidade 2)
- De $(x-3)^4$, concluímos que quatro das raízes são iguais a 3 (3 é raiz quádrupla ou de multiplicidade 4)
- De $(x - 2)^3$, concluímos que três das raízes são iguais a 2 (2 é raiz tripla ou de multiplicidade 3)
- De x^2, concluímos que duas das raízes são raízes nulas (0 é uma raiz dupla ou de multiplicidade 2)

Exercícios

10. Fatore o polinômio $p(x) = 5x^3 + 15x^2 - 5x - 15$, sabendo que uma das raízes é 1. Depois de encontrada as raízes, esboce o gráfico da função P, de acordo com a multiplicidade de cada raiz.

11. Escreva o polinômio $p(x) = x^3 - 5x^2 + 7x - 3$ na forma fatorada, sabendo-se que uma raiz é 3. Esboce o gráfico da função P, tendo como base a multiplicidade de cada raiz.

12. Utilizando a fatoração, calcule as raízes da equação algébrica:$x^3 - 4x^2 + 3x = 0$

13. Resolva a equação algébrica: $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$

14. Resolva a equação $x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6 = 0$, sabendo que -2 e 1 são raízes da equação. Esboce o gráfico da função P, dados que $P(x) = x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6$.

15. Resolva a equação $x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 7x + 6 = 0$, sabendo que -1 é raiz dupla. Esboce o gráfico da função P, dados que $P(x) = x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 7x + 6$.

4.11 Frações Parciais

Dada a função racional $f(x) = \frac{P(X)}{Q(X)}$, onde P e Q são polinômios. É possível expressar f como uma soma de frações mais simples, desde que o grau de P seja menor que o grau de Q. Essa função racional é denominada própria. Se f é imprópria, isto é, $gr(P) \geq gr(Q)$, então devemos fazer uma etapa preliminar dividindo P por Q (divisão de polinômios) até o resto R(x) ser obtido, com $gr(R) < gr(Q)$. O resultado da divisão é

$$f(x) = \frac{P(X)}{Q(X)} = S(x) + \frac{R(X)}{Q(X)}$$

Onde S e R são polinômios também.

CASO 1: O DENOMINADOR Q(x) É UM PRODUTO DE FATORES LINEARES DISTINTOS

Isso significa que que podemos escrever

$$Q(x) = (a_1x + b_1)(a_2x + b_2)...(a_kx + b_k)$$

Onde nenhum fator é repetido (e nenhum fator é múltiplo constante do outro). Nesse caso o teorema das frações parciais afirma que existem constantes $A_1, A_2, ..., A_k$ tal que

$$\frac{R(X)}{Q(x)} = \frac{A_1}{(a_1x + b_1)} + \frac{A_2}{(a_2x + b_2)} + ... + \frac{A_k}{(a_kx + b_k)} \tag{4.1}$$

Essas constantes podem ser determinadas como no exemplo a seguir.

Exemplo 1:

Escreva a forma de decomposição em fração parcial da função $\frac{x^2+2x-1}{2x^3+3x^2-2x}$.

Como o grau do numerador é menor que o grau do denominador, não precisamos dividir. Fatoramos o denominador como

$$2x^3 + 3x^2 - 2x = x(2x^2 + 3x - 2) = x(2x - 1)(x + 2)$$

Como o denominador tem três fatores lineares distintos, a decomposição em frações parciais do integrando tem a forma

$$\frac{x^2 + 2x - 1}{x(2x - 1)(x + 2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{2x - 1} + \frac{C}{x + 2}$$

Para determinar os valores de A, B, e C, multiplicamos ambos os lados dessa equação pelo produto dos denominadores, $x(2x-1)(x+2)$, obtendo

$$x^2+2x-1 = A(2x-1)(x+2)+Bx(x+2)+Cx(2x-1)$$

Expandindo o lado direito da Equação anterior e escrevendo-a na forma padrão para os polinômios, temos

$$x^2+2x-1 = (2A+B+2C)x^2+(3A+2B-C)x-2A$$

Os polinômios da Equação anterior são idênticos, então seus coeficientes devem ser iguais. O coeficiente de x^2 do lado direito, 2A+B+2C, deve ser igual ao coeficiente de x^2 do lado esquerdo, ou seja, 1. Do mesmo modo, os coeficientes de x são iguais e os termos constantes também. Isso resulta no seguinte sistema:

$$\begin{cases} 2A+B+2C=1 \\ 3A+2B-C=2 \\ -2A=-1 \end{cases}$$

Resolvendo, A = 1/2, B = 1/5, C = 1/10. Assim,

$$\frac{x^2+2x-1}{2x^3+3x^2-2x} = \frac{1/2}{x}+\frac{1/5}{2x-1}+\frac{1/10}{x+2}$$

CASO 2: Q(x) É UM PRODUTO DE FATORES LINEARES, E ALGUNS DOS FATORES SÃO REPETIDOS

Suponha que o primeiro fator linear (a_1x+b_1) seja repetido r vezes, isto é, $(a_1x+b_1)^r$ ocorre na fatoração de Q(x). Então, em vez de um único termo $\frac{A_1}{a_1x+b_1}$ na Equação 1.1, usaríamos

$$\frac{A_1}{a_1x+b_1}+\frac{A_2}{(a_1x+b_1)^2}+...+\frac{A_r}{(a_1x+b_1)^r} \tag{4.2}$$

Para ilustrar, poderíamos escrever

$$\frac{(x^3-x+1)}{x^2(x-1)^3} = \frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{(x-1)}+\frac{D}{(x-1)^2}+\frac{E}{(x-1)^3}$$

CASO 3: Q(x) CONTÉM FATORES QUADRÁTICOS IRREDUTÍVEIS, NENHUM DOS QUAIS SE REPETE

Se Q(x) tem o fator ax^2+bx+c, onde $b^2-4ac<0$, então, além das frações parciais nas Equações 4.1 e 4.2, a expressão para $\frac{R(x)}{Q(x)}$ terá um termo da forma

$$\frac{Ax+b}{ax^2+bx+c} \tag{4.3}$$

Em que A e B são as constantes a serem determinadas. Por exemplo, a função dada por $f(x) = \frac{x}{(x-2)(x^2+1)(x^2+4)}$ tem uma decomposição em frações parciais da forma

$$\frac{x}{(x-2)(x^2+1)(x^2+4)} = \frac{A}{(x-2)}+\frac{(Bx+C)}{(x^2+1)}+\frac{(Dx+E)}{(x^2+4)}$$

CASO 4: Q(x) CONTÉM FATORES QUADRÁTICOS IRREDUTÍVEIS REPETIDOS

Se Q(x) tem um fator $(ax^2+bx+c)^r$, onde $b^2-4ac<0$, então, em vez de uma única fração parcial da forma da Equação 4.3, a soma

$$\frac{(A_1x+B_1)}{(ax^2+bx+c)}+\frac{(A_2x+B_2)}{(ax^2+bx+c)^2}+...+\frac{(A_rx+B_r)}{(ax^2+bx+c)^r} \tag{4.4}$$

Ocorre na decomposição em frações parciais de $\frac{R(x)}{Q(x)}$. Por exemplo, a função dada por $f(x) = \frac{1-x+2x^2-x^3}{x(x^2+1)^2}$ tem uma decomposição em frações parciais da forma

$$\frac{(1-x+2x^2-x^3)}{(x(x^2+1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{(Bx+C)}{(x^2+1)} + \frac{(Dx+E)}{(x^2+1)^2}$$

Exercícios
Escreva a forma de decomposição em fração parcial das seguintes funções:

16. $\frac{x^4-2x^2+4x+1}{x^3-x^2-x+1}$

17. $\frac{2x^2-x+4}{x^3+4x}$

18. $\frac{1-x+2x^2-x^3}{x(x^2+1)^2}$

19. $\frac{1+x^2+x^3}{x(x-1)(x^2+x+1)(x^2+1)^3}$

20. $\frac{4x^2-3x+2}{4x^2-4x+3}$

Respostas

1. $a = -2$, $b = 3$, $c \neq 1$

2. a) Sim (grau 3) b) Não c) Sim (grau 0)

3. 18

4. $p(x) = x^2 - 5x + 6$ e $p(5) = 6$

5. a = -7 e b = 6

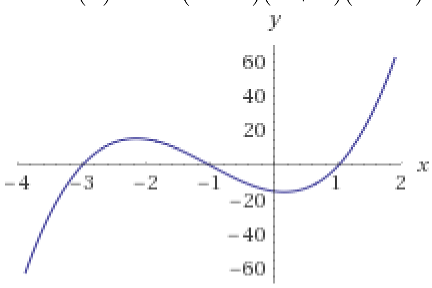
6. a = 0 e b = 0

7. a = 2 e b = 3

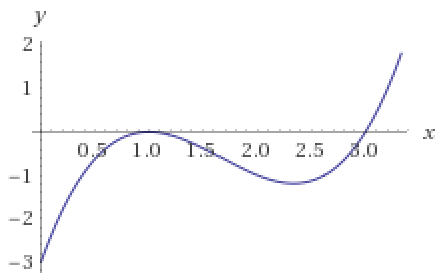
8. $Q(x) = x^2 - 3x + 1$ e $R(x) = -3x + 2$

9. S = {-1,1,4}

10. $P(x) = 5 \cdot (x-1)(x+3)(x-1)$



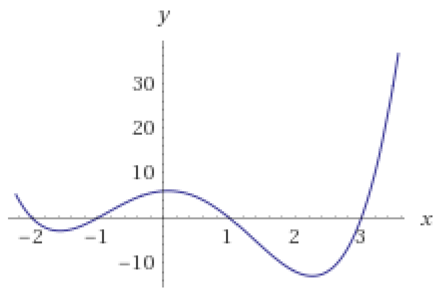
11. $P(x) = 1 \cdot (x-1)(x-1)(x-3) = 1.(x-1)^2(x-3)$



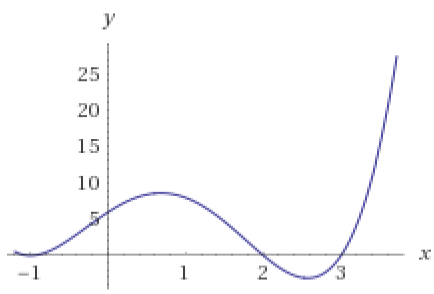
12. x = 0 ou x = 1 ou x = 3

13. S = {1, -1, 2, -2}

14. S = {-1, -2, 1, 3}



15. S = {-1, 2,3}



16. A = 1, B = 2, C = -1

17. A = 1, B = 1 e C = -1

18. A = 1, B = -1, C = -1, D=1 e E = 0

19. A = -1, B = 1/8, C = D = -1, E = 15/8, F = -1/8, G = H = 3/4, I = -1/2, J = 1/2

20. $1 + \frac{(x-1)}{(4x^2-4x+3)}$

Capítulo 5

Matrizes e Sistemas Lineares

Bibliografia recomendada:
BOLDRINI, José Luiz et al. Álgebra linear. Harper & Row, 1980. BUCCHI, Paulo. Curso prático de Matemática. 1ª Edição, v. 2, 1998.

5.1 Conceitos básicos de matrizes

Matrizes são de ampla aplicação na resolução de sistemas lineares, análise de dados e em programação, sendo uma ferramenta utilizada pela matemática principalmente nas áreas de cálculo, álgebra linear, estatística e computacional.

Matrizes são tabelas de elementos dispostos em **linhas e colunas**, podendo ser indicada por ( ), [ ] ou ‖ ‖. Frequentemente, usa-se para referenciação uma letra maiúscula acompanhada de um subíndice, no formato "$m \times n$", onde m e n representam, respectivamente, o número de linhas e colunas. Os elementos de uma matriz geralmente são representados por letras minúsculas acompanhadas de um subíndice no formato "ij", sendo i e j, respectivamente o número da linha e coluna do elemento.
Ex.:

$$A_{m\times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Neste material, estaremos revisitando os conceitos básicos de matriz.

5.2 Tipos de Matrizes

1. Genérica

   - É dita genérica qualquer matriz.
     Ex.:

$$A_{3x2} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 2 \\ 1 & 9 \end{bmatrix}$$

2. Matriz Oposta

   - É definida oposta a matriz que possui todos os seus elementos simétricos aos de outra matriz.
     Ex.: Seja a matriz B a matriz oposta da matriz A.

$$B_{3x2} = \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ -7 & -2 \\ -1 & -9 \end{bmatrix}$$

3. Matriz Linha

   - É dita matriz linha toda matriz composta apenas por uma linha.

4. Matriz Coluna
   - É dita matriz coluna toda matriz composta apenas por uma coluna.
5. Matriz Nula
   - A matriz nula é definida tal que: $C_{m\times n} = (c_{ij})_{m\times n}$, onde $c_{ij} = 0$ com $1 \leq i \leq m$ e $1 \leq j \leq n$.
6. Matriz Quadrada
   - Quadrada é toda matriz que possui número de linhas e colunas igual.
7. Matriz Diagonal
   - É definida como qualquer matriz quadrada onde apenas os elementos da diagonal principal diferem de 0.
8. Matriz Identidade
   - Se define como: $I_n = (a_{ij})_{n\times n}$ tal que $a_{ij} = \begin{cases} 1, \text{se } i = j \\ 0, \text{se } i \neq j \end{cases} \quad \forall i, j \in (1, \ldots, n)$
9. Matriz Simétrica
   - É dita simétrica toda matriz quadrada cuja transposta é igual a ela mesma.
     Sendo $\mathbf{A}_n = [a_{ij}]_{n\times n}$, temos $a_{ij} = a_{ji} | i, j \in \mathbb{N}$, com $1 \leq i \leq n$ e $1 \leq j \leq n$
10. Matriz Inversa
    - Considere a matriz $\mathbf{A}_{n\times n}$ quadrada e inversível.
      A sua inversa se define $\mathbf{A}^{-1}_{n\times n}$, onde o produto $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{I}_n$.

5.3 Operações Matriciais

5.3.1 Igualdade de matrizes

Duas matrizes são iguais se possuírem mesmo tipo e todos os seus termos correspondentes forem iguais.

5.3.2 Soma e Subtração matricial

A soma de matrizes se dá entre matrizes de mesmo tipo, elemento a elemento. A subtração sendo um caso particular da soma, onde os elementos são subtraídos.
Ex.: $A + (-B) = A - B$

Propriedades da adição de matrizes

Sejam A, B, C, D e E matrizes de mesmo tipo onde D é matriz nula e E é matriz oposta de A.

- **Associativa**: $(A + B) + C = A + (B + C)$
- **Comutativa**: $A + B = B + A$
- **Elemento Neutro**: $A + D = D + A = A$
- **Elemento Oposto**: $A + E = E + A = D$

5.3.3 Multiplicação por Escalar

Considere um número real k e uma matriz genérica **A**, de tipo mxn. O produto de matriz **A** pelo escalar k se dá de forma que todos os termos da matriz **A** são multiplicados por k.
Ex.:

$$k \cdot A_{m\times n} = \begin{bmatrix} k\cdot a_{11} & k\cdot a_{12} & k\cdot a_{13} & \dots & k\cdot a_{1n} \\ k\cdot a_{21} & k\cdot a_{22} & k\cdot a_{23} & \dots & k\cdot a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k\cdot a_{m1} & k\cdot a_{m2} & k\cdot a_{m3} & \dots & k\cdot a_{mn} \end{bmatrix}$$

5.3.4 Multiplicação de Matrizes

Sejam $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{m\times n}$ e $\mathbf{B} = [b_{rs}]_{n\times p}$. Definiremos $\mathbf{AB} = [c_{uv}]_{m\times p}$
onde

$$c_{uv} = \sum_{k=1}^{n} a_{uk}b_{kv} = a_{u1}b_{1v} + \cdots + a_{un}b_{nv}$$

O que define um produto feito "linha por coluna". O elemento c_{ij} (i-ésima linha e j-ésima coluna da matriz-produto) é obtido multiplicando os elementos da i-ésima linha da primeira matriz pelos elementos correspondentes da j-ésima coluna da segunda matriz, e somando esses produtos.
Observação: Só podemos efetuar o produto de duas matrizes $\mathbf{A}_{m\times n}$ e $\mathbf{B}_{l\times p}$ se o número de colunas da primeira for igual ao número de linhas da segunda, isto é, n = l. Além disso, a matriz-resultado
$\mathbf{C} = \mathbf{AB}$ será de ordem $m \times p$.

5.3.5 Transposição

Dada uma matriz $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{m\times n}$, podemos obter outra matriz **A'** $= [b_{ij}]_{n\times m}$, cujas linhas são as colunas de A, isto é, $b_{ij} = a_{ji}$. A' é denominada *transposta* de **A**.

Propriedades

- Uma matriz é simétrica se, e somente se ela é igual à sua transposta, isto é **A** = **A'**
- **A**" = **A**, ou seja, a transposta da transposta de uma matriz é ela mesma.
- (**A** + **B**)' = **A**' + **B**', ou seja, a transposta da soma é igual a soma das transpostas.
- (k**A**)' = k**A**', sendo $k \in \mathbb{R}$.

5.4 Determinantes

5.4.1 Definição e Propriedades

É o número associado a uma matriz quadrada, escreve-se det**A** ou | **A** | ou det$[a_{ij}]$.

Propriedades

- Toda matriz quadrada que possui uma fila nula tem determinante nulo.
- O determinante de uma matriz quadrada **A** é igual ao determinante de sua transposta **A**'.
- O determinante troca de sinal quando se troca a posição de duas filas paralelas.
- Toda matriz que possui duas filas iguais tem determinante nulo.
- Multiplicando ou dividindo uma fila de uma matriz quadrada por um número real não nulo, seu determinante fica respectivamente multiplicado ou dividido por tal número.
- Uma matriz quadrada que tem duas filas paralelas proporcionais tem seu determinante nulo.

- O determinante do produto de duas matrizes é igual ao produto dos determinantes dessas matrizes.
- Uma matriz que possui todos os elementos de um lado da diagonal principal iguais a zero tem seu determinante igual ao produto dos elementos da diagonal principal.
- Uma matriz que possui todos os elementos de um lado da diagonal secundária iguais a zero tem seu determinante igual ao produto dos elementos da diagonal secundária vezes menos um.
- O determinante de uma matriz não se altera se adicionarmos aos elementos de uma fila qualquer uma outra fila paralela, multiplicada por uma constante não nula.

5.4.2 Cálculo de Determinante

Considere $\mathbf{A}_{n\times n}$
Para n = 1, o determinante é dado por

$$det\mathbf{A} = a_{11}$$

Para o caso de n = 2, o determinante será:

$$det\mathbf{A} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

O que representa a subtração da diagonal principal pela diagonal secundária.
Para uma matriz de n = 3, recomenda-se utilizar a regra de Sarrus, onde se adiciona à matriz duas colunas, sendo estas respectivamente as duas primeiras, e se realiza a soma das diagonais principais enquanto se subtrai a soma das diagonais secundárias.

$$A_{3\times3} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$A_{3\times3} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}$$

$$det\mathbf{A} = (a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32}) - (a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} + a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} + a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33})$$

Método de Laplace

Para o caso onde n = 4 ou maior, temos o método de Laplace, que é aplicável para qualquer n, ou a resolução pela fórmula de determinante (podendo ser consultada em Boldrini(1980)), ainda que no caso de $n \geq 5$, recomenda-se utilizar de aparato computacional devido ao alto número de equações.
Pelo método de Laplace, seja a matriz $\mathbf{A}_{3\times3}$, tendo seu determinante descrito pela equação já vista para n = 3. Podemos reescrevê-la como:

$$det\mathbf{A} = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{23}a_{31} - a_{21}a_{33}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})$$

Que pode ser reescrito como:

$$det\mathbf{A} = a_{11}det \begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} - a_{12}det \begin{bmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{bmatrix} + a_{13}det \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}$$

ou ainda:

$$det\mathbf{A} = a_{11}det\mathbf{A}_{11} - a_{12}det\mathbf{A}_{12} + a_{13}det\mathbf{A}_{13}$$

Onde $\mathbf{A}_{ij}$ é uma submatriz da inicial, retirando-se a i-ésima linha e a j-ésima coluna.
Definindo:

$$\Delta_{ij} = (-1)^{i+j} \mid \mathbf{A}_{ij} \mid$$

Obtemos a expressão para o caso geral:

$$det\mathbf{A}_{n\times n} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\Delta_{ij}$$

5.5 Matrizes Inversas

5.5.1 Matriz Adjunta

Dada uma matriz **A**, lembramos que o cofator Δ_{ij} do elemento a_{ij} da matriz é $(-1)^{i+j}$, onde $\mathbf{A}_{ij}$ é a submatriz de **A**, obtida extraíndo-se a i-ésima linha e a j-ésima coluna. Com estes cofatores, podemos formar uma nova matriz **A**, denominada *matriz dos cofatores* de **A**.

$$\overline{\mathbf{A}} = [\Delta_{ij}]$$

Ex.:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad \overline{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{21} \\ -a_{12} & a_{11} \end{bmatrix}$$

A matriz adjunta então é definida como a transposta da matriz de cofatores.

$$adj\mathbf{A} = \overline{\mathbf{A}}'$$

5.5.2 Matriz Inversa

Dada uma matriz **A**, é dita matriz inversa de **A** a matriz que ao realizar operação de multiplicação com **A** resulte na matriz identidade, que terá a mesma ordem de **A**. Podemos então definir a matriz inversa $\mathbf{A}^{-1}$ como:

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{det\mathbf{A}} adj\mathbf{A}$$

Propriedades

- Nem toda matriz tem inversa, apenas as quadradas com determinante diferente de 0 ($det\mathbf{A} \neq 0$).
- Se **A** e **B** são matrizes quadradas de mesma ordem, ambas inversíveis ($\mathbf{A}^{-1}$ e $\mathbf{B}^{-1}$ existem), então $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ é inversível e $(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1} \cdot \mathbf{A}^{-1}$.
- Se **A** é inversível, ou seja, existe $\mathbf{A}^{-1}$, sua inversa é única.
  Logo, se existe uma matriz **B**, de mesma ordem que **A**, tal que $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{I}$, então **A** é inversível e $\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}$

5.6 Sistemas Lineares

5.6.1 Equação Linear

É toda equação escrita na forma de:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$$

5.6.2 Sistema Linear

Um conjunto de m equações lineares e n variáveis é denominado **sistema linear**, e é representado da seguinte forma:

$$\begin{cases} a_{11}x_{11} + a_{12}x_{12} + \cdots + a_{1n}x_{1n} = b_1 \\ a_{21}x_{21} + a_{22}x_{22} + \cdots + a_{2n}x_{2n} = b_2 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1}x_{m1} + a_{m2}x_{m2} + \cdots + a_{mn}x_{mn} = b_m \end{cases}$$

A solução de um sistema linear é o vetor *conjunto solução* de dimensão igual ao número de variáveis que satisfaz todas as equações do sistema. Dois sistemas lineares serão equivalentes se possuírem o mesmo conjunto solução.

Sistema Linear Homogêneo

Todo sistema linear cujas equações apresentam termos independentes nulos é denominado **sistema linear homogêneo**. Tal sistema possui m = n, sendo $b_1 = b_2 = \cdots = b_n = 0$.
Portanto, o este tipo de sistema admite pelo menos uma solução, dita **trivial**, **nula** ou **imprópria**, onde o vetor conjunto solução é descrito por (0, 0, . . . , 0). As soluções que diferem da trivial são ditas **soluções próprias**.

Classificação de sistemas lineares

Quanto à sua solução, os sistemas lineares podem ser classificados em:

- Possível: Quando o sistema admite pelo menos uma solução. Temos dois casos.
  - Possível e determinado: Quando existe uma única solução
  - Possível e indeterminado: Quando existem infinitas soluções
- Impossível: Quando o sistema não tem solução.

Quanto ao número de equações, é importante notar que, caso o sistema seja possível, se o número de equações for maior que o número de variáveis, há equações proporcionais ou repetidas. Após a remoção destas, se o número de equações for igual ao número de variáveis, o sistema é classificado como Possível e determinado, caso o número seja menor, é classificado como possível e indeterminado, admitindo infinitas soluções.

5.7 Matrizes Associadas a um Sistema Linear

Dado um sistema linear, podemos associar a ele algumas matrizes.

- Matriz Completa ou Matriz Ampliada: é a matriz formada pelos coeficientes das variáveis e pelos termos independentes do sistema.
- Matriz Incompleta ou Matriz de Coeficientes: é a matriz formada pelos coeficientes das variáveis do sistema.
- Vetor de Variáveis ou Matriz de Incógnitas: é o vetor formado pelas variáveis do sistema.
- Matriz de Termos Independentes: é o vetor formado pelos termos independentes do sistema.

Uma vez que se decida trabalhar com a abordagem matricial para sistemas lineares, é possível realizar algumas operações.

5.7.1 Operações Elementares

São três as operações elementares sobre as linhas de uma matriz

- Permuta das i-ésima e j-ésima linhas; consiste na troca de posição entre linhas. $(L_i \leftrightarrow L_j)$
- Multiplicação da i-ésima linha por um escalar não nulo k. $(L_i \to kL_i)$
- Substituição da i-ésima linha pela i-ésima linha mais k vezes a j-ésima linha. $(L_i \to L_i + kL_j)$

Dizemos que uma matriz é *linha equivalente* a outra se é possível obter uma através da outra através de um número finito de operações elementares sobre as linhas. Notação: $\mathbf{A} \to \mathbf{B}$ ou $\mathbf{A} \sim \mathbf{B}$.
Consequentemente, dois sistemas que possuem matrizes ampliadas equivalentes são equivalentes.

5.7.2 Forma Escada

Uma matriz $m \times n$ é linha reduzida à forma escada se:

- O primeiro elemento não nulo de uma linha não nula é 1.
- Cada coluna que contém o primeiro elemento não nulo de alguma linha tem todos os seus outros elementos iguais a zero.
- Toda linha nula ocorre abaixo de todas as linhas não nulas(isto é, daquelas que possuem pelo menos um elemento não nulo).
- Se as linhas 1, ..., r são as linhas não nulas, e se o primeiro elemento não nulo da linha i ocorre na coluna k_i, então $k_1 < k_2 < \cdots < k_r$.

Esta última condição impõe a forma escada à matriz. Ou seja, o número de zeros precedendo o primeiro elemento não nulo de uma linha aumenta a cada linha, até que sobrem somente linhas nulas, se houver.
Teorema: Toda matriz $\mathbf{A}_{m\times n}$ é linha equivalente a uma única matriz-linha reduzida à forma escada.

Posto e Nulidade

Definição: Dada uma matriz $\mathbf{A}_{m\times n}$, seja $\mathbf{B}_{m\times n}$ a matriz-linha reduzida à forma escada linha equivalente a $\mathbf{A}$. O posto de $\mathbf{A}$, denotado por p, é o número de linhas não nulas de $\mathbf{B}$. A nulidade de $\mathbf{A}$ é o número n - p.
Com o conceito de posto e nulidade, fica mais fácil classificar o tipo de solução do sistema. Assim temos:

- Um sistema de m equações e n incógnitas admite solução se, e somente se o posto da matriz ampliada é igual ao posto da matriz dos coeficientes.
- Se as duas matrizes têm o mesmo posto p e p = n, a solução será única.
- Se as duas matrizes têm o mesmo posto p e p ¡ n, podemos escolher n - p incógnitas, e as outras p incógnitas serão dadas em função destas.

5.8 Regra de Cramer

Definindo a mariz completa como $\mathbf{M}_c$, a matriz incompleta como $\mathbf{M}_i$ e a matriz $\mathbf{M}_{x_i}$.
$\mathbf{M}_{x_i}$ é a matriz que se obtém trocando, na matriz incompleta, a coluna dos coeficientes de x_i pela coluna dos termos independentes, para cada variável x_i do sistema.
Com isso, a regra de Cramer nos garante que o sistema é possível e determinado se, e somente se $det\mathbf{M}_i \neq 0$, e que sua solução é dada por, para cada variável x_i:

$$x_i = \frac{D_{x_i}}{D_i}$$

Com D_{x_i} sendo o determinante da matriz $\mathbf{M}_{x_i}$ e D_i o determinante da matriz incompleta.

Exercícios Propostos

1. Sejam:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{C} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} \text{ e } \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \end{bmatrix}$$

Encontre:
a) $\mathbf{A} + \mathbf{B}$
b) $\mathbf{A} \cdot\ \mathbf{C}$
c) $\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}$
d) $\mathbf{C} \cdot \mathbf{D}$

e) $\mathbf{D} \cdot \mathbf{A}$
f) $\mathbf{D} \cdot \mathbf{B}$

2. Seja $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & x^2 \\ 2x-1 & 0 \end{bmatrix}$. Se $\mathbf{A}' = \mathbf{A}$, determine x.

3. Assinale verdadeiro ou falso:
(0)(0) $(-\mathbf{A})' = -(\mathbf{A}')$
(1)(1) $(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = \mathbf{B}' + \mathbf{A}'$
(2)(2) Se $\mathbf{AB} = 0$, então $\mathbf{A} = 0$ ou $\mathbf{B} = 0$.
(3)(3) $(k_1\mathbf{A})(k_2\mathbf{A}) = (k_1k_2)\mathbf{AB}$
(4)(4) $(-\mathbf{A})(-\mathbf{B}) = -(\mathbf{AB})$
(5)(5) Se $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ são matrizes simétricas, então $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$
(6)(6) Se $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = 0$, então $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A} = 0$.
(7)(7) Se podemos efetuar o produto $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}$, então $\mathbf{A}$ é uma matriz quadrada.

4. Um construtor tem contratos para construir 3 estilos de casa: moderno, mediterrâneo e colonial. A quantidade de material empregada em cada tipo de casa é dada pela matriz:

$$\begin{array}{l} \\ \text{Moderno} \\ \text{Mediterrâneo} \\ \text{Colonial} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} \text{Ferro} & \text{Madeira} & \text{Vidro} & \text{Tinta} & \text{Tijolo} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 5 & 20 & 16 & 7 & 17 \\ 7 & 18 & 12 & 9 & 21 \\ 6 & 25 & 8 & 5 & 13 \end{pmatrix} \end{array}$$

a) Se ele vai construir 5, 7 e 12 casas dos tipos moderno, mediterrâneo e colonial, respectivamente, quantas unidades de cada material serão empregadas?
b) Suponha agora que os preços por unidade de ferro, madeira, vidro, tinta e tijolo sejam, respectivamente, 15, 8, 5, 1 e 10 u.c.p. Qual é o preço unitário de cada tipo de casa?
c) Qual o custo total do material empregado?

5. Resolva o sistema de equações, escrevendo as matrizes ampliadas, associadas aos novos sistemas.

$$\begin{cases} 2x - y + 3z = 11 \\ 4x - 3y + 2z = 0 \\ x + y + z = 6 \\ 3x + y + z = 4 \end{cases}$$

6. Dado o sistema $\begin{cases} 3x + 5y = 1 \\ 2x + z = 3 \\ 5x + y - z = 0 \end{cases}$ escreva a matriz ampliada, associada ao sistema e reduza-a à forma escada reduzida por linhas, para resolver o sistema original.

7. Encontre todas as soluções do sistema

$$\begin{cases} x + 3y + 2z + 3w - 7t = 14 \\ 2x + 6y + z - 2w + 5t = -2 \\ x + 3y - z + 2t = -1 \end{cases}$$

Resolva os sistemas seguintes achando as matrizes ampliadas linha reduzidas à forma escada e dando também seus postos, os postos das matrizes dos coeficientes e, se o sistema for possível, o grau de liberdade.

8. $x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 1$

9. $\begin{cases} x+y+z=4 \\ 2x+5y-2z=3 \end{cases}$

10. $\begin{cases} x-2y+3z=0 \\ 2x+5y+6z=0 \end{cases}$

11. $\begin{cases} x+2y+3z=0 \\ 2x+y+3z=0 \\ 3x+2y+z=0 \end{cases}$

12. Chamamos de sistema homogêneo de n equações e m incógnitas aquele cujos termos independentes, b_i, são todos nulos.
a) Um sistema homogêneo admite ao menos uma solução, qual é ela?
b) Encontre os valores de $k \in \mathbb{R}$, tais que o sistema homogêneo a seguir tenha uma solução distinta da trivial.

$$\begin{cases} 2x-5y+2z=0 \\ x+y+z=0 \\ 2x+kz=0 \end{cases}$$

13. Dado o sistema

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & 4 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \\ 8 \end{bmatrix}$$

a) Encontre uma solução dele sem resolvê-lo. (Atribua valores para x, y, z e w.)
b) Agora, resolva efetivamente o sistema, isto é, encontre sua matriz-solução.
c) Resolva também o sistema homogêneo associado.
d) Verifique que toda matriz-solução obtida em b) é a soma de uma matriz-solução encontrada em c) com a solução particular que você encontrou em a).

14. Calcule $det \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 4 & -3 & 7 \end{bmatrix}$ em relação à segunda coluna, usando o desenvolvimento de Laplace.

15. Dadas as matrizes $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ *e* $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, calcule
a) $det\mathbf{A} + det\mathbf{B}$
b) $det(\mathbf{A} + \mathbf{B})$

16. Sejam **A** e **B** matrizes do tipo $n \times n$. Verifique se as colocações a seguir são verdadeiras ou falsas.
a) $det(\mathbf{AB}) = det(\mathbf{BA})$
b) $det(\mathbf{A}') = det\mathbf{A}$
c) $det(2\mathbf{A}) = 2det\mathbf{A}$
d) $det(\mathbf{A}^2) = (det\mathbf{A})^2$
e) $det\mathbf{A}_{ij} < det\mathbf{A}$
f) Se **A** é uma matriz 3×3, então
$a_{11}\Delta_{11} + a_{12}\Delta_{12} + a_{13}\Delta_{13} = a_{21}\Delta_{21} + a_{22}\Delta_{22} + a_{23}\Delta_{23}$

17. Calcule $det\mathbf{A}$, onde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

18. Encontre $\mathbf{A}^{-1}$, onde

$$a)\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 3 & 6 & 4 \\ 2 & 4 & 3 \end{bmatrix} \; b)\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 6 & 1,2 & 3 \\ 1,2 & 1,5 & 1,6 \\ 3 & 1,6 & 9 \end{bmatrix} \; c)\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 5 & 8 \\ 13 & 21 & 34 \end{bmatrix} \; d)\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 5 & 7 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

19. Mostre que $det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{bmatrix} = (a-b)(b-c)(c-a)$

20. Verdadeiro ou falso?
a) Se $det\mathbf{A} = 1$, então $\mathbf{A}^-1 = \mathbf{A}$.
b) Se $\mathbf{A}$ é uma matriz triangular superior e $\mathbf{A}^{-1}$ existe, então também $\mathbf{A}^{-1}$ será uma matriz triangular superior.
c) Se $\mathbf{A}$ é uma matriz escalar $n \times n$ da forma $k\mathbf{I}_n$, então $\det\mathbf{A} = k^n$.
d) Se $\mathbf{A}$ é uma matriz triangular, então $det\mathbf{A} = a_{11} + \cdots + a_{nn}$.

21. Dado o sistema

$$\begin{cases} x + y - w = 0 \\ x - z + w = 2 \\ y + z - w = -3 \\ x + y - 2w = 1 \end{cases}$$

a) Calcule o posto da matriz dos coeficientes.
b) Calcule o posto da matriz ampliada.
c) Descreva a solução desse sistema.
d) Considere um sistema homogêneo $\mathbf{AX} = \mathbf{0}$, onde $\mathbf{A}$ é uma matriz $n \times n$.
Que condição você deve impor sobre $\mathbf{A}$, para que o sistema admita soluções diferentes da solução trivial ($\mathbf{X} = \mathbf{0}$)?

Respostas

1. a) $\begin{bmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 5 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 15 \\ -4 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 6 \\ 1 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 4 & -2 \\ 8 & -4 \end{bmatrix}$ e) $\begin{bmatrix} 0 & 3 & 7 \end{bmatrix}$ f) $\begin{bmatrix} -7 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

2. $x = 1$.

3. V, V, F, V, F, F, F, V.

4.
a) $\begin{bmatrix} 146 & 526 & 260 & 158 & 388 \end{bmatrix}$
b) $\begin{bmatrix} 492 \\ 528 \\ 465 \end{bmatrix}$
c) Cr\$ 11.736,00

5. (x, y, z) = (-1, 2, 5)

6. (x, y, z) = $(\frac{7}{16}, -\frac{1}{16}, \frac{17}{8})$

7. (x, y, z, w, t) = (1 - 3y - t, y, 2 + t, 3 + 2t, t)

8. $x_1 = 1 - 2x_2 + x_3 - 3x_4$
$p_a = 1; p_c = 1; gL = 3;$

9. $x = \frac{17}{3} - \frac{7}{3}z; y = -\frac{5}{3} + \frac{4}{3}z$
$p_a = 2 = p_c; gL = 1;$

10. $x = 3z; y = 0$
$p_a = 2 = p_c; gL = 1;$

11. $x = y = z = 0 = gL$
$p_a = p_c = 3$

12. a) $x_i = 0$ b) k = 2

13. a) x = 0, y = z = 1, w = 0.
b) $\begin{bmatrix} \lambda \\ 1 \\ 1 \\ \lambda \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} \lambda \\ 0 \\ 0 \\ \lambda \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} \lambda \\ 1 \\ 1 \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda \\ 0 \\ 0 \\ \lambda \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

14. 21

15. a) 1 b) 3

16. a) V b) V c) F d) V e) F f) V

17. 12

18. a) $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 0,216 & -0,118 & -0,051 \\ -0,118 & 0,888 & -0,118 \\ -0,051 & -0,118 & 0,149 \end{bmatrix}$ c) Não existe. d) $\begin{bmatrix} 1 & -0,4 & 1,2 \\ -2 & 1 & -1 \\ 1 & -0,4 & 0,2 \end{bmatrix}$

20. a) F b) V c) V d) F

21. a) 3 b) 3 c)Possível e indeterminado. d) As linhas de **A** como vetores são linearmente dependentes. Linearmente Dependente: Pelo menos uma das linhas (qualquer uma) é combinação linear das outras.

Capítulo 6

Análise Combinatória

Análise Combinatória é um conjunto de procedimentos que possibilita a construção de grupos diferentes formados por um número finito de elementos de um conjunto sob certas circunstâncias. Nesses grupos é possível realizar a análise das possibilidades e combinações.

Observação:
Definição de fatorial $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2)...2 \cdot 1$
Fatorial de 0 $\Rightarrow 0! = 1$
$1! = 1$

6.1 Arranjos fatoriais

Nos arranjos, os agrupamentos dos elementos dependem da ordem e da natureza dos mesmos.

6.1.1 Arranjo com repetição

O arranjo com repetição é usado quando a ordem dos elementos importa e cada elemento pode ser contado mais de uma vez.

$$A_{n,p} = n^p$$

6.1.2 Arranjo sem repetição

Para obter o arranjo simples de n elementos tomados, p a p ($p \leq n$), considerando que não há repetição, utiliza-se a seguinte expressão:

$$A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!}$$

As permutações são agrupamentos ordenados, donde o número de elementos do agrupamento é igual ao número de elementos disponíveis, expresso pela fórmula:

$$P_n = n \cdot (n-1) \cdot (n-2)...2 \cdot 1 = n!$$

6.2 Combinações

Na combinação, a ordem em que os elementos são tomados não é importante.

$$C_{n,p} = \binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

Onde n é o total de elementos e p o número de elementos escolhidos.

Exercícios Propostos

1. De quantas maneiras distintas é possível dispor as letras da palavra GOL?

2. Você possui 5 renas, Relâmpago, Corredora, Trovão, Rodolfo e Dançarina, e deseja que 4 delas conduzam o seu trenó voador. Além disso, você sempre tem suas renas voando em fila única. De quantas maneiras diferentes você pode organizar suas renas?

3. Você acabou de ganhar um ingresso para andar de barco, e pode levar 2 amigos com você! Infelizmente, você tem 5 amigos que querem ir.Quantos grupos diferentes de amigos você pode levar com você?

4. Sofia está fazendo as malas para suas férias. Ela tem 7 livros diferentes, mas apenas 3 cabem em sua mala. Quantos grupos diferentes de 3 livros ela pode levar?

5. Osmar está fazendo as malas para suas férias. Ele tem 9 camisas diferentes, mas apenas 5 cabem em sua mala. Quantos grupos diferentes de 5 camisas ele pode levar?

6. Quantos números naturais pares de três algarismos distintos existem com os algarismos 1, 2, 3, 4, 5, 6 e 9?

7. Quantos são os gabaritos possíveis de um teste de 10 questões de múltipla escolha, com cinco alternativas por questão?

8. Seis pessoas, entre elas João e Pedro, vão ao cinema. Existem seis lugares vagos, alinhados e consecutivos. O número de maneiras distintas como as seis podem sentar-se sem que João e Pedro fiquem juntos é:
a) 720
b) 600
c) 480
d) 240
e) 120

9. Quantos anagramas da palavra GARRAFA apresentam as letras A, A, A, R, R juntas em qualquer ordem?

10. Usando os algarismos 2, 3, 4, 5, 6, 8 e 9, sem repetição, quantos números pares de três algarismos e maiores que 234 pode-se formar?
a) 110
b) 119
c) 125
d) 129
e) 132

Respostas

1. 6

2. 120

3. 10

4. 35

5. 126

6. 90

7. 5^{10}

8. c)

9. 60

10. b)

Capítulo 7

Estatística Básica

Bibliografia recomendada:
BUSSAB, W. MORETTIN, P. *Estatística Básica.* Saraiva. 9ª ed. 2017.
MAGALHÃES,M. LIMA, A. *Noções de Probabilidade e Estatística.* 6ª ed.

7.1 Introdução à Estatística

A **estatística** é um conjunto de técnicas que permite, de forma sistemática, organizar, descrever, analisar e interpretar dados oriundos de estudos ou experimentos, realizados em qualquer área do conhecimento.

Ela se divide em três principais áreas:

- A **Estatística Descritiva** se refere a um conjunto de técnicas destinadas a descrever e resumir os dados, a fim de que possamos tirar conclusões a respeito de características de interesse.
- A **Probabilidade** é a teoria matemática utilizada para estudar a incerteza oriunda de fenômenos de caráter aleatório.
- A **Inferência Estatística** é compreendida como o estudo de técnicas que possibilitam a extrapolação, a um grande conjunto de dados, das informações e conclusões obtidas a partir de um subconjunto de valores, usualmente de dimensão muito menor.

Ao grande conjunto de dados que contém a característica de interesse, damos o nome de **população**. O subconjunto da população, em geral com dimensão sensivelmente menor, o qual utilizamos para o estudo da mesma, denominamos de **amostra**. A condição ou característica de um elemento de estudo que pode assumir valores diferentes em diferentes elementos, como peso, altura, é chamada de **variável**.
Neste material, estudaremos principalmente a Estatística Descritiva e a Probabilidade.
Obs: Diferença entre População e Amostra

- População: Uma população é um conjunto de pessoas, itens ou eventos sobre os quais você quer fazer inferências
- Amostra: Uma amostra é um subconjunto de pessoas, itens ou eventos de uma população maior que você coleta e analisa para fazer inferências

7.2 Estatística Descritiva

7.2.1 Tipos de variáveis

1. Qualitativa
    - Nominal: não existe ordenação nas possíveis respostas (ex: sexo, estado civil)
    - Ordinal: existe uma certa ordem nas possíveis respostas (ex: escolaridade)

2. Quantitativa
   - Discreta: os possíveis valores formam um conjunto finito ou enumerável de números, são variáveis de contagem (ex: número de filhos)
   - Contínua: os possíveis valores estão dentro de um intervalo, aberto ou fechado, dos números reais. (ex: peso de um indivíduo)

7.2.2 Medidas resumo

Medidas de posição

São as estatísticas que representam uma série de dados orientando-nos quanto à posição da distribuição em relação ao eixo horizontal do gráfico da curva de frequência.

- A **Moda**(m_o) é a realização mais frequente no conjunto de valores.
- A **Mediana**(m_d) é a realização que ocupa a posição central da série de observações, quanto estão ordenadas em ordem crescente. Se o número de observações for par, selecionamos as duas observações centrais e calculamos a média.
- A **Média Aritmética**($\bar{x}$) a soma das observações dividida pelo número delas.

Medidas de Dispersão

Com o propósito de obter uma medida que represente a variabilidade dos dados, uma vez que conjuntos de dados diferentes podem apresentar a mesma medida de posição (como a média), são definidas as medidas de dispersão.

- A **Amplitude** referente a uma certa variável é definida como a diferença entre o maior e menor valor do conjunto de dados
- A **Variância Populacional** referente à variável X de um conjunto de dados é definida por

$$var_{obs} = \sigma^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2$$

- Essa expressão pode ser redefinida da seguinte forma

$$var_{obs} = \sigma^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i - \bar{x}^2$$

- Para manter a mesma unidade dos dados originais, é conveniente definirmos o **Desvio Padrão Populacional** como sendo

$$dp_{obs} = \sigma = \sqrt{var_{obs}}$$

- Quando os dados são coletados de uma amostra, pode-se calcular a **Variância e o Desvio Padrão Amostrais** pelas fórmulas, respectivamente:

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$$

$$s = \sqrt{s^2}$$

Figure 7.1: *

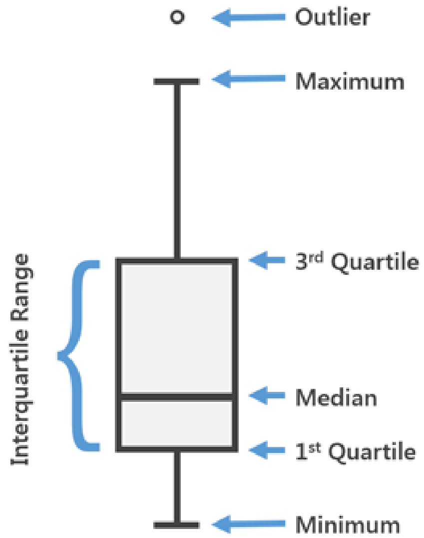


Figura 1: Elementos do box-plot

7.2.3 Quantis e box-plot

Os **quantis** são valores que limitam uma certa porcentagem de observações da variável. Os quantis mais utilizados são aqueles que dividem os dados em quatro partes, e são denominados de **quartis**. Dessa forma, 25% das observações ordenadas estão abaixo do primeiro quartil (Q_1) e 75% estão abaixo do 3 quartil (Q_3). O segundo quartil representa a mediana, discutida anteriormente.

Uma representação gráfica envolvendo quartis é o **box-plot** ou gráfico de caixa, que permite visualizar vários aspectos da distribuição de dados, tais como a posição, variablidade, assimetria e presença de valores atípicos.

Na Figura 1, é possível ver que o box-plot nos indica valores outliers, o valor máximo da distribuição, o 3 quartil(Q_3), a mediana, o 1º quartil (Q_1) e o valor mínimo da distribuição. A diferença entre o 3º e o 1º quartil é denominado de Intervalo Interquartil (IQ). Os valores atípicos, também chamados de outliers, usualmente são calculados como os valores que se situam fora do intervalo, seja abaixo ou acima, denotado por $[Q_1 - 1,5IQ; Q_3 + 1,5IQ]$. Nem toda distribuição apresentará esses valores extremos.

7.3 Probabilidades

7.3.1 Definições

- **Espaço Amostral (Ω):** conjunto de todos os resultados possíveis de um experimento
- **Evento:** subconjunto de um espaço amostral, normalmente representado por letras maiúsculas
- **Probabilidade:** possibilidade de um dado evento ocorrer. Pode variar de 0 a 1.

7.3.2 Propriedades

- **Regra da adição de probabilidades**
  Sejam A e B dois eventos quaisquer de Ω, então

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

- **Probabilidade condicional**
  Dados dois eventos A e B, a probabilidade condicional de A dado que B ocorreu é representada

por $P(A|B)$ e dada por

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)},\ P(B) > 0$$

- **Independência de eventos**
  Dois eventos A e B são independentes se a informação da ocorrência de B não altera a probabilidade da ocorrência de A. Isto é

  $$P(A|B) = P(A),\ P(B) > 0$$

  ou ainda a seguinte forma equivalente:

  $$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

  não é difícil verificar que se A é independente de B, então B é independente de A.

- **Teorema de Bayes**
  Uma das relações mais importantes envolvendo probabilidades condicionais é dada pelo Teorema de Bayes, que é representado pela fórmula

  $$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)P(B|A)}{P(B)}$$

  Ou ainda, a probabilidade de ocorrência de um evento C_i, supondo-se a ocorrência do evento A, é dada por

  $$P(C_i|A) = \frac{P(C_i)P(A|Ci)}{\sum_{j=1}^{n} P(C_j)P(A|C_j)}$$

Exercícios Propostos

1. Classifique cada uma das variáveis abaixo em qualitativa (nominal/ordinal) ou quantitativa (discreta/contínua):
a) Ocorrência de hipertensão pré-natal em grávidas com mais de 35 anos (sim ou não são possíveis respostas para essa variável)
b) Intenção de voto para presidente (possíveis repostas são os nomes dos candidatos, além de não sei)
c) Perda de peso de maratonistas na corrida São Silvestre, em quilos
d) Intensidade da perda de peso de maratonistas na Corrida de São Silvestre (leve, moderada, forte)
e) Grau de satisfação da população brasileira com relação ao trabalho de seu presidente (valores de 0 a 5, com 0 indicando totalmente insatisfeito e 5 totalmente satisfeito)

2. Vinte e um pacientes de uma clínica médica tiveram o seu nível de potássio no plasma medido. Os resultados foram os seguintes:

Nível	Frequência
$2,25 \vdash 2,55$	1
$2,55 \vdash 2,75$	3
$2,75 \vdash 2,95$	2
$2,95 \vdash 3,15$	4
$3,15 \vdash 3,35$	5
$3,35 \vdash 3,65$	6

a) Construa o histograma
b) Determine o 1°, 2° e 3° quartis
c) Qual a porcentagem dos valores que estão acima do nível 3?

3. Uma nova ração foi fornecida a suínos recém-desmamados e deseja-se avaliar sua eficiência. A ração tradicional dava um ganho de peso ao redor de 3,5kg em um mês. A seguir, apresentamos os dados referentes ao ganho, em quilos, para essa nova ração, aplicada durante um mês em 200 animais nas condições acima.

Ganho	Frequência
$1,0 \vdash 2,0$	45
$2,0 \vdash 3,0$	83
$3,0 \vdash 4,0$	52
$4,0 \vdash 5,0$	15
$5,0 \vdash 6,0$	4
$6,0 \vdash 7,0$	1

a) Construa o histograma
b) Determine o 1°, 2° e 3° quartis
c) Você acha que a nova ração é mais eficiente que a tradicional?

4. Para cada um dos casos abaixo, escreva o espaço amostral correspondente e conte seus elementos.
a) Uma moeda é lançada duas vezes e observam-se as faces obtidas
b) Um dado é lançado duas vezes e a ocorrência de face par ou ímpar é observada
c) Uma urna contém 10 bolas azuis e 10 vermelhas com dimensões rigorosamente iguais. Três bolas são selecionadas ao acaso com reposição e as cores são anotadas

5. Uma universidade tem 10 mil alunos dos quais 4 mil são considerados esportistas. Temos, ainda, que 500 alunos são do curso de biologia diurno, 700 da biologia noturno, 100 são esportistas e da biologia diurno e 200 são esportistas e da biologia noturno. Um aluno é escolhido, ao acaso, e pergunta-se a probabilidade de:
a) Ser esportista
b) Ser esportista e aluno da biologia noturno
c) Não ser da biologia
d) Ser esportista ou aluno da biologia
e) Não ser esportista, nem aluno da biologia

6. Considere dois eventos A e B, mutuamente exclusivos, com P(A) = 0,3 e P(B) = 0,5. Calcule:
a)$P(A \cap B)$
b)$P(A \cup B)$
c)$P(A|B)$
d)$P(A^c)$
e)$P((A \cup B)^c)$

7. Se $P(A \cup B)$ = 0,8; P(A) = 0,5 e P(B) = x, determine o valor de x no caso de:
a) A e B serem mutuamente exclusivos.
b) A e B serem independentes

8. Se P(B) = 0,4; P(A) = 0,7 e $P(A \cap B) = 0,3$; Calcule P($A|B^c$).

9. Verifique se são válidas as afirmações:
a) Se P(A) = 1/3 e $P(B|A) = 3/5$ então A e B não podem ser disjuntos.
b) Se P(A) = 1/2, $P(B|A) = 1$ e $P(A|B) = 1/2$ então A não pode estar contido em B.

10. O São Paulo Futebol Clube ganha com probabilidade de 0,7 se chove e com 0,8 se não chove. Em Setembro a probabilidade de chuva é de 0,3. O São Paulo ganhou uma partida em Setembro, qual a probabilidade de ter chovido nesse dia?

11. Você entrega a seu amigo uma carta, destinada à sua namorada, para ser colocada no correio. Entretanto, ele pode se esquecer com probabilidade 0,1. Se não esquecer, a probabilidade de que o correio extravie a carta é de 0,1. Finalmente, se foi enviada pelo correio a probabilidade de que a namorada não a receba é de 0,1.
a) Sua namorada não recebeu a carta. Qual a probabilidade de seu amigo ter esquecido de colocá-la no correio?
b) Avalie a possibilidade de o namoro continuar, se este depender da chegada da carta enviada.

12. Uma companhia que fura poços artesianos trabalha numa região escolhendo, aleatoriamente, o ponto de furo. Não encontrando água nessa tentativa, sorteia outro local e, caso também não tenha sucesso, faz uma terceira e última tentativa. Admita probabilidade de 0,7 de encontrar água em qualquer ponto dessa região. Calcule a probabilidade de:
a) Encontrar água na primeira tentativa.
b) Encontrar água em até duas tentativas.
c) Encontrar água.

13. Suponha que X represente o númerode horas de atividade física por semana. Considere a tabela a seguir:

Sexo / Atividade	$0 \leq X < 3$	$3 \leq X < 5$	$X \geq 5$
Feminino	22	8	7
Masculino	3	4	6

a) Qual é a probabilidade de sortear aleatoriamente uma menina com atividade física semanal na faixa de [3,5) horas?
b) Calcule $P(X \geq 5)$
c) Calcule a probabilidade de que um rapaz escolhido aleatoriamente dedique pelo menos 5 horas à atividade física. Idem para uma moça.

14. Um candidato a motorista treina na autoescola e acredita quepassa no exame com probabilidade 0,7. Se não passar, fará mais treinamento, o que ele estima que lhe aumentará em 10% a probabilidade de passar, isto é, no segundo exame passará com 0,77 de probabilidade.
a) Supondo que ele continue acreditando nesse aumento de possibilidade, em que exame ele será aprovado com certeza?
b) Qual é a possibilidade de que serem necessários mais de 2 exames?

15. Você está jogando um jogo no qual você defende sua vila de uma invasão de orcs.Há 3 personagens (elfo, hobbit ou humano) e 5 ferramentas de defesa (mágica, espada, escudo, estilingue ou guarda-chuva) para escolher.Se você escolher aleatoriamente seu personagem e sua ferramenta, qual é a probabilidade de que você seja um elfo que use mágica?

16. Você está em uma loja de roupas que tinge suas roupas enquanto você espera. Você pode escolher a partir de uma opção de 4 peças de roupas (camisa, calça, meias ou chapéu) e de 3 cores (roxo, azul ou laranja). Se você escolher aleatoriamente a peça de roupa e a cor, qual é a probabilidade de que você fique com meias que não sejam azuis?

17. Você está jantando em um restaurante que serve 5 tipos de massa (espaguete, gravatinha, fettuccine, ravióli e macarrão) com 4 sabores diferentes (molho de tomate, molho de queijo, molho com carne e azeite). Se você escolher aleatoriamente seu tipo de massa e sabor, qual é a probabilidade de que você acabe com alguma coisa que não seja espaguete com molho de tomate?

18. Elisabete mora em São Francisco e trabalha em Mountain View. De manhã, ela tem 3 opções de transporte (pegar um ônibus, um táxi ou um trem) para ir trabalhar, e, à noite, ela tem as mesmas 3 opções para voltar para casa. Se Elisabete escolher aleatoriamente o transporte de manhã e à noite, qual é a probabilidade de que ela use um táxi exatamente uma vez?

19. Um pote contém 4 bolas de gude vermelhas, 4 bolas de gude verdes e 5 bolas de gude azuis. Se pegarmos uma bola de gude e depois outra, sem colocar a primeira de volta no pote, qual a probabilidade de que a primeira bola de gude seja azul e de que a segunda seja verde?

20. Se você jogar uma moeda justa 4 vezes, qual é a probabilidade de conseguir exatamente 2 coroas?

21. Se você jogar uma moeda justa 5 vezes, qual é a probabilidade de conseguir exatamente 3 coroas?

22. Uma sala de aula tem 7 estudantes: 5 meninos e 2 meninas. Se o professor escolher um grupo de 4 estudantes aleatoriamente, qual a probabilidade de que todos no grupo sejam meninos?

23. Uma sala de aula tem 8 estudantes: 4 meninos e 4 meninas. Se a professora escolher um grupo de 3 estudantes aleatoriamente, qual a probabilidade de que todos no grupo sejam meninas?

Respostas

1. a) Qualitativa nominal b) Qualitativa nominal c) Quantitativa Continua d) Qualitativa ordinal e) Qualitativa ordinal

2. b) $Q_1 = 2,90$; $Q_2 = 3,17$; $Q_3 = 3,39$ c) 66,7%

3. b) $Q_1 = 2,06; Q_2 = 2,66; Q_3 = 3,42$ c) Não. Observe Q_3

4. a) Ω = {CC, CR, RC, RR}, com C sendo cara e R; coroa; contém 4 elementos.
b) Ω = { PP, PI, IP, II}, com P para face par e I para ímpar; tem 4 elementos.
c) Ω = {AAA, AAV, AVA, VAA, AVV, VAV, VVA, VVV}; sendo A bola azul e V vermelha; contém 8 elementos.

5. a) 0,4 b) 0,02 c) 0,88 d) 0,49 e) 0,51

6. a) 0 b) 0,8 c) 0 d) 0,7 e) 0,2

7. a) 0,3 b) 0,6

8. 0,67

9. a) Correta b) Incorreta

10. 0,27

11. a) 0,369 b) 0,729

12. a) 0,210 b) 0,910 c) 0,973

13. a) 0,16 b) 0,26 c) Rapaz: 0,462 Moça: 0,189

14. a) No 5º exame b) 0,069

15. 1/15

16. 1/6

17. 19/20

18. 4/9

19. 5/39

20. O número de resultados diferentes em que ocorrem 2 coroas é: $\frac{4!}{2!2!} = 6$
O número de resultados possíveis é: $2^4 = 16$
Portanto, a resposta é $6/16 = 3/8$

21. $5/16$

22. $1/7$

23. $1/14$