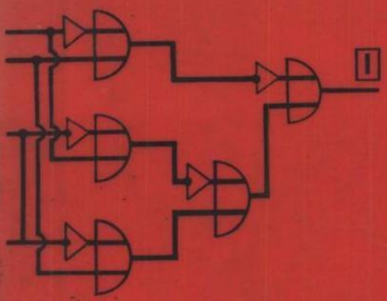


CIBERNÉTICA

W. ROSS
ASHBY

INTRODUÇÃO À CIBERNÉTICA

estudos
estudos
estudos

Uma Introdução à Cibernética

Coleção Estudos

Dirigida por J. Guinsburg

Equipe de realização: Gita K. Ghinzberg, tradução; Geraldo Gerson de Souza, produção; Moysés Baumstein, capa e trabalhos técnicos.

Obra publicada
com a colaboração da

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

REITOR: *Prof. Dr. Miguel Reale*

EDITÔRA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

W. Ross Ashby

UMA INTRODUÇÃO À CIBERNÉTICA

Editôra Perspectiva São Paulo

Título do original:
An Introduction to Cybernetics

Direitos exclusivos para a língua portuguêsa
EDITÔRA PERSPECCTIVA S. A.
Av. Brig. Luís Antônio, 3.025
São Paulo
1970

Prefácio

Muitos pesquisadores das ciências biológicas — fisiólogos, psicólogos, sociólogos — estão interessados em cibernética e gostariam de aplicar os seus métodos e técnicas a suas próprias especialidades. Muitos, porém, têm sido impedidos de dedicar-se à matéria devido à impressão de que ela exige um longo estudo prévio de eletrônica e de matemática pura avançada; pois formaram a idéia de que a cibernética e estas disciplinas são inseparáveis.

Contudo, o autor está convencido de que êste ponto de vista não procede. Pode-se abordar as idéias básicas da cibernética sem relacioná-las à eletrônica, e são fundamentalmente simples; assim, embora se façam mister técnicas avançadas para aplicações avançadas, muito pode ser feito, especialmente nas ciências biológicas, pelo uso de técnicas bem simples, desde que utilizadas com uma clara e profunda compreensão dos princípios implicados. É crença do autor que, se a matéria fôr alicerçada no lugar-comum e no bem-entendido, sendo depois cuidadosamente edificada, passo a passo, não há razão para que um pesquisador com apenas conhecimentos elementares de matemática não consiga um entendimento completo de seus princípios básicos. Com tal compreensão estará portanto capacitado a ver exatamente quais as técnicas ulteriores que deverá aprender para seguir adiante; e, o que é particularmente útil, estará capacitado a perceber quais as técnicas que pode ignorar sem maior prejuízo para o seu propósito.

O livro pretende proporcionar uma introdução dêste tipo. Parte de lugares-comuns e de conceitos bem conhecidos, e prossegue, passo a passo, mostrando como tais conceitos podem ser precisados e desenvolvidos até desembocarem em temas como realimentação, estabilidade, regulação, ultra-estabilidade, informação, codificação, ruído e outros tópicos da cibernética. O livro não requer conhecimento de matemática afora álgebra elementar; em particular, as deduções não dependem em parte alguma do cálculo diferencial e integral (as poucas referências a êle podem ser ignoradas sem qualquer prejuízo, pois se destinam apenas a mostrar como o cálculo se entrosa nos assuntos discutidos, caso seja preciso utilizá-lo). As ilustrações e exemplos são, na maioria, colhidos nas ciências biológicas de preferência às físicas. Sua imbricação com o *Design for a Brain* é reduzida, de modo que os dois livros são pràticamente independentes. Relacionam-se, porém, ìntimamente, cumprindo tratá-los como complementares; cada um ajuda a esclarecer o outro.

Introdução à Cibernética divide-se em três partes.

A Primeira Parte aborda os princípios do Mecanismo, analisando matérias tais como sua representação por uma transformação, qual o sentido de "estabilidade", qual o sentido de "realimentação", as várias formas de independência, que passam existir dentro de um mecanismo e como é possível acoplar mecanismos. Introduz os princípios a que é mister obedecer quando o sistema é tão grande e complexo (e.g., cérebro ou sociedade) que sòmente pode ser tratado por métodos estatísticos. Introduz também o caso em que o sistema é de tal natureza que nem tudo nêle é acessível à observação direta — a chamada teoria da Caixa Preta.

A Segunda Parte utiliza os métodos desenvolvidos na Primeira a fim de estudar o que se entende por "informação" e como ela é codificada quando passa através de um mecanismo. Aplica êsses métodos a vários problemas de biologia e tenta mostrar algo da riqueza das aplicações possíveis. Leva à teoria de Shannon; assim, depois de familiarizar-se com essa Parte, o leitor poderá dedicar-se sem dificuldade ao estudo da própria obra de Shannon.

A Terceira Parte trata do mecanismo e da informação tal como são empregados em sistemas biológicos para a regulação e o contrôle, tanto nos sistemas congênitos estudados na fisiologia quanto nos sistemas adquiridos, que surgem na psicologia. Mostra como podemos erigir hierarquias de semelhantes reguladores e controladores, e como uma amplificação de regulação fica assim possibilitada. Dá uma explicação nova e, no todo, bem mais simples do princípio da ultra-estabilidade. Lança o fundamento de uma teoria geral dos sistemas reguladores complexos, desenvolvendo mais as idéias de *Design for a Brain.* Assim, de um lado proporciona uma explanação dos notáveis podêres de regulação que o cérebro possui e, de outro, fornece os princípios mediante os quais um projetista pode construir máquinas de igual poder.

Embora o presente livro se proponha a ser uma introdução acessível, de maneira alguma pretende reduzir-se a um simples bate-papo sôbre cibernética: foi escrito para os que desejam iniciar-se no seu conhecimento, para os que querem alcançar um efetivo e eficaz domínio do assunto. Contém, portanto, abundantes exercícios fáceis, cuidadosamente graduados, com sugestões e respostas explanatórias, de modo que o leitor, à medida que progrida, possa testar sua apreensão do que leu, e exercitar seus novos músculos intelectuais. Alguns poucos exercícios que exigem uma técnica especial foram assinalados da seguinte maneira: *Ex. Sua omissão não afetará o progresso do leitor.

Por facilidade de referência, a matéria foi dividida em seções: tôdas as referências são à seção e, como êsses números aparecem no cabeço de cada página, achar a seção desejada constitui trabalho tão simples e direto quanto achar uma página. A seção apresenta-se da seguinte maneira: S.9.14 — o que indica a décima quarta seção do Capítulo 9. As Figuras, Tabelas e Exercícios foram numerados no âmbito de sua própria seção; assim, Fig. 9.14.2 é a segunda figura na S.9.14. Uma referência simples, e.g., Ex. 4, é usada como referência dentro da mesma seção. Sempre que uma palavra é formalmente definida, sua impressão é feita em **negrito.**

Gostaria de expressar os meus agradecimentos a Michel B. Sporn, que verificou tôdas as respostas. Gostaria também de aproveitar esta oportunidade para expressar a minha profunda gratidão aos Diretores da Barnwood House e ao Dr. G. W. T. H. Fleming pelo generoso apoio que possibilitou estas pesquisas. Embora o livro abranja muitos tópicos, êles não passam de meios; o propósito foi, sempre, o de esclarecer quais princípios cabe seguir quando se procura restaurar a função normal de um organismo doente, que é, como um paciente humano, de temível complexidade. Espero que o nôvo entendimento possa conduzir a novos e efetivos tratamentos, pois a necessidade é grande.

Barnwood House
Gloucester

W. ROSS ASHBY

Sumário

O que é Nôvo

1

1.1. A Cibernética foi definida por Wiener como "a ciência do contrôle e da comunicação, no animal e na máquina" — numa palavra, como a arte do *comando*, e é a êste aspecto que o livro se dedicará. Coordenação, regulação e contrôle serão seus temas, pois são os de máximo interêsse prático e biológico.

Devemos, pois, empreender um estudo do mecanismo; mas uma pequena introdução é aconselhável, uma vez que a Cibernética trata do tema sob um ângulo nôvo e portanto inusitado. Sem esta introdução, o Capítulo 2 poderia parecer sèriamente deficiente. O nôvo ponto de vista requer claro entendimento, porquanto a menor vacilação inconsciente entre o velho e o nôvo é capaz de induzir em confusão.

1.2. *As peculiaridades da Cibernética.* Há muito livro que ostenta o título "Teoria das Máquinas", mas em geral contém informações sôbre coisas *mecânicas,* sôbre alavancas e engrenagens. A Cibernética é também uma "teoria das máquinas", mas não aborda coisas, mas *modos de comportar-se.* Não inquire "o que *é* esta coisa?", mas *"o que ela faz?"* Assim, está muito interessada numa proposição como "esta variável sofre uma oscilação harmônica simples", e preocupa-se muito pouco se a variável é a posição de um ponto numa roda ou um potencial num circuito elétrico. É, assim, essencialmente funcional e comportamental.

A Cibernética começou intimamente associada em múltiplas maneiras à Física, mas não depende fundamentalmente das leis da Física ou das propriedades da matéria. A Cibernética lida com tôdas as formas de comportamento na medida em que são regulares, ou determinadas ou reprodutíveis. A materialidade é irrelevante, assim como a vigência ou não das leis comuns da Física. (O exemplo fornecido na S. 4.15 esclarecerá esta afirmação.) *As verdades da cibernética não são condicionais por serem derivadas de algum outro ramo da ciência.* A cibernética tem seus próprios fundamentos. É em parte o escopo dêste livro exibi-los claramente.

1.3. A cibernética está para a máquina real — eletrônica, mecânica, neural ou econômica — assim como a geometria está para um objeto real em nosso espaço terrestre. Houve tempo em que "geometria" significava relações tais que poderiam ser demonstradas em objetos tridimensionais ou em diagramas bidimensionais. As formas oferecidas pela terra — animais, vegetais e minerais — eram maiores em número e mais ricas em propriedades do que a geometria elementar poderia fornecer. Naquele tempo, uma forma sugerida pela geometria mas indemonstrável no espaço comum era suspeita ou inaceitável. O espaço comum *dominava* a geometria.

Hoje, a posição é completamente diversa. A geometria existe por direito próprio e por fôrça própria. Ela pode agora tratar acurada e coerentemente um domínio de formas e espaços que excede de longe tudo o que o espaço terrestre possa apresentar. Hoje é a geometria que contém as formas terrestres, e não o inverso, pois as formas terrestres são meramente casos especiais numa geometria que abrange tudo.

Não é preciso salientar o ganho obtido com o desenvolvimento da geometria. A geometria agora atua como um quadro de referência em que tôdas as formas terrestres podem encontrar seu lugar natural, sendo as relações entre as várias formas prontamente verificáveis. A esta maior compreensão, segue-se um correspondente aumento no poder de contrôle.

A cibernética é similar em sua relação com a máquina real. Ela assume como tema o domínio de "tôdas as máquinas possíveis", e tem interêsse apenas secundário em saber se algumas delas não foram ainda construídas, quer pelo Homem, quer pela Natureza. O que a cibernética oferece é um quadro de referência em que tôdas as máquinas individuais podem ser ordenadas, relacionadas e entendidas.

1.4. A cibernética é, pois, indiferente à crítica de que algumas das máquinas sob sua consideração não se acham representadas entre as máquinas existentes entre nós. Nisto segue o caminho já trilhado com evidente êxito pela física matemática. Esta ciência de há muito deu proeminência ao estudo de sistemas sabidamente inexistentes — molas de massa nula, partículas que têm massa mas não têm volume, gases de comportamento perfeito e assim por diante. Afirmar que estas entidades não existem é verdade; mas a sua inexistência não significa que a física matemática seja mera fantasia; tampouco leva o físico a jogar fora seu tratado sôbre a Teoria da Mola de Massa Nula, pois a mencionada teoria é inestimável para êle em seu trabalho prático. O fato é que a mola de massa nula, embora desprovida de representação física, possui certas propriedades que a tornam de suma importância para o físico, se êle desejar compreender mesmo um sistema tão simples quanto um relógio.

O biólogo conhece e utiliza o mesmo princípio quando dedica ao *Amphioxus*, ou a alguma forma extinta, um estudo pormenorizado completamente desproporcional ante a sua atual importância ecológica ou econômica.

Do mesmo modo, a cibernética acentua certos tipos de mecanismo (S.3.3.) como de importância particular na teoria geral; e ela o faz sem levar em conta se máquinas terrestres eventualmente tornam comum esta forma. Só depois de examinar adequadamente as *possíveis* relações entre máquina e máquina volta-se para a consideração das formas efetivamente encontradas em algum ramo particular da ciência.

1.5. Em conformidade com êste método, que trabalha primordialmente com o compreensivo e o geral, a cibernética trata tìpicamente qualquer máquina dada, particular, perguntando não "que ação individual ela produzirá aqui e agora?", mas "quais são *todos* os possíveis comportamentos que pode produzir?"

Neste sentido é que a teoria da informação vem a desempenhar um papel essencial no assunto; pois a teoria da informação caracteriza-se essencialmente por lidar sempre com um *conjunto* de possibilidades; tanto os dados primários como as proposições finais versam quase sempre sôbre o conjunto como tal, e não sôbre algum elemento individual no conjunto.

Êste nôvo ponto de vista leva à consideração de novos tipos de problema. O ponto de vista mais antigo via, digamos, um óvulo transformar-se num coelho e perguntava: "por que acontece assim? — por que não continua simplesmente óvulo?" A tentativa de responder a esta questão conduziu ao estudo da energética e à descoberta de numerosas razões pelas quais o óvulo deveria transformar — sua gordura pode oxidar, e gordura produz energia livre; possui enzimas fosforilantes e pode passar seus metabólitos pelo ciclo de Krebs; e assim por diante. Nestes estudos o conceito de energia era fundamental.

Completamente diverso, embora igualmente válido, é o ponto de vista da cibernética. Ela admite que o óvulo contém energia livre abundante e que é metabòlicamente equilibrado de maneira tão delicada que chega a ser, em certo sentido, explosivo. Alguma forma de crescimento há de ocorrer; a cibernética pergunta: "por que as mudanças seriam para a forma de coelho e não para a de cachorro, de peixe, ou mesmo para uma forma teratoma?" A cibernética encara um conjunto de possibilidades bem mais amplo do que o real e depois indaga por que o caso particular deve conformar-se à sua usual restrição particular. Nesta discussão, questões de energia quase não desempenham papel algum — a energia é simplesmente tomada como um pressuposto. Muitas vêzes é mesmo irrelevante que o sistema seja fechado ou aberto para a energia; o que *importa* é a extensão com que o sistema está sujeito a fatôres de determinação e contrôle. Assim, nenhuma informação, sinal ou fator determinante pode passar de uma parte a outra sem ser registrado como um evento significativo. A cibernética pode, de fato, ser definida como *o estudo de sistemas abertos à energia mas fechados à informação e ao contrôle* — sistemas que são "impermeáveis à informação" (*information-tight*) (S.9.19).

1.6. *As utilizações da cibernética.* Após esta vista sumária da cibernética, podemos considerar alguns dos modos pelos quais ela promete ser útil. Limitarei minha atenção às aplicações mais promissoras nas ciências biológicas. O apanhado só pode ser breve e muito geral. Inúmeras aplicações já foram efetuadas e são por demais conhecidas para que exijam aqui uma descrição; sem dúvida, muitas outras serão desenvolvidas no futuro. Há, todavia, duas virtudes científicas peculiares da cibernética que merecem menção explícita.

Uma delas é que ela oferece um vocabulário singular e um conjunto singular de conceitos adequados à representação dos mais diversos tipos de sistema. Até recentemente, qualquer tentativa de relacionar os inúmeros fatos conhecidos a respeito de, digamos, servomecanismos com o que era conhecido sôbre o cerebelo via-se desnecessàriamente dificultada por serem as propriedades dos servomecanismos descritas em têrmos que cheiravam a pilôto automático, a aparelho de rádio ou a freio hidráulico, enquanto as do cerebelo eram descritas em têrmos que recendiam a sala de dissecação e a cabeceira de doente — aspectos irrelevantes às *similaridades* entre um servomecanismo e um reflexo cerebelar. A cibernética oferece um conjunto de conceitos que, por apresentarem correspondências exatas com cada ramo da ciência, podem ser postos em exata relação uns com os outros.

Verificou-se repetidamente na ciência que a descoberta de uma relação entre dois de seus ramos leva cada ramo a ajudar no desenvolvimento do outro. (Compare S.6.8.) O resultado é, amiúde, um crescimento acentuadamente acelerado de ambos. Como exemplos, surgem à mente o cálculo infinitesimal e a astronomia, o vírus e a molécula de proteína, o cromossomo e a hereditariedade. Nenhum dêles, sem dúvida, pode fornecer *provas* acêrca das leis do outro, mas cada um pode propiciar sugestões que eventualmente serão da maior ajuda e fecundidade. O assunto será reexaminado na S.6.8. No momento necessito apenas mencionar o fato de que a cibernética deverá, provàvelmente, revelar grande número de paralelismos interessantes e sugestivos entre a máquina, o cérebro e a sociedade. E pode prover uma linguagem comum através da qual descobertas em um ramo possam ser prontamente utilizadas em outros.

1.7. *O sistema complexo.* A segunda virtude peculiar da cibernética é que ela oferece um método para o tratamento científico do sistema em que a complexidade é saliente e demasiado importante para ser ignorada. Tais sistemas são, como bem o sabemos, mais do que comuns no mundo biológico.

Nos sistemas mais simples, os métodos da cibernética não apresentam às vêzes qualquer vantagem óbvia sôbre aquêles conhecidos há muito. É quando os sistemas se tornam complexos que os novos métodos revelam seu poder.

A ciência encontra-se hoje em uma espécie de fronteira. Durante dois séculos vem explorando sistemas que são ou intrìnsecamente simples ou capazes de ser analisados em componentes simples. O fato de um dogma como "variar os fatôres um de cada vez" ter sido aceito durante um século prova que os cientistas estavam amplamente preocupados em investigar sistemas do tipo *permitido* por êste método; pois êle é amiúde fundamentalmente impossível nos sistemas complexos. Sòmente na década de 20, graças aos trabalhos de Sir Ronald Fisher, com experiências feitas em solos agrícolas, reconheceu-se claramente haver sistemas complexos que simplesmente não permitem a variação de apenas um fator de cada vez — são tão dinâmicos e interligados que a alteração de um fator imediatamente atua como causa para suscitar alterações em outros, talvez em inúmeros outros. Até recentemente, a ciência tentou evitar o estudo de sistemas dêste tipo, concentrando a sua atenção sôbre aquêles que eram simples e, em particular, redutíveis (S.4.14).

No estudo de alguns sistemas, entretanto, a complexidade não poderia ser de todo evitada. O córtex cerebral do organismo de vida livre, o formigueiro como uma sociedade em funcionamento e o sistema econômico humano eram salientes tanto na sua importância prática como na impossibilidade de serem tratados pelos métodos mais antigos. Destarte, assistimos hoje a psicoses não-tratadas, a sociedades em declínio e a sistemas econômicos vacilantes, e o cientista é capaz de fazer pouco mais do que apreciar a plena complexidade do tema que está estudando. Porém a ciência nos dias de hoje está dando também os primeiros passos na direção do estudo da "complexidade" como um assunto de direito próprio.

Entre os métodos capazes de lidar com a complexidade distingue-se a cibernética. Rejeita as vagas idéias intuitivas que colhemos ao lidar com máquinas tão simples como o relógio-despertador e a bicicleta, e põe-se a trabalhar para erigir uma disciplina rigorosa do tema. Por um momento (como os primeiros capítulos dêste livro mostrarão) parece antes lidar com truísmos e trivialidades, mas isto ocorre apenas porque os fundamentos são lançados para serem amplos e fortes. São construídos de modo que a cibernética possa desenvolver-se com vigor, sem a indefinição primária que infetou a maioria das tentativas realizadas no passado com o fito de atacar, em particular, as complexidades do cérebro em ação.

A cibernética oferece a esperança de proporcionar métodos efetivos para o estudo, e contrôle, de sistemas intrìnsecamente dos mais complexos. Fa-lo-á salientando primeiro o que é exeqüível (pois muitas das investigações passadas provàvelmente pretendiam o impossível) e depois proporcionando estratégias generalizadas, de valor demonstrável, passíveis de uso uniforme em uma variedade de casos especiais. Neste sentido, oferece a esperança de prover os métodos essenciais para combater os males — psicológicos, sociais, econômicos — que ora nos vencem por sua intrìnseca complexidade. A Terceira Parte dêste livro não pretende oferecer tais métodos consumados, mas procura oferecer um fundamento para sua construção, e uma partida na direção certa.

Primeira parte

MECANISMO

As propriedades comumente atribuídas a qualquer objeto são, em última análise, nomes para seu comportamento.

(Herrick)

Mudança

2

2.1. O conceito mais fundamental da cibernética é o de "diferença", ou que duas coisas são reconhecìvelmente diferentes, ou que uma coisa mudou com o tempo. Não é necessário descrever agora seu âmbito de aplicação, pois os capítulos subseqüentes ilustrá-lo-ão de modo abundante. Tôdas as mudanças que podem ocorrer com o tempo estão naturalmente incluídas, pois quando plantas crescem e planêtas envelhecem e máquinas se movem está implícita alguma mudança de um estado para outro. Assim, será a nossa primeira tarefa desenvolver êste conceito de "mudança", não apenas tornando-o mais preciso mas também enriquecendo-o, convertendo-o a uma forma que a experiência comprovou ser necessária se se pretende efetuar progressos significativos.

Amiúde uma mudança ocorre de modo contínuo, isto é, em passos infinitesimais, como sucede quando a Terra se move através do espaço, ou escurece a pele de um banhista exposto ao sol. A consideração de passos infinitesimais, todavia, levanta um sem-número de dificuldades puramente matemáticas, de modo que evitaremos por completo a sua consideração. Em vez disso, admitiremos em todos os casos que as mudanças sucedem em passos finitos no tempo e que qualquer diferença é também finita. Pressuporemos que a mudança ocorre por meio de um pulo mensurável, assim como o dinheiro em uma conta bancária muda no mínimo de um centavo. Embora tal suposição possa parecer artificial num mundo em que a continuidade é comum, ela apresenta grandes vantagens numa Introdução e não é tão artificial como parece. Quando as diferenças são finitas, tôdas as questões importantes, como veremos mais tarde, podem ser decididas por simples contagem, de modo que é fácil estar completamente seguros quanto à estarmos certos ou não. Se considerássemos mudanças contínuas, teríamos amiúde de comparar infinitésimo contra infinitésimo, ou considerar o que poderíamos obter após somar um número infinito de infinitesimais — questões de modo algum fáceis de responder.

Como simples artifício, o discreto pode sempre ser transposto para o contínuo, de modo adequado a propósitos práticos, fazendo-se um gráfico do discreto onde os valores apareçam como pontos isolados. É fácil ver então a forma que as mudanças assumirão se os pontos devem tornar-se infinitamente numerosos e próximos.

Na realidade, porém, conservando a discussão no âmbito da diferença finita nada perdemos. Uma vez estabelecido com certeza o que ocorre quando as diferenças têm um tamanho particular, podemos considerar o caso em que elas são um pouco menores. Quando êste caso é conhecido com certeza, é possível considerar o que acontece quando são ainda menores. Podemos adiantar-nos neste caminho, sendo cada passo bem estabelecido, até que percebamos a tendência; então podemos afirmar qual é o limite quando a diferença tende a zero. Tal é, de fato, o método que o matemático sempre utiliza quando deseja estar efetivamente seguro do que ocorre quando as mudanças são contínuas.

Assim, nada se perde ao considerar o caso em que tôdas as diferenças são finitas; êle fornece um fundamento claro e simples; e, se fôr o caso, pode sempre ser convertido à forma contínua.

Êste assunto será retomado na S.3.3.

2.2. Daremos a seguir alguns têrmos que terão de ser usados repetidamente. Considere o exemplo simples em que, sob a influência da luz solar, a pele clara muda-se em pele escura. Algo, a pele clara, sofre a atuação de um fator, a luz solar, e muda-se em pele escura. Aquilo que sofre a atuação, a pele clara, será chamado **operando** (*operand*), o fator será denominado **operador** (*operator*), e aquilo no que o operando é mudado será chamado o **transformado** (*transform*). A mudança que ocorre, que podemos representar sem ambigüidade por

pele clara → pele escura

é a **transição** (*transition*).

A transição é especificada pelos dois estados e pela indicação do que é mudado em quê.

TRANSFORMAÇÃO

2.3. A transição singular é, todavia, muito simples. Experiências comprovaram que, para ser útil, o conceito de "mudança" deve ser ampliado ao caso que o operador pode atuar sôbre mais de um operando, induzindo em cada um dêles uma transição característica. Assim, o operador "exposição à luz do sol" induzirá um número de transições, entre as quais figuram:

solo frio → solo quente
chapa fotográfica não-exposta → chapa exposta
pigmento colorido → pigmento descorado

Tal conjunto de transições, sôbre um conjunto de operandos, constitui uma **transformação.**

Outro exemplo de transformação é dado pela simples codificação que muda cada letra de uma mensagem naquela que a segue no alfabeto, sendo o Z transformado em A: assim *CÃO* tornar-se-ia *DBP*. A transformação é definida pela tabela

$$
\begin{array}{c}
A \rightarrow B \\
B \rightarrow C \\
\cdots\cdots \\
Y \rightarrow Z \\
Z \rightarrow A
\end{array}
$$

Observe-se que a transformação é definida, não por qualquer referência ao que é "de fato"; nem por referência a qualquer causa física da mudança, mas dando-se um conjunto de operandos e enunciando-se no que cada qual é modificado. A transformação relaciona-se com o *que* sucede, não com *por que* isto sucede. Similarmente, embora possamos algumas vêzes saber algo do operador como coisa em si (como sabemos algo da luz do sol), tal conhecimento amiúde não é essencial; o que *devemos* saber é como atua sôbre os operandos; isto é, devemos conhecer a transformação que êle efetua.

Por conveniência de impressão, uma transformação dêste tipo pode também ser expressa assim:

$$
\downarrow \begin{array}{cccccc} A & B & \ldots & Y & Z \\ B & C & \ldots & Z & A \end{array}
$$

Usaremos tal forma como modêlo.

2.4. *Fechamento.* Quando um operador atua sôbre um conjunto de operandos pode ocorrer que o conjunto de transformados obtidos não contenha elemento algum que já não esteja presente no conjunto de operandos, isto é, a transformação não cria nenhum elemento nôvo.
Assim, na transformação

$$\downarrow \begin{matrix} A & B & \ldots & Y & Z \\ B & C & \ldots & Z & A \end{matrix}$$

cada elemento da linha inferior ocorre também na superior. Quando isso acontece, o conjunto de operandos *é* fechado para a transformação. A propriedade de "fechamento" é uma relação entre uma transformação e um conjunto particular de operandos; se um dos dois é alterado o fechamento pode alterar-se.

Deveremos observar que o teste de fechamento é feito, não por referência a qualquer que possa ser a causa da transformação, mas por referência aos pormenores da própria transformação. Pode pois aplicar-se mesmo que nada saibamos da causa responsável pelas mudanças.

Ex. 1: Se os operandos são os inteiros positivos 1, 2, 3, e 4, e o operador é "adicione-lhe três", a transformação será:

$$\downarrow \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{matrix}$$

Ela é fechada?

Ex. 2: Os operandos são aquelas letras do alfabeto que possuem equivalentes no alfabeto grego (i. e., *j*, *q* etc. exclusive), e o operador é "transforme cada letra na sua equivalente grega". A transformação é fechada?

Ex. 3: São ou não fechadas as seguintes transformações?

$$A\colon\downarrow \begin{matrix} a & b & c & d \\ a & a & a & a \end{matrix} \qquad B\colon\downarrow \begin{matrix} f & g & p & q \\ g & f & q & p \end{matrix}$$

$$C\colon\downarrow \begin{matrix} f & g & p \\ g & f & q \end{matrix} \qquad D\colon\downarrow \begin{matrix} f & g \\ g & f \end{matrix}$$

Ex. 4: Escreva, na forma do Ex. 3, uma transformação que possua apenas um operando e que seja fechada.

Ex. 5: O Sr. C, do Clube de Xadrez dos Excêntricos, possui um sistema de jôgo que prescreve rìgidamente, para cada posição possível, tanto para as brancas quanto para as pretas (exceto para as posições em que o jogador já está em mate), qual o melhor lance seguinte do jogador. Assim, a teoria define uma transformação de posição a posição. Certo de que a transformação é fechada, e de que C segue sempre mesmo sistema de jôgo, o Sr. D se oferece sem demora para jogar com C, numa aposta grande. Será D prudente?

2.5. Uma transformação pode ter um número infinito de operandos discretos; tal seria a transformação

$$\downarrow \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \ldots \\ 4 & 5 & 6 & 7 \ldots \end{array}$$

onde as reticências significam apenas que a lista continua assim infinitamente. Conjuntos infinitos podem levar a dificuldades, mas neste livro consideraremos apenas casos simples e claros. O fato de uma tal transformação ser fechada ou não é determinado pela possibilidade ou não (respectivamente) de uma pessoa encontrar alguma transformada particular, designável, que não ocorra entre os operandos. No exemplo dado acima cada transformada particular, 142857, por exemplo, será òbviamente encontrada entre os operandos. De modo que a transformação particular infinita é fechada.

Ex. 1: Em A os operandos são números pares a partir de 2, e os transformados são os seus quadrados:

$$A: \downarrow \begin{array}{ccc} 2 & 4 & 6 \ldots \\ 4 & 16 & 36 \ldots \end{array}$$

A é fechado?

Ex. 2: Na transformação B os operandos são todos os números inteiros positivos 1, 2, 3, .. e cada qual se transforma no seu dígito da direita de modo que, por exemplo, 127 → 7, e 6493 → 3. B é fechado?

2.6. *Notação.* Várias transformações tornam-se inconvenientemente longas quando são escritas *in extenso*. Já, na S.2.3, fomos obrigados a utilizar reticências (...) para representar operandos que não eram dados individualmente. Por meras razões práticas deveremos desenvolver um método mais compacto de escrever as nossas transformações, embora se deva compreender que, qualquer que seja a abreviação utilizada, a transformação fica bàsicamente especificada como na S.2.3. Descreveremos agora várias abreviações. Cumpre compreender que são uma simples estenografia, e que não implicam nada mais do que o já estabelecido explìcitamente nas últimas seções.

Amiúde a especificação de uma transformação é feita por alguma relação simples que liga todos os operandos aos seus respectivos transformados. Assim, a transformação do Ex. 2.4.1 pode ser substituída pela linha única

Operando → operando mais três.

É possível assim especificar a transformação inteira pela regra geral, escrita de modo mais compacto,

$$Op. \rightarrow Op. + 3,$$

junto com uma proposição de que os operandos são os números 1, 2, 3 e 4. E comumente a representação pode ser ainda mais breve, sendo as duas letras reduzidas a uma:

$$n \rightarrow n + 3 \quad (n = 1,2,3,4)$$

O têrmo acima "operando", ou a letra n (que significa *exatamente* a mesma coisa), pode parecer algo ambíguo. Se estivermos pensando de como, digamos, 2 é transformado, então "n" significa o número 2 e nada mais, e a expressão nos diz que êle se transformará no 5. A mesma expressão, todavia, pode também ser utilizada com n sem que se lhe atribua qualquer valor particular. Então representa a transformação inteira. Ver-se-á que esta ambigüidade não leva a qualquer confusão na prática, pois o contexto sempre indicará qual o significado subentendido.

Ex. 1: Condense em uma linha a transformação

$$\downarrow \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 11 & 12 & 13 \end{matrix}$$

Ex. 2: Similarmente condense as transformações:

$$\text{a: } \downarrow \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 7 & 14 & 21 \end{matrix} \qquad \text{b: } \downarrow \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{matrix} \qquad \text{c: } \downarrow \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{matrix}$$

$$\text{d: } \downarrow \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 10 & 9 & 8 \end{matrix} \qquad \text{e: } \downarrow \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{matrix} \qquad \text{f: } \downarrow \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{matrix}$$

Precisamos muitas vêzes de um símbolo para representar a transformada de um símbolo como n. Pode-se obtê-lo, convenientemente, adicionando uma plica ao operando, de modo que, qualquer que seja n, $n \rightarrow n'$. Assim, se os operandos do Ex. 1 são n, a transformação pode ser escrita como $n' = n + 10$ $(n = 1,2,3)$.

Ex. 3: Escreva por extenso a transformação em que os operandos são os três números 5, 6 e 7, e em que $n' = n - 3$. Ela é fechada?

Ex. 4: Escreva por extenso as transformações em que:

(i) $n' = 5n$ $\quad (n = 5, 6, 7)$;
(ii) $n' = 2n^2$ $\quad (n = -1, 0, 1)$.

Ex. 5: Se os operandos são todos os números (inclusive os fracionários) entre 0 e 1, e $n' = 1/2\, n$, é fechada a transformação? (Sugestão: tente atribuir a n alguns valores representativos: 1/2, 3/4, 1/4, 0,01, 0,09; insista até adquirir certeza da resposta.)

Ex. 6: (Continuação.) Com os mesmos operandos, é fechada a transformação se $n' = 1/(n + 1)$?

2.7. As transformações até agora mencionadas foram tôdas caracterizadas como "univalentes". Uma transformação é **univalente** se converte cada operando em apenas um transformado. (Outros tipos são também possíveis e importantes, como veremos na S. 9.2 e 12.8.) Assim, a transformação

$$\downarrow \begin{matrix} A & B & C & D \\ B & A & A & D \end{matrix}$$

é univalente; mas a transformação

$$\downarrow \begin{matrix} A & B & C & D \\ B \text{ ou } D & A & B \text{ ou } C & D \end{matrix}$$

não é univalente.

2.8. Dentre as transformações univalentes, um tipo de certa importância em casos especiais é a transformação **um-um.** Neste caso, os transformados são todos diferentes entre si. Assim, não só cada operando fornece um único transformado (a partir da univalência), mas cada transformado indica (inversamente) um único operando. Uma transformação dêste tipo é

$$\downarrow \begin{matrix} A & B & C & D & E & F & G & H \\ F & H & K & L & G & J & E & M \end{matrix}$$

Êste exemplo é um-um mas não é fechado.

Por outro lado, a transformação do Ex. 2.6.2.(e) não é um-um, pois a transformada "1" não indica um operando único. Uma transformação univalente mas não um-um será denominada **muitos-um.**

Ex. 1: Os operandos são os dez dígitos 0, 1, ..., 9; o transformado é o terceiro dígito decimal do $\log_{10}(n + 4)$. (Por exemplo, se o operando fôr 3, encontraremos sucessivamente, 7, $\log_{10}7$, 0,9451, e 5; de modo que $3 \rightarrow 5$.) Trata-se de transformação um-um ou muitos-um? (Sugestão: determine os transformados de 0, 1 e assim por diante, sucessivamente; utilize tabelas de quatro algarismos.)

2.9. *A identidade.* Uma transformação importante, capaz de ser rejeitada pelo principiante como uma nulidade, é a transformação **idêntica** na qual não ocorre mudança e cada transformado é igual ao seu operando. Se os operandos forem todos diferentes a transformação é necessàriamente um-um. Um exemplo é f no Ex. 2.6.2. Em notação condensada, $n' = n$.

Ex. 1: À abertura de uma caixa registradora de uma loja, a transformação a ser efetuada sôbre o dinheiro nela contido é, em algumas caixas, indicada por uma bandeira. Que bandeira aparece na transformação idêntica?

2.10. *Representação matricial.* Tôdas estas transformações podem ser representadas em um único esquema, que exibe claramente suas mútuas relações. (O método tornar-se-á particularmente útil no Capítulo 9 e nos subseqüentes.)

Escreva os operandos numa linha horizontal, e as possíveis transformadas numa coluna abaixo e à esquerda, de modo que formem dois lados de um retângulo. Dada uma transformação particular, coloque um "+" na intersecção da linha e da coluna se o operando à testa da coluna *fôr* transformado em um elemento do lado esquerdo; de outro modo, insira zero. Assim a transformação

$$\downarrow \begin{matrix} A & B & C \\ A & C & C \end{matrix}$$

seria apresentada como

↓	*A*	*B*	*C*
A	+	0	0
B	0	0	0
C	0	+	+

A flecha no canto superior esquerdo serve para indicar a direção das transições. Assim, *tôda transformação pode ser apresentada como uma matriz.*

Se a transformação fôr grande, é possível empregar reticências na matriz, se não houver ambigüidade. Assim, a matriz da transformação em que $n' = n + 2$, e em que os operandos são todos inteiros positivos de 1 em diante, poderá ser apresentada como

↓	1	2	3	4	5	...
1	**0**	0	0	0	0	...
2	0	**0**	0	0	0	...
3	+	0	**0**	0	0	...
4	0	+	0	**0**	0	...
5	0	0	+	0	**0**	...
...	...	...	...	...	...	...

(Os símbolos na diagonal principal, a partir do canto esquerdo superior, estão em negrito a fim de destacar as relações de posição.)

Ex. 1: Como estão distribuídos os + na matriz de uma transformação idêntica?

Ex. 2: Das três transformações, qual delas é (*a*) um-um, (*b*) univalente mas não um-um, (*c*) não-univalente?

(i)

↓	A	B	C	D
A	+	0	0	+
B	0	0	+	0
C	+	0	0	0
D	0	+	0	+

(ii)

↓	A	B	C	D
A	0	+	0	0
B	0	0	0	+
C	+	0	0	0
D	0	0	+	0

(iii)

↓	A	B	C	D
A	0	0	0	0
B	+	0	0	+
C	0	+	0	0
D	0	0	+	0

Ex. 3: Pode uma transformação fechada possuir uma matriz com (a) uma linha inteira de zeros? (b) uma coluna de zeros?

Ex. 4: Forme a matriz da transformação em que $n' = 2n$ e os inteiros são operandos, evidenciando a distribuição dos +. Estão êles em linha reta? Desenhe o gráfico de $y = 2x$; possuem as linhas alguma semelhança?

Ex. 5: Apanhe um baralho, misture as cartas, separe dezesseis delas com a face voltada para cima e as disponha formando um quadrado de quatro por quatro. Numa matriz de quatro por quatro escreva + se a carta no lugar correspondente fôr preta e 0, se fôr vermelha. Experimente alguns exemplos e identifique o tipo de cada um, como no Ex. 2.

Ex. 6: Se houver dois operandos e a transformação fôr fechada, quantas matrizes diferentes haverá?

Ex. 7: (Continuação.) Quantas são univalentes?

MUDANÇA REPETIDA

2.11. *Potência.* As propriedades básicas de uma transformação univalente fechada acabaram de ser examinadas no que dizia respeito à sua ação singular; mas uma transformação dêste tipo pode aplicar-se mais de uma vez, gerando uma série de mudanças análogas às séries de mudanças que um sistema dinâmico atravessa quando ativo. Cumpre considerar agora a geração e as propriedades de semelhante série.

Suponhamos que a segunda transformação de S.2.3 (chamemo-la *Alfa*) tenha sido utilizada para converter uma mensagem em código. Suponhamos que a mensagem codificada seja de nôvo codificada por *Alfa* — que efeito isto terá? O efeito pode ser seguido letra por letra. Assim, na primeira codificação, *A* tornou-se *B*, que, na segunda codificação, se tornou *C*; portanto, no curso do duplo procedimento, *A* converteu-se em *C* ou na notação usual $A \rightarrow C$.

Similarmente $B \to D$; e assim por diante até $Y \to A$ e $Z \to B$. Destarte, a *dupla* aplicação de *Alfa* provoca mudanças que são exatamente as mesmas que as produzidas por uma *única* aplicação da transformação

$$\downarrow \begin{matrix} A & B & \ldots & Y & Z \\ C & D & \ldots & A & B \end{matrix}$$

Portanto, de cada transformação fechada podemos obter outra transformação fechada cujo efeito, aplicada uma vez, é idêntico ao efeito da primeira aplicada duas vêzes. Dizemos que a segunda é o "quadrado" da primeira, e que é uma de suas "potências" (S.2.14). Se a primeira fôr representada por T, a segunda o será por T^2; o que por hora deve ser encarado simplesmente como um rótulo claro e conveniente para a nova transformação.

Ex. 1: Se $Z: \downarrow \begin{matrix} a & b & c \\ c & c & a \end{matrix}$ o que é Z^2?

Ex. 2: Escreva alguma transformação idêntica; qual é o seu quadrado?

Ex. 3: (Veja Ex. 2.4.3.) O que é A^2?

Ex. 4: Que transformação se obtém quando a transformação $n' = n + 1$ é aplicada duas vêzes a inteiros positivos? Escreva a resposta em uma forma abreviada, como $n' = \ldots$ (Sugestão: tente escrever a transformação por extenso como em S.2.4.)

Ex. 5: Que transformação se obtém quando a transformação $n' = 7n$ é aplicada duas vêzes aos inteiros positivos?

Ex. 6: Se K é a transformação

↓	A	B	C
A	0	+	+
B	0	0	0
C	+	0	0

o que é K^2? Dê o resultado em forma matricial. (Sugestão: tente reescrever K em alguma outra forma e depois reconverta-a.)

Ex. 7: Tente aplicar a transformação W duas vêzes:

$$W: \downarrow \begin{matrix} f & g & h \\ g & h & k \end{matrix}$$

2.12. A tentativa do exercício anterior tornará clara a importância do fechamento. Uma transformação não-fechada tal como W não pode ser aplicada duas vêzes: pois, embora troque h por k, seu efeito sôbre k é indefinido, de modo que não pode ir além. A transformação não-fechada é pois como uma máquina que dá um passo e depois emperra.

2.13. *Eliminação.* Quando uma transformação é dada de forma abreviada, como $n' = n + 1$, o resultado de sua dupla aplicação deve ser encontrado, se sòmente forem usados os métodos descritos até agora, reescrevendo-se a transformação para mostrar cada operando, realizando a dupla aplicação, e depois voltando a abreviá-la. Há, todavia, um método mais rápido. Para demonstrá-lo e explicá-lo, escrevamos por extenso a transformação T: $n' = n + 1$, sôbre os inteiros positivos, mostrando o resultado de sua dupla aplicação e, abaixo, o símbolo geral para o que está acima:

$$\begin{array}{ll} T: \downarrow & 1 \quad 2 \quad 3 \quad \ldots \; n \quad \ldots \\ & 2 \quad 3 \quad 4 \quad \ldots \; n' \quad \ldots \\ T: \downarrow & 3 \quad 4 \quad 5 \quad \ldots \; n'' \quad \ldots \end{array}$$

n'' é usado como um símbolo natural para a transformada de n', assim como n' é a transformada de n.

Damos agora o $n' = n + 1$. Como aplicamos a mesma transformação outra vez, segue-se que n'' deve ser 1 maior que n'. Assim $n'' = n' + 1$.

Para especificar a transformação singular T^2 precisamos de uma equação que apresente diretamente o que é o transformado n'' em têrmos do operando n. Determinar a equação é simplesmente um caso de eliminação algébrica: das duas equações $n'' = n' + 1$ e $n' = n + 1$, eliminamos n'. Substituindo n' na primeira equação, obtemos (com os parênteses para mostrar a derivação) $n'' = (n + 1) + 1$, isto é, $n'' = n + 2$.

Esta equação fornece corretamente a relação entre o operando (n) e o transformado (n'') quando se aplica T^2, e desta forma T^2 fica especificado. Para a uniformidade de notação convém reescrevê-la como $m' = m + 2$. Tal é a transformação, na notação-padrão, cuja aplicação singular (daí a única plica em m) provoca a mesma modificação que a dupla aplicação de T. (A mudança de n para m constitui uma mera troca de nome, feita para evitar confusão.)

A regra é inteiramente geral. Destarte, se a transformação fôr $n' = 2n - 3$, a segunda aplicação proporcionará novos transformados n'' relacionados aos primeiros por $n'' = 2n' - 3$. Substituindo n', com o emprêgo livre de parênteses:

$$\begin{aligned} n'' &= 2(2n - 3) - 3 \\ &= 4n - 9. \end{aligned}$$

Assim a dupla aplicação provoca a mesma mudança que uma só aplicação da transformação $m' = 4m - 9$.

2.14. *Potências superiores.* Obtêm-se potências superiores pela simples soma de símbolos para transformações superiores n''' etc., eliminando-se os símbolos para transformações intermediárias. Assim, encontremos a transformação resultante de três aplicações de $n' = 2n - 3$. Armemos as equações que relacionam cada passo:

$$\begin{aligned} n' &= 2n - 3 \\ n'' &= 2n' - 3 \\ n''' &= 2n'' - 3 \end{aligned}$$

Considerando-se a última equação e substituindo-se n'', obtemos

$$\begin{aligned} n''' &= 2(2n' - 3) - 3 \\ &= 4n' - 9 \end{aligned}$$

Substituindo-se agora n':

$$\begin{aligned} n''' &= 4(2n - 3) - 9 \\ &= 8n - 21 \end{aligned}$$

Dêste modo a tripla aplicação causa as mesmas modificações que provocaria a aplicação singular $m' = 8m - 21$. Se a primeira era T, essa será T^3.

Ex. 1: Elimine n' de $n'' = 3n'$ e $n' = 3n$. Forme a transformação correspondente ao resultado e verifique que duas aplicações de $n' = 3n$ dão o mesmo resultado.

Ex. 2: Elimine a' de $a'' = a' + 8$ e de $a' = a + 8$.

Ex. 3: Elimine a'' e a' de $a''' = 7a''$, $a'' = 7a'$, e $a' = 7a$.

Ex. 4: Elimine k' de $k'' = -3k' + 2$, $k' = -3k + 2$. Faça a verificação como no Ex. 1.

Ex. 5: Elimine m' de $m'' = \log m'$, $m' = \log m$.

Ex. 6: Elimine p' de $p'' = (p')^2$, $p' = p^2$.

Ex. 7: Determine as transformações equivalentes a aplicações duplas, sôbre todos os números positivos maiores do que 1, de

(i) $n' = 2n + 3$
(ii) $n' = n^2 + n$
(iii) $n' = 1 + 2 \log n$

Ex. 8: Descubra a transformação equivadente à tripla aplicação de $n' = -3n - 1$ aos inteiros positivos e negativos e ao zero. Faça as verificações como no Ex. 1.

Ex. 9: Determine as transformações equivalentes às segundas, terceiras e posteriores aplicações da transformação $n' = 1/(1 + n)$. (Nota: a série descoberta por Fibonacci no século XII, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ... é estendida tomando como têrmo seguinte a soma dos dois anteriores; assim, $3 + 5 = 8$, $5 + 8 = 13$, $13 + 8 = \ldots$, etc.)

Ex. 10: Qual é o resultado da dupla aplicação da transformação $n' = 1/n$, quando os operandos são todos números racionais positivos (i. é. tôdas as frações)?

Ex. 11: Eis agora uma transformação geométrica. Desenhe uma reta sôbre uma fôlha de papel e assinale dois extremos, A e B. Tal segmento, quanto ao seu comprimento e posição, constitui o operando. Obtenha o seu transformado, com extremos A' e B', pela regra de transformação R: A' é o ponto médio entre A e B; B' se determina pela rotação do segmento $A'B$ em tôrno de A' de um ângulo reto no sentido anti-horário. Desenhe tal segmento, aplique R repetidamente, e satisfaça a sua curiosidade sôbre o comportamento do sistema.

Ex. 12: (Continuação.) Se você estiver familiarizado com a geometria analítica, comece colocando A em (0,0) e B em (1,0) e determine a posição-limite. (Sugestão: Construa a coordenada final x de A como uma série, e some; proceda similarmente para a coordenada y de A.)

2.15. *Notação.* A notação que indica o transformado pelo acréscimo de uma plica (') é conveniente se estiver em consideração apenas uma única transformação; mas se várias transformações podem atuar sôbre n', o símbolo n' não indica qual dela atuou. Por esta razão, é usado algumas vêzes outro símbolo: se n fôr o operando, e é aplicada a transformação T, o transformado é representado por $T(n)$. Êstes quatro tipos, duas letras e dois parênteses, representam *uma* quantidade; trata-se de um fato capaz de levar à confusão até que a gente se acostume a êle. $T(n)$, isto é, n' dissimulado, pode ser de nôvo transformado, e será escrito $T(T(n))$ se a notação fôr coerente; realmente, os parênteses externos são em geral eliminados e os T combinados, de modo que n'' é escrito como $T^2(n)$. Os exercícios visam a tornar familiar a notação, pois a mudança é só na notação.

Ex. 1: Se f: $\downarrow \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{matrix}$

o que é $f(3)$? $f(1)$? $f^2(3)$?

Ex. 2: Escreva por extenso a transformação g sôbre os operandos, 6, 7, 8 se $g(6) = 8$, $g(7) = 7$, $g(8) = 8$.

Ex. 3: Escreva por extenso a transformação h sôbre os operandos, $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, se $h(\alpha) = \gamma$, $h^2(\alpha) = \beta$, $h^3(\alpha) = \delta$, $h^4(\alpha) = \alpha$.

Ex. 4: Se $a(n)$ é $n + 2$, o que é $A(15)$?

Ex. 5: Se $f(n)$ é $-n^2 + 4$, o que é $f(2)$?

Ex. 6: Se $T(n)$ é $3n$, o que é $T^2(n)$? (Sugestão: caso tenha dúvida, escreva T por extenso.)

Ex. 7: Se I é uma transformação-identidade, e t um de seus operandos, o que é $I(t)$?

2.16. *Produto.* Acabamos de ver que, depois de aplicada uma transformação T a um operando n, a transformada $T(n)$ pode ser tratada como um operando por T mais uma vez, dando $T(T(n))$, que se escreve $T^2(n)$. Exatamente do mesmo modo, $T(n)$ pode vir a ser um operando para uma transformação U, que fornecerá uma transformação $U(T(n))$. Assim, se elas forem

$$T: \downarrow \begin{matrix} a & b & c & d \\ b & d & a & b \end{matrix} \qquad \text{e} \qquad U: \downarrow \begin{matrix} a & b & c & d \\ d & c & d & b \end{matrix}$$

então $T(b)$ é d e $U(T(b))$ é $U(d)$, que é b. T e U aplicados nesta ordem definem assim uma nova transformação, V, que fàcilmente se descobre ser

$$V: \downarrow \begin{matrix} a & b & c & d \\ c & b & d & c \end{matrix}.$$

Dizemos que V é o **produto** ou **composição** de T e U. Produz simplesmente o resultado de T e U aplicados em sucessão, nesta ordem, a cada passo.

Se U fôr aplicado antes, então $U(b)$ será, no exemplo acima, c, e $T(c)$ será a; de modo que $T(U(b))$ é a, diferente de $U(T(b))$. O produto, quando U e T são aplicados na outra ordem, é

$$W: \downarrow \begin{matrix} a & b & c & d \\ b & a & b & d \end{matrix}$$

Por conveniência, pode-se escrever V como UT, e W como TU. Cumpre sempre lembrar que a mudança na ordem do produto pode mudar a transformação.

(Note-se que V pode ser impossível, i. e., não existir, se alguns dos transformados de T não forem operandos para U.)

Ex. 1: Escreva por extenso a transformação U^2T.

Ex. 2: Escreva por extenso a transformação UTU.

**Ex.* 3: Represente T e U por matrizes e multiplique ambas as matrizes de modo usual (linhas por colunas), fazendo com que o produto e a soma dos + seja +; chame de M_1 a matriz resultante. Represente V por uma matriz; chame-a de M_2. Compare M_1 e M_2.

2.17. *Gráfico cinemático.* Até agora estudamos cada transformação principalmente observando o seu efeito, em uma única ação, sôbre todos os seus possíveis operandos (e. g. S.2.3). Outro método (aplicável apenas quando a transformação é fechada) consiste em estudar o seu efeito sôbre um único operando em muitas aplicações repetidas. O método importa, no estudo de um sistema dinâmico, em colocá-lo em algum estado inicial e depois permitir que êle continue, sem interferência posterior, através de uma série de mudanças tal como o determina a sua natureza interna. Assim, no sistema automático de telefonia, podemos observar tôdas as mudanças que seguem ao discar de um número, ou num formigueiro, tôdas as modificações que decorrem da colocação de um pedaço de carne nas proximidades.

Suponhamos, por razões de definição, que tenhamos a transformação

$$U: \downarrow \begin{matrix} A & B & C & D & E \\ D & A & E & D & D \end{matrix}$$

Se U fôr aplicado a C, depois a $U(C)$, depois a $U^2(C)$, depois a $U^3(C)$ e assim por diante, resultará a série: $C, E, D, D, D, \ldots$ e assim por diante, com D continuando para sempre. Se U fôr similarmente aplicado a A, resultará a série $A, D, D, D, \ldots$ com D continuando sempre.

Tais resultados podem ser indicados gràficamente, exibindo-se a um relance resultados que de outra maneira só se tornam apreensíveis mediante um estudo minucioso. Para formar o **gráfico cinemático** de uma transformação, o conjunto de operandos é escrito, cada um em um lugar conveniente qualquer, e os elementos são ligados por flechas segundo a seguinte regra: uma flecha vai de A para B se e sòmente se A fôr transformado em B num único passo. Assim, U nos fornece o seguinte gráfico cinemático:

$$C \rightarrow E \rightarrow D \leftarrow A \leftarrow B$$

(Dotar D de uma seta reentrante ligada à própria letra é opcional, caso não haja probabilidade de equívoco.)

Se o gráfico consistir de botões (os operandos), ligados entre si por um fio (as transições), poderá, como uma rêde, ser disposto de diferentes formas:

$$
\begin{tikzcd}[row sep=small]
C \arrow[r] & E \arrow[dr] & \\
& & D \\
B \arrow[r] & A \arrow[ur] &
\end{tikzcd}
\qquad \text{ou} \qquad
\begin{tikzcd}
B \arrow[r] & A \arrow[d] & & \\
& D & E \arrow[l] & C \arrow[l]
\end{tikzcd}
$$

e assim por diante. Estas formas diversas não constituem gráficos diferentes, desde que sejam idênticas as conexões internas.

Os elementos que ocorrem quando C é transformado cumulativamente por U (a série $C, E, D, D, \ldots$) e os estados encontrados por um ponto no gráfico cinemático que parte de C e se move apenas sôbre uma flecha a cada passo, sempre se deslocando na direção da seta, acham-se òbviamente sempre em correspondência. Como podemos amiúde seguir o movimento de um ponto ao longo de uma linha bem mais fàcilmente do que computar $U(C)$, $U^2(C)$ etc., sobretudo se a transformação fôr complicada, o gráfico constitui muitas vêzes uma representação muito conveniente da transformação em forma pictórica. O ponto móvel será denominado ponto **representativo.**

Quando a transformação se torna mais complexa, um importante aspecto começa a surgir. Suponhamos, assim, que a transformação seja

$$
T: \downarrow \begin{array}{cccccccccccccccc} A & B & C & D & E & F & G & H & I & J & K & L & M & N & P & Q \\ D & H & D & I & Q & G & Q & H & A & E & E & N & B & A & N & E \end{array}
$$

Seu gráfico cinemático é:

$$
\begin{tikzcd}[row sep=small]
P \arrow[dr] & & & & C \arrow[dl] \\
& N \arrow[r] & A \arrow[r] & D \arrow[dl] & \\
L \arrow[ur] & & I \arrow[u] & &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}[row sep=small]
& M \arrow[r] & B \arrow[r] & H & \\
K \arrow[dr] & & & & \\
& E \arrow[r, shift left] & Q \arrow[l, shift left] & G \arrow[l] & F \arrow[l] \\
J \arrow[ur] & & & &
\end{tikzcd}
$$

Partindo de qualquer estado e seguindo a cadeia de flechas, verificamos que, em repetidas transformações, o ponto representativo desloca-se sempre quer para algum estado onde pára, quer para algum ciclo em tôrno do qual circula indefinidamente. Um gráfico dêste tipo é como um mapa da drenagem de uma localidade, mostrando para que região irá, eventualmente, uma gôta d'água ou um ponto representativo que parte de algum lugar. Estas regiões separadas são as bacias do gráfico. Tais questões apresentam òbviamente alguma relação com o que se entende por "estabilidade", a que chegaremos no Capítulo 5.

Ex. 1: Desenhe os gráficos cinemáticos das transformações de A e B no Ex. 2.4.3.

Ex. 2: Como é possível reconhecer de relance o gráfico de uma transformação idêntica?

Ex. 3: Trace os gráficos de algumas transformações fechadas um-um simples. Qual o seu aspecto característico?

Ex. 4: Trace o gráfico de uma transformação V na qual n' é o terceiro dígito decimal do $\log_{10}(n + 20)$ e os operandos são os dez dígitos 0, 1, ..., 9.

Ex. 5: (Continuação.) Do gráfico de V interprete o que é $V(8)$, $V^2(4)$, $V^4(6)$, $V^{84}(5)$.

Ex. 6: Se a transformação fôr um-um, poderão duas flechas dirigir-se a um único ponto?

Ex. 7: Se a transformação fôr muitos-um, poderão duas flechas dirigir-se a um único ponto?

Ex. 8: Construa algumas transformações fechadas univalentes como T, desenhe seus gráficos cinemáticos e saliente seus aspectos característicos.

Ex. 9: Se a transformação fôr univalente, poderá uma bacia conter dois ciclos?

A Máquina Determinada

3. 1. Tendo firmado agora um conjunto claro de idéias sôbre as transformações, podemos voltar à sua primeira aplicação: o estabelecimento de um paralelismo exato entre as propriedades das transformações, como foram desenvolvidas aqui, e as propriedades de máquinas e sistemas dinâmicos, tais como os encontrados no mundo real.

Com respeito à melhor definição de "máquina" poderia naturalmente haver muita discussão. A **máquina determinada** é definida como aquela que se comporta do mesmo modo que uma transformação fechada univalente. A justificação é simplesmente que a definição funciona — que nos dá o que desejamos, e em parte alguma contraria flagrantemente o que sentimos intuitivamente ser razoável. A justificação real não consiste no que se diz nesta seção, mas no que segue no restante do livro e, talvez, em desenvolvimentos ulteriores.

É bom notar que a definição se refere a um modo de comportamento, não a algo material. Estamos interessados, neste livro, por aquêles aspectos dos sistemas que são determinados — que obedecem a cursos regulares e reprodutíveis. É o caráter de determinação que estudaremos, e não a substância material. (O assunto já foi mencionado anteriormente no Capítulo 1.)

No transcurso da Primeira Parte, consideraremos máquinas determinadas, e as transformações a elas relacionadas serão tôdas univalentes. Só ao chegarmos à S. 9. 2 abordaremos o tipo mais geral, que é determinado apenas num sentido estatístico.

Como segunda restrição, êste Capítulo lidará apenas com a máquina isolada — a máquina para a qual nada está sendo feito ativamente.

Como exemplo típico e simples de máquina determinada, tomemos uma estrutura de ferro pesada, contendo certo número de molduras pesadas ligadas entre si e à armação por meio de molas. Se as circunstâncias forem constantes e as molduras repetidamente forçadas a uma certa posição definida e depois sôltas, os movimentos das molduras serão, em cada ocasião, os mesmos, isto é, seguirão a mesma trajetória. O sistema inteiro, partindo de um dado "estado" inicial, passará assim, repetidamente, pela mesma sucessão de estados.

Entendemos por **estado** de um sistema, qualquer condição ou propriedade bem definida que possa ser reconhecida se ocorrer de nôvo. Todo sistema terá naturalmente muitos estados possíveis.

Quando soltamos as molduras, suas posições (P) sofrem uma série de mudanças P_0, P_1, P_2 ...; êste ponto de vista relaciona de pronto o sistema à transformação:

$$\downarrow \begin{array}{ccccc} P_0 & P_1 & P_2 & P_3 & \ldots \\ P_1 & P_2 & P_3 & P_4 & \ldots \end{array}$$

Não há dúvida de que os *operandos* da transformação correspondem aos *estados* do sistema.

A série de posições assumidas pelo sistema *no tempo* corresponde de modo claro à série de elementos gerada pelas *potências* sucessivas da transformação (S.2.14). Uma tal seqüência de estados define uma **trajetória** ou **linha de comportamento.**

Em seguida, o fato de que uma máquina determinada, a partir de um estado, não possa prosseguir simultâneamente para dois estados diversos corresponde, na transformação, à restrição de que cada transformada seja univalente.

Consideremos agora, apenas para começar, alguns outros exemplos, enfrentando as complicações à medida que aparecerem.

Uma cultura bacteriológica que acaba de ser inoculada crescerá em "número de organismos presentes" de hora a hora. Se a princípio os números dobram a cada hora, o número na cultura mudará de hora a hora do mesmo modo como n é mudado em potências sucessivas da transformação $n' = 2n$.

Se o organismo fôr algo caprichoso em seu crescimento, o comportamento do sistema, isto é, que estado seguirá um dado estado, torna-se um tanto indeterminado. Assim a "determinitude" no sistema real corresponde evidentemente, na transformação, ao fato de a transformada de um operando ser univalente.

Consideremos a seguir um relógio, que acertamos e ao qual demos corda, cujos ponteiros, indicando agora um certo lugar no mostrador, apontarão um determinado lugar após o decurso de um dado tempo As posições de seus ponteiros, correspondem aos elementos da transformação. Uma transformação singular corresponde ao progresso sôbre um intervalo unitário de tempo; será òbviamente da forma $n' = n + k$.

Neste caso, o "operador" em ação é essencialmente indefinível, pois não possui limites claros ou naturais. Inclui tudo o que faz o relógio andar: a mola mestra (ou gravidade), a rigidez do metal nas rodas, o óleo sôbre os pinos, as propriedades do aço, as interações entre os átomos de ferro e assim por diante, sem limite definido. Como dissemos na S.2.3, o "operador" é amiúde mal definido e um tanto arbitrário — um conceito de pouco uso científico. A *transformação,* todavia, é perfeitamente bem definida, pois se refere apenas aos *fatos* das mudanças, e não às suas razões mais ou menos hipotéticas.

Uma série de mudanças tão regulares quanto as do relógio não se encontra fàcilmente no mundo biológico, mas os cursos regùlares de algumas doenças mostram algo da mesma feição. Destarte, nas épocas anteriores às sulfonamidas, o pulmão atacado de pneumonia lobar passava tìpicamente pela série de estados: Infecção → consolidação → hepatização rubra → hepatização cinzenta → resolução → saúde. Uma tal série de estados corresponde a uma transformação que é bem definida, embora não numérica.

Consideremos agora ferro fundido, aquecido de tal forma que suas diversas partes encontram-se a temperaturas várias, porém determinadas. Se fixadas suas condições, estas temperaturas variarão de um modo determinado com o tempo. O estado do ferro fundido a qualquer momento será um conjunto de temperaturas (um vetor, S.3.5.), e a passagem de estado para estado $S_0 \to S_1 \to S_2 \to \ldots$, corresponderá à operação de uma transformação, que converte o operando S_0 sucessivamente em $T(S_0)$, $T^2(S_0)$, $T^3(S_0)$, ... etc.

Um exemplo mais complexo, acentuando que as transformações não precisam ser numéricas para serem bem definidas, é dado por certas formas do comportamento reflexo animal. Assim, o macho e a fêmea do peixe-espinho triespiculado formam, com certas partes de seu ambiente, um determinado sistema dinâmico. Tinbergen (no seu *Estudo do Instinto*) descreve os sucessivos estados do sistema do seguinte modo: "Cada reação de qualquer dos dois, macho e fêmea, é desencadeada pela reação precedente do parceiro. Cada flecha (no diagrama abaixo) representa uma relação causal cuja existência tem sido comprovada efetivamente por meio de provas com simulacros. A primeira reação do macho, a dança ziguezague, depende de um estímulo visual da fêmea, no qual os estímulos-sinais "abdômen inchado" e os movimentos especiais desempenham um papel. A fêmea reage à côr vermelha do macho e à sua dança em ziguezague nadando diretamente em sua direção. Êste movimento induz o macho a voltar-se e nadar ràpidamente em direção do ninho. Isto, em troca, incita a fêmea a segui-lo, estimulando em conseqüência o macho a apontar sua cabeça para a entrada. Seu comportamento desencadeia a reação seguinte da fêmea: ela entra no ninho... Isto desencadeia a reação estremecedora do macho que induz a desova. A presença de ovas frescas no ninho leva o macho a fertilizá-las". Tinbergen sumariza a sucessão de estados como segue:

Fêmea	Macho
Aparece ↘	
	Dança em ziguezague ↙
Côrte ↘	
	Conduz ↙
Segue ↘	
	Mostra entrada do ninho ↙
Entra ninho ↘	
	Treme ↙
Desova ↘	
	Fertiliza

Êle descreve assim uma trajetória típica.

Exemplos ulteriores são desnecessários, pois os vários ramos da ciência aos quais se aplica a cibernética no-los fornecem em abundância, e cada leitor poderia proporcionar exemplos conformes à sua própria especialidade.

Relacionando máquina e transformação, ingressamos na disciplina que conecta os comportamentos dos sistemas físicos reais às propriedades das expressões simbólicas, escritas com caneta e papel. Todo o temário da "física matemática" é uma parte desta disciplina. Os métodos utilizados no presente livro são todavia um tanto mais amplos em escopo, pois a física matemática tende a tratar mormente sistemas contínuos e lineares (S.3.7). A restrição torna seus métodos dificilmente aplicáveis a temas biológicos, pois na biologia os sistemas são quase sempre não-lineares, amiúde não-contínuos, e em muitos casos nem sequer métricos, isto é, exprimíveis em cifras. Os exercícios abaixo (S.3.4) estão dispostos em seqüência, a fim de mostrar a gradação desde os métodos muito gerais empregados neste livro até os comumente utilizados na física matemática. Os exercícios são também importantes como ilustrações das correspondências entre transformações e sistemas reais.

Para sintetizar: Cada máquina ou sistema dinâmico possui muitos estados distinguíveis. Se fôr uma máquina determinada, a fixação de suas condições e do estado em que se encontra determinará, isto é, tornará único, o estado para qual se moverá a seguir. Tais transições de estado correspondem às de uma transformação sôbre operandos, correspondendo cada estado a um operando particular. Cada estado para o qual a máquina se move corresponde à transformada dêsse operando. As potências sucessivas da transformação correspondem, na máquina, a permitir que duplique, triplique etc., o intervalo unitário de tempo decorrido antes de se registrar o próximo estado. E como uma máquina determinada não pode passar a dois estados de uma só vez, a transformação correspondente deve ser univalente.

Ex.: Enuncie dois estados relacionados como operando e transformado, tendo como operador o tempo, tirando o sistema dinâmico de:

a) Cozinhar; *b*) Acender o fogo; *c*) Motor a gasolina; *d*) Desenvolvimento embriológico; *e*) Meteorologia; *f*) Endocrinologia; *g*) Economia; *h*) Comportamento animal; *i*) Cosmologia. (Não é preciso apresentar exatidão meticulosa.)

3.2. *Fechamento.* Outra razão para a importância do fechamento transparece agora. É sempre possível permitir que a máquina típica funcione um pouco mais no tempo, mediante a simples inação do experimentador. Isto significa que não há limite particular para a potência à qual a transformação pode elevar-se. Apenas as transformações fechadas permitem, em geral, esta elevação a *qualquer* potência. Assim a transformação T

$$T\colon \downarrow \begin{matrix} a & b & c & d & e & f & g \\ e & b & m & f & g & c & f \end{matrix}$$

não é fechada. $T^4(a)$ é c e $T^5(a)$ é m. Mas $T(m)$ não é definida e portanto $T^6(a)$ também não o é. Tomando a como estado inicial, esta transformação não define o que acontece após cinco passos. Assim, *a transformação que representa uma máquina deve ser fechada.* O pleno significado dêste fato surgirá na S.10.4.

3.3. *A máquina discreta.* A esta altura é possível objetar que a maioria das máquinas, quer feitas pelo homem ou naturais, são de funcionamento suave, enquanto as transformações até aqui discutidas mudam por saltos discretos. Essas transformações discretas são, todavia, a melhor introdução ao tema. Sua grande vantagem reside em sua absoluta isenção de sutilezas e imprecisões, pois cada uma de suas propriedades está sem ambigüidade, presente ou ausente. Tal simplicidade possibilita uma segurança de dedução, essencial para se confiar em ulteriores desenvolvimentos. O tema foi abordado na S.2.1.

Em todo caso a discrepância não apresenta importância real. A variação discreta deve apenas tornar-se bastante pequena em seu salto para aproximar-se tanto quanto seja desejado da mudança contínua. Cumpre ainda lembrar que nos fenômenos naturais as observações são quase sempre invariàvelmente efetuadas a intervalos discretos; a "continuidade" atribuída aos eventos naturais tem sido muitas vêzes colocada aí pela imaginação do observador, e não por uma observação efetiva em cada um de um número infinito de pontos. Destarte, a verdade real é que *o sistema natural é observado em pontos discretos,* e nossa transformação o representa em pontos discretos. Pode, portanto, não haver incompatibilidade real.

3.4. *Máquina e transformação.* O paralelismo entre máquina e transformação aparece do modo mais óbvio quando comparamos o comportamento da máquina, como estado sucedendo a estado, com o gráfico cinemático (S.2.17), flechas levando de elemento a elemento. Se uma máquina particular e um gráfico particular apresentam plena correspondência verificar-se-á que:

1) Cada estado possível da máquina corresponde ùnicamente a um elemento particular no gráfico, e vice-versa. A correspondência é um-um.

2) Cada sucessão de estados que a máquina atravessa devido à sua natureza dinâmica interna corresponde a uma cadeia de flechas ininterrupta através dos elementos correspondentes.

3) Se uma máquina passa para um estado e aí permanece (um estado de equilíbrio, S.5.3) o elemento que corresponde ao estado não apresentará seta emergente (ou reentrante, S.2.17).

4) Se a máquina passa por um ciclo de estados regularmente recorrentes, o gráfico exibirá um circuito de setas que atravessa os elementos correspondentes.

5) Quando uma máquina é detida pelo experimentador e seu reacionamento se faz a partir de algum estado nôvo, escolhido arbitràriamente, isto corresponde, no gráfico, a um movimento do ponto representativo de um elemento para outro, quando o movimento se deve a uma ação arbitrária do matemático e não a uma seta.

Quando são assim relacionadas uma máquina real e uma transformação, a transformação é a **representação canônica** da máquina, e se diz que a máquina **incorpora** a transformação.

Ex. 1: Se se inocula em meio de cultura um milhar de bactérias, seu número duplica a cada meia hora. Escreva a transformação correspondente.

Ex. 2: (Continuação.) Determine n após os 1º 2º 3º, . . ., 6º passos.

Ex. 3: (Continuação.) (i) Trace o gráfico comum, com dois eixos, mostrando como a cultura muda em número com o tempo. (ii) Faça o gráfico cinemático das variações de estado do sistema.

Ex. 4: 10^9 bactérias estão sujeitas a um desinfetante que, a cada minuto, mata 20 por cento dos sobreviventes. Exprima a mudança no número de sobreviventes sob forma de uma transformação.

Ex. 5: (Continuação.) (i) Determine o número de sobreviventes após 1, 2, 3, 4, 5 minutos. (ii) Para que limite tende o número quando o tempo prossegue indefinidamente?

Ex. 6: Desenhe o gráfico cinemático da transformação em que n' é, numa tabela de logaritmos de quatro cifras, o dígito direito arredondado de $\log_{10}(n + 70)$. Qual seria o comportamento de uma máquina correspondente?

Ex. 7: (Continuação, mas 90 em vez de 70.)

Ex. 8: (Continuação, mas 10 em vez de 70.) Quantas bacias possui êste gráfico?

Ex. 9: A cada década a população de um país diminui em 10 por cento, porém, no mesmo intervalo, somam-se a ela um milhão de imigrantes. Exprima a variação de década a década sob a forma de um transformação, admitindo que as variações ocorram em passos finitos.

Ex. 10: (Continuação.) Se em dado momento o país possui vinte milhões de habitantes, determine qual será a população nas três décadas seguintes.

Ex. 11: (Continuação.) Determine, da maneira que puder, em que valor numérico a população permanecerá estacionária. (Sugestão: quando a população é "estacionária", que relação existe entre os valores no início e no fim da década? — qual a relação entre operando e transformado?)

Ex. 12. Um girino em crescimento aumenta em comprimento cêrca de 1,2 mm por dia. Expresse o fato sob a forma de transformação.

Ex. 13: Uma cultura desenvolve bactérias mediante uma pressuposta conversão simples de alimento em bactéria; assim, se havia inicialmente alimento suficiente para 10^8 bactérias e o número atual de bactéria é n, neste caso o alimento restante é proporcional a $10^8 - n$. Se vale a lei de ação de massas, as bactérias aumentarão a cada intervalo de um número proporcional ao produto: (número de bactérias) $\times$ (quantidade de alimento restante). Nesta cultura particular as bactérias aumentam a cada hora de $10^{-8}\, n\, (10^8 - n)$. Exprima as variações de hora a hora sob a forma de uma transformação.

Ex. 14: (Continuação.) Se uma cultura possui 10 000 000 de bactérias, determine qual será seu número após 1, 2, ..., 5 horas.

Ex. 15: (Continuação.) Desenhe um gráfico usual com dois eixos mostrando como o número de bactérias varia com o tempo.

VETORES

3.5. Nas seções anteriores o "estado" de uma máquina foi considerado como algo conhecido como um todo, que dispensava maior especificação em pormenor. Estados dêsse tipo são particularmente comuns em sistemas biológicos onde, por exemplo, posturas, ou expressões, ou padrões característicos, são reconhecíveis com segurança, embora não se tenha feito nenhuma análise de seus componentes. A êste tipo pertencem os estados descritos por Tinbergen na S.3.1, assim como os tipos de nuvens distinguidos pelos meteorologistas. As primeiras seções do presente capítulo patentearam por certo que *uma teoria de semelhantes estados não-analisados pode ser rigorosa.*

Não obstante, os sistemas amiúde apresentam estados cuja especificação exige (por uma razão qualquer) análise ulterior. Assim, suponha que um noticiário no rádio nos devesse fornecer o "estado", a determinada hora, de uma maratona em curso; êle o faria dando, para cada corredor, sua posição na estrada àquela hora. Estas posições, como um conjunto, especificam o "estado" da corrida. Assim, o "estado" da competição como um todo é fornecido pelos vários estados (posições) dos vários competidores, tomados simultâneamente. Tais estados "compostos" são extremamente comuns, e o resto do livro dedicar-se-á muito a êles. Cumpre assinalar que agora começamos a considerar a relação, da maior importância na maquinaria, existente entre o todo e as partes. Destarte, ocorre muitas vêzes que o estado do todo é dado por um rol dos estados tomados, àquele momento, por cada uma das partes.

Uma quantidade dêsse tipo é um **vetor**, que é definido como uma entidade composta, dotada de um número definido de **componentes.** A forma conveniente de escrevê-lo é: $(a_1, a_2 \ldots a_n)$, significando que a primeira componente possui o valor particular a_1, a segunda, o valor a_2, e assim por diante.

Um vetor é essencialmente uma espécie de variável, porém mais complexo do que a variável numérica comum encontradiça na matemática elementar. Trata-se de uma generalização natural de "variável", e é de extrema importância, especialmente nos temas abordados neste livro. Aconselhamos o leitor a familiarizar-se o mais possível com êle, aplicando-o incessantemente na sua vida cotidiana, até que venha a tornar-se tão comum e bem entendido quanto a idéia de variável. Não seria demais afirmar que sua familiaridade com vetores determinará em larga medida seu êxito com o resto do livro.

Eis alguns exemplos bem conhecidos.

1) A "posição" de um navio não pode a cada momento ser descrita por um único número; são necessários dois números: latitude e longitude. "Posição" é assim um vetor com duas componentes. A posição de um navio pode, por exemplo, ser fornecida pelo vetor (58°N, 17°O). Vinte e quatro horas depois, esta posição pode sofrer a transição (58°N, 17°O) → (59°N, 20°O).

2) "O tempo em Kew" não pode ser especificado por um único número, mas o é a qualquer completude desejável quando recorremos a um número suficiente de componentes. Uma aproximação seria o vetor: (altura do barômetro, temperatura, nebulosidade, umidade), e um estado particular pode ser 998 milibares, 56,2°F, 8, 72%). Um previsor de tempo estará certo se conseguir prever corretamente para que estado mudará o atual.

3) A maioria das "fórmulas" administrativas a serem preenchidas destinam-se na realidade a definir algum vetor. Assim a fórmula que o motorista deve preencher

Ano do carro ....
Potência ....
Côr ....

constitui simplesmente um vetor escrito verticalmente.

Dois vetores são considerados **iguais** apenas se cada componente de um é igual à componente correspondente do outro. Assim, se houver um vetor (w, x, y, z), no qual cada componente é algum número, e se dois vetores particulares forem (4, 3, 8, 2) e (4, 3, 8, 1), então os dois vetores particulares serão desiguais, pois, na quarta componente, 2 não é igual a 1. (Se tiverem componentes diferentes, *e. g.*, (4, 3, 8, 2) e (C, K) neste caso serão simplesmente não-comparáveis.)

Quando um vetor dêste tipo é transformado, a operação não é de modo algum diferente de qualquer outra transformação, desde que lembremos que *o* operando é o vetor como um todo, não as componentes individuais (embora o modo como elas mudam constitua, por certo, uma parte essencial da definição da transformação). Suponha, por exemplo, que o "sistema" consista de duas moedas, cada qual apresentando cara (C) ou coroa (K). O sistema tem quatro estados, que são

$$(C, C) \; (C, K) \; (K, C) \; (K, K)$$

Suponha agora que minha sobrinha não goste de ver duas caras voltadas para cima, alternando-as sempre para (K, C), e tenha várias outras preferências.

Poder-se-ia verificar que ela sempre agiu como a transformação

$$N: \downarrow \begin{matrix} (C, C) & (C, K) & (K, C) & (K, K) \\ (K, C) & (K, K) & (K, C) & (C, C,) \end{matrix}$$

Como uma transformação sôbre quatro elementos, N em nada difere daquelas consideradas nas seções anteriores.

Não há por que uma transformação sôbre um conjunto de vetores não possa ser inteiramente arbitrária, porém, muitas vêzes, na ciência natural, a transformação apresenta alguma simplicidade. Amiúde, as componentes variam de algum modo descritível por uma regra mais ou menos simples. Assim, se M fôr:

$$M: \downarrow \begin{matrix} (C, C) & (C, K) & (K, C) & (K, K) \\ (K, C) & (K, K) & (C, C) & C, K) \end{matrix}$$

poder-se-á descrevê-la afirmando que a primeira componente sempre muda enquanto a segunda permanece sempre invariável.

Finalmente, nada do que foi dito até agora exclui a possibilidade de que algumas ou tôdas as componentes possam por sua vez ser vetores! (*E. g.*, S.6.3) Mas evitaremos, se possível, tais complicações.

Ex. 1: Usando ABC como primeiro operando, determine a transformação gerada pela repetida aplicação do operador "mova a letra da esquerda para a direita" (*e.g.* $ABC \rightarrow BCA$).

Ex. 2: (Continuação.) Exprima a transformação como um gráfico cinemático.

Ex. 3: Utilizando (1, — 1) como primeiro operando, determine os outros elementos gerados pela aplicação repetida do operador "troque os dois números e depois multiplique o nôvo número da esquerda por menos um".

Ex. 4: (Continuação.) Expresse a transformação como um gráfico cinemático.

Ex. 5: O primeiro operando, x, é o vetor (0, 1, 1); o operador F é definido assim:

i) o número da esquerda do transformado é o mesmo que o número médio do operando;

ii) o número médio do transformado é o mesmo que o número da direita do operando;

iii) o número da direita do transformado á a soma do número médio e do número da direita do operando.

Assim, $F(x)$ é (1, 1, 2), e $F^2(x)$ é (1, 2, 3). Determine $F^3(x)$, $F^4(x)$, $F^5(x)$. (Sugestão: Compare *Ex.* 2.14.9.)

3.6. *Notação.* O último exercício por certo mostrou a inépcia de tentar persistir em descrições verbais. A transformação F é de fato formada de três subtransformações aplicadas simultâneamente, isto é, sempre em passos. Assim uma subtransformação atua sôbre o número da esquerda mudando-o sucessivamente através de $0 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 5$ etc. Se denominarmos as três componentes de a, b e c, então F, operando sôbre o vetor (a, b, c), será equivalente à ação simultânea das três subtransformações, atuando cada qual apenas sôbre uma componente:

$$F: \begin{cases} a' = b \\ b' = c \\ c' = b + c. \end{cases}$$

Assim, $a' = b$ indica que o nôvo valor de a, o número da esquerda no transformado, é igual ao número médio no operando; e assim por diante. Tentemos ilustrar um pouco êste nôvo método; não há aí nenhuma idéia nova implicada, apenas uma nova manipulação de símbolos. (Aconselhamos o leitor a resolver todos os exercícios, pois muitos aspectos importantes aparecerão, e êstes não serão mencionados em outra parte.)

Ex. 1: Se os operandos são da forma (a, b), e um dêles fôr (, 2), determine os vetores produzidos quando se lhes aplica repetidamente a transformação T:

$$T: \begin{cases} a' = b \\ b' = -a \end{cases}$$

(Sugestão: encontre T (1/2, 2), T^2 (1/2, 2), etc.)

Ex. 2: Se os operandos são vetores da forma (v, w, x, y, z) e U é

$$U: \begin{cases} v' = w \\ w' = v \\ x' = x \\ y' = z \\ z' = y \end{cases}$$

determine $U(a)$, onde $a = (2, 1, 0, 2, 2)$.

Ex. 3: (Continuação.) Desenhe o gráfico cinemático de U se os seus únicos operandos forem a, $U(a)$, $U^2(a)$, etc.

Ex. 4: (Continuação.) Que alteração sofreria o gráfico se operandos ulteriores forem acrescentados?

Ex. 5: Ache o transformado de (3, — 2, 1) por meio de A se a forma geral fôr (g, h, j) e a transformação fôr

$$A: \begin{cases} j' = g + \\ h' = h - j_h \\ g' = 2_g - h \end{cases}$$

Ex. 6: Artur e Bill resolveram jogar uma partida. Cada qual deve dividir o seu dinheiro em duas partes iguais, e ao sinal do árbitro cada qual deve passar a sua parte ao outro jogador. A seguir, cada um deve novamente dividir sua fortuna em duas partes iguais e, ao sinal, passar a metade ao outro; e assim por diante. Artur começou com 8/— e Bill com 4/—. Represente o operando inicial pelo vetor (8, 4). Determine, como puder, tôdas as suas transformações subseqüentes.

Ex. 7: (Continuação.) Expresse a transformação por equações como no Ex. 5.

Ex. 8: (Continuação.) Carlos e Davi decidiram disputar um jôgo similar, com a diferença de que cada qual entregará uma soma igual à metade da que *o outro* possui. Se começarem com 30/— e 34/— respectivamente, o que acontecerá a estas quantidades?

Ex. 9: (Continuação.) Expresse a transformação por meio de equações como no *Ex.* 5.

Ex. 10: Se no *Ex.* 8 o jôgo fôr iniciado com outras somas de dinheiro, qual será em geral o ganhador?

Ex. 11: Em um aquário duas espécies de animálculos são prêsa e predador. A cada dia cada elemento predador destrói uma prêsa e também se divide a fim de converter-se em dois outros. Se hoje o aquário possuir m prêsas e n exemplares predadores, expresse suas variações sob a forma de transformação.

Ex. 12: (Continuação.) Qual é o operando desta transformação?

Ex. 13: (Continuação.) Se o estado era incialmente (150, 10), determine como variará nos primeiros quatro dias.

Ex. 14: Um certo pêndulo oscila aproximadamente de acôrdo com a transformação $x' = 1/2(x - y)$, e $y' = 1/2(x + y)$, onde x é seu desvio angular a partir da vertical e y é sua velocidade angular; x' e y' são seus valores um segundo depois. O estado de partida é (10, 10); determine como varia seu desvio angular, de segundo a segundo, nos primeiros oito segundos. (Sugestão: determine x', x'', x''', etc.; poderiam y', y' etc. ser determinados sem cálculo?)

Ex. 15: (Continuação.) Desenhe um gráfico comum (com eixos para x e t) mostrando como o valor de x varia no tempo. Trata-se de um pêndulo sem atrito?

Ex. 16: Num certo sistema econômico uma nova lei decreta que a cada reajustamento anual os salários devem subir tantos centavos quanto o índice de preços exceder 100 em pontos. O efeito econômico dos salários sôbre o índice de preços é tal que ao fim de qualquer ano o índice de preços torna-se igual ao coeficiente salarial no início do ano. Expresse as variações do nível salarial e do índice de preços durante o ano como uma transformação.

Ex. 17: (Continuação.) Se no presente ano os salários são da ordem de 110 e o índice de preços é também da ordem de 110, determine quais serão seus valores nos próximos dez anos.

Ex. 18: (Continuação.) Desenhe um gráfico simples mostrando como irão variar os preços e os salários. Esta lei é satisfatória?

Ex. 19: (Continuação.) O sistema é em seguida modificado de modo que sua transformação se torna $x' = 1/2(x + y)$, $y = 1/2(x - y) + 100$. Começa com salários e preços ambos da ordem de 110. Calcule o que sucederá nos próximos dez anos.

Ex. 20: (Continuação.) Desenhe um gráfico comum mostrando como os preços e os salários irão variar.

Ex. 21: Compare os gráficos dos *Exs.* 18 e 20. Como se descreveria, com um vocabulário econômico, a distinção entre os dois?

Ex. 22: Se o sistema apresentado no *Ex.* 19 fôr repentinamente perturbado de modo que os salários caiam para 80 e os preços subam para 120, e depois permaneçam estacionários, o que sucederia nos próximos dez anos? (Sugestão: utilize (80, 120) como operando.)

Ex. 23: (Continuação.) Desenhe um gráfico comum mostrando como variam os salários e os preços após a perturbação.

Ex. 24: Será a transformação T um-um entre os vetores (x^1, x_2) e os vetores (x'_1, x'_2)?

$$T: \begin{cases} x'_1 = 2x_1 + x_2 \\ x'_2 = x_1 + x_2 \end{cases}$$

(Sugestão: Uma vez dado $(x_1\ x_2)$, será (x'_1, x'_2) unìvocamente determinado? E vice-versa?)

**Ex.* 25: Desenho o gráfico cinemático do nono estado do sistema cujas componentes são resíduos:

$$\left.\begin{array}{l} x' = x + y \\ y' = y + 2 \end{array}\right\} \text{(Mod 3)}$$

Quantas bacias possui?

3.7. (Esta seção pode ser omitida.) A seção anterior é de importância fundamental pois se trata de uma introdução aos métodos da física matemática, tais como são aplicados a sistemas dinâmicos. Aconselhamos portanto o leitor a empenhar-se na resolução de *todos* os exercícios, porquanto sòmente dêste modo poderá alcançar uma verdadeira compreensão dos princípios. Se o fizer, estará melhor armado para apreciar o significado da presente seção, a qual sumaria o método.

O físico começa por denominar suas variáveis — $x_1, x_2, ..., x_n$. As equações básicas da transformação podem então sempre ser obtidas pelo seguinte método fundamental:

1) Tome a primeira variável x_1, e considere o estado para o qual há de mudar a seguir. Se se modificar por passos finitos, o próximo estado será x_1, se se modificar contìnuamente o próximo estado será $x_1 + dx_1$. (No último caso, o físico pode, de modo equivalente, considerar o valor dx_1/dt.)

2) Utilize o que é conhecido acêrca do sistema, e as leis da físcia, a fim de exprimir o valor de x'_1 ou de dx_1/dt (isto é, o que x_1 *será*) em têrmos dos valores que $x_1, \ldots, x_n$ (e quaisquer outros fatôres necessários) possuem *agora*. Dêste modo se obtém alguma equação como a seguinte:

$$x'_1 = 2\alpha x_1 - x_3 \text{ ou } dx_1/dt = 4k \operatorname{sen} x_3$$

3) Repita o processo para cada variável, por sua vez, até que esteja expressa tôda a transformação.

O conjunto de equações acima obtido — dando, para cada variável no sistema, o que ela será como uma função dos valores atuais das variáveis e de quaisquer outros fatôres necessários — constitui a **representação canônica** do sistema. *Trata-se de uma forma-padrão na qual podem ser incluídas tôdas as descrições de um determinado sistema dinâmico.*

Se as funções numa representação canônica forem tôdas lineares, diremos que o sistema é **linear**.

Dado um estado inicial, a trajetória ou linha de comportamento é agora calculável determinando-se as potências da transformação, como na S.3.9.

**Ex.* 1: Converta a transformação (ora numa forma canônica).

$$\begin{aligned} dx/dt &= y \\ dy/dt &= z \\ dz/dt &= z + 2xy - x^2 \end{aligned}$$

para uma equação diferencial de terceira ordem numa variável, x. (Sugestão: Elimine y e z e suas derivadas.)

**Ex.* 2: A equação do oscilador harmônico simples é amiúde expressa

$$\frac{d^2x}{dt^2} + ax = 0$$

Converta-a a uma forma canônica em duas variáveis independentes. (Sugestão: Inverta o processo utilzado no *Ex.* 1.)

**Ex.* 3: Converta a uma forma canônica em duas variáveis a seguinte equação:

$$x\frac{d^2x}{dt^2} - (1 - x^2)\frac{dx}{dt} + \frac{2}{1 + x^2} = 0$$

3.8. Após esta discussão de equações diferenciais, o leitor afeito a elas sentirá talvez que chegou agora à maneira "devida" de representar os efeitos do tempo, parecendo que a forma tabular discreta e arbitrária da S.2.3 é algo imprópria à primeira vista. Deverá observar, contudo, que o caminho algébrico é um caminho restrito, aplicável apenas quando os fenômenos apresentam a propriedade especial de continuidade (S.7.20). A forma tabular, de outro lado, pode ser utilizada *sempre, pois a forma tabular inclui a algébrica.* Isto apresenta alguma importância para o biólogo, que muitas vêzes tem de lidar com fenômenos que não se ajustam de modo natural à forma algébrica. Quando isto ocorre, deverá lembrar que a forma tabular sempre pode proporcionar a generalidade e o rigor de que necessita. O restante dêste livro ilustrará de muitos modos quão natural e fàcilmente a forma tabular pode ser usada para representar sistemas biológicos.

3.9. *Equações "insolúveis".* Os exercícios da S.3.6 terão mostrado fora de qualquer dúvida que, dada uma transformação univalente e fechada, bem como estado inicial, a trajetória a partir dêste estado é não só determinada (isto é, univalente) como calculável. Pois se o estado inicial fôr x e a transformação T, os sucessivos valores (a trajetória) de x serão a série

$x, T(x), T^2(x), T^3(x), T^4(x)$, e assim por diante.

Tal processo de deduzir uma trajetória quando se dá uma transformação e um estado inicial, denomina-se, matemàticamente, "integrar" a transformação. (O têrmo é empregado especialmente quando a transformação é um conjunto de equações diferenciais, como na S.3.7; o processo é então denominado também "solucionar" as equações.)

Se o leitor resolveu a S.3.6, provàvelmente já se convenceu de que, dada uma transformação e um estado inicial, poderá *sempre* obter a trajetória. Não se sentirá, portanto, desanimado se ouvir dizer que certas equações diferenciais são mencionadas como "não-integráveis" ou "insolúveis". Tais palavras têm um sentido puramente técnico, e significam apenas que a trajetória não pode ser obtida se estivermos limitados a certas operações matemáticas definidas. Tustin, no seu *Mecanismo dos Sistemas Econômicos*, mostra claramente como o economista pode querer estudar sistemas e equações do tipo "insolúvel"; e indica como o economista pode, na prática, conseguir o que deseja.

3.10. *Espaço de fase.* Quando as componentes de um vetor são variáveis numéricas, a transformação pode ser apresentada em forma geométrica; e esta forma algumas vêzes denota certas propriedades de maneira bem mais clara e óbvia do que as formas algébricas até agora consideradas.

Como exemplo do método, veja a transformação,

$$x' = 1/2x + 1/2y$$
$$y' = 1/2x + 1/2y.$$

do *Ex.* 3.6.7. Se tomarmos os eixos x e y, é possível representar cada vetor particular, tal como (8, 4), pelo ponto cuja coordenada x é 8 e cuja coordenada y é 4. O estado do sistema é assim representado inicialmente pelo ponto P na Fig. 3.10.1 (I).

A transformação modifica o vetor para (6, 6), e assim altera o estado do sistema para P'. O movimento é, sem dúvida, nada mais do que a variação desenhada no gráfico cinemático da S.2.17, agora traçada em um plano com eixos retangulares dotados de escalas numéricas. Êste espaço bidimensional, no qual os operandos e transformados são representáveis por pontos, é denominado **espaço de fase** do sistema. (A liberdade "botão e cordel" da S.2.17 não é mais possível.)

Em II a mesma figura apresenta muitas setas para especificar de modo geral o que acontece quando um ponto *qualquer* é transformado. No caso as setas indicam as outras mudanças que ocorreriam se outros estados fôssem tomados como operandos. É fácil ver, e provar geomètricamente, que tôdas as setas nesta situação são dadas por uma regra: tomando qualquer ponto dado como operando, dirija a seta 45° acima e à esquerda (ou abaixo e à direita) até que esta encontre a diagonal representada pela reta $y = x$.

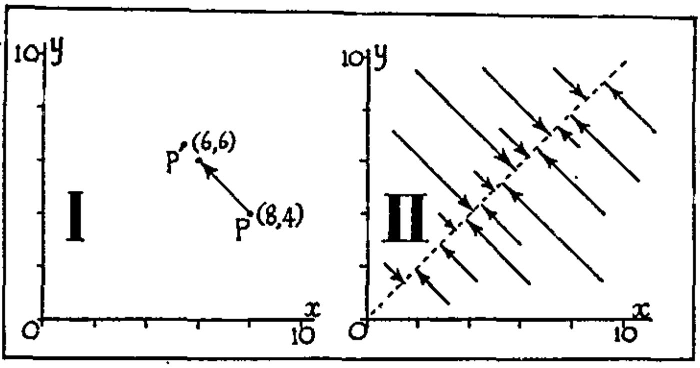


Fig. 3.10.1

A utilidade do espaço de fase (II) é agora visível, pois todo o âmbito das trajetórias no sistema pode ser observado num relance, como que congelado numa única exposição. Dêste modo acontece muitas vêzes que alguma propriedade pode ser exibida ou alguma tese provada, com a maior facilidade, lá onde a forma algébrica teria sido obscura.

Uma tal representação no plano é possível apenas quando o vetor tem duas componentes. Quando tem três, muitas vêzes ainda é útil uma representação por meio de um modêlo tridimensional, ou um desenho em perspectiva. Quando o número de componentes excede três, não é mais possível uma representação real, mas o princípio permanece, e um esbôço que represente semelhante estrutura dimensional superior ainda pode ser muito útil, especialmente se o significativo são mais as propriedades topológicas gerais do que as de pormenor.

(Os têrmos "espaço de fase" são usados às vêzes para indicar o espaço vazio antes da inserção das setas, isto é, o espaço em que *todo* conjunto de setas pode ser inserido, ou o diagrama do tipo II, acima configurado, contendo o conjunto de setas apropriadas a uma transformação particular. O contexto torna costumeiramente óbvia a intenção.)

Ex.. Desenhe os espaços de fase, com pormenores apenas suficientes para mostrar as características principais, de alguns dos sistemas das S.3.4 e 6.

3.11. *O que é um "sistema"?* Ficou estabelecido na S.3.1 que tôda máquina determinada real ou sistema dinâmico corresponde a uma transformação univalente fechada; e as seções intervenientes ilustraram a tese com muitos exemplos. Entretanto, não segue que a correspondência seja sempre óbvia; ao contrário, qualquer tentativa de aplicar a tese de modo geral encontrará logo certas dificuldades, que devem ser encaradas agora.

Suponha que tenhamos diante de nós um sistema dinâmico real particular — um pêndulo oscilante, ou uma crescente cultura de bactérias, ou um pilôto automático, ou uma aldeia indígena, ou uma preparação coração-pulmão — e queiramos descobrir a transformação correspondente, partindo do início e trabalhando a partir dos primeiros princípios. Suponha que se trate na realidade de um pêndulo simples de 40 cm de comprimento. Providenciamos um registro adequado, puxamos o pêndulo de um ângulo de 30° para um lado, soltamo-lo, e registramos sua posição a cada quarto de segundo. Determinamos os sucessivos desvios como sendo 30° (inicialmente), 10°, e −24° (no outro lado). Assim nossa primeira estimativa da transformação, sob as condições dadas, é

$$\downarrow \begin{array}{cc} 30° & 10° \\ 10° & -24° \end{array}$$

A seguir, como bons cientistas, conferimos esta transição *a partir de 10°*: puxamos o pêndulo lateralmente para 10°, soltamo-lo e verificamos que, um quàrto de segundo após, êle se encontra em +3°! Evidentemente a variação a partir de 10° não é univalente — o sistema é autocontraditório. O que nos incumbe fazer agora?

Nossa dificuldade é típica na pesquisa científica e é fundamental: queremos que a transformação seja univalente mas não é o que vai acontecer. Não podemos renunciar à demanda de singularidade, pois fazê-lo significaria abandonar a esperança de efetuar previsões univalentes. Afortunadamente, a experiência mostrou de há muito o que é preciso fazer: o sistema deve ser redefinido.

A esta altura, devemos estar esclarecidos sôbre como um "sistema" deve ser definido. Nosso primeiro impulso é apontar para o pêndulo e dizer "o sistema é isto aqui". Tal método, entretanto, oferece uma desvantagem básica: *cada objeto material contém nada menos do que uma infinidade de variáveis e, portanto, de possíveis sistemas.* O pêndulo real, por exemplo, não tem apenas comprimento e posição; possui também massa, temperatura, condutividade elétrica, estrutura cristalina, impurezas químicas, alguma radioatividade, velocidade, poder refletor, fôrça de tensão, uma película superficial de umidade, contaminação bacteriológica, absorção óptica, elasticidade, forma, gravidade específica e assim por diante. Qualquer sugestão de que deveríamos estudar "todos" os fatos não é realista, e na verdade a tentativa nunca é feita. O que é preciso é escolher e estudar os fatos relevantes com respeito a algum interêsse principal anteriormente dado.

A verdade é que no mundo ao nosso redor apenas certos conjuntos de fatos são capazes de produzir transformações fechadas e univalentes. A descoberta dêsses conjuntos, algumas vêzes, é fácil, outras vêzes é difícil. A história da ciência, e mesmo de qualquer simples investigação, abunda em exemplos. Usualmente, a descoberta envolve outro método para a definição de um sistema, o do *arrolamento das variáveis que cumpre levar em conta.* O sistema passa a significar, agora, não uma coisa, mas uma lista de variáveis. Esta lista pode ser diversificada, e a tarefa mais comum do experimentador é diversificar a lista ("levar outras variáveis em conta") até encontrar um conjunto de variáveis que proporcione a singularidade requerida. Assim consideramos primeiro o pêndulo como se êle consistisse sòmente da variável "desvio angular a partir da vertical"; verificamos que o sistema assim definido não fornece singularidade. Se tivéssemos de prosseguir, tentaríamos subseqüentemente outras definições, por exemplo, o vetor:

(desvio angular, massa do pêndulo),

que também se mostraria falho. Eventualmente, experimentaríamos o vetor:

(desvio angular, velocidade angular)

e verificaríamos que *êsses* estados, assim definidos, proporcionariam a desejada singularidade (cf. *Ex.* 3.16.14).

Algumas destas descobertas, das variáveis faltantes, foram da maior importância científica, como na ocasião em que Newton descobriu a importância da quantidade de movimento, ou quando Gowland Hopkins determinou a importância das vitaminas (o comportamento dos ratos submetidos a dieta não era univalente enquanto não foram identificadas). Algumas vêzes, a descoberta é trivial do ponto de vista científico, como sucede quando se obtêm resultados univalentes sòmente após a remoção de uma impureza do abastecimento de água ou o apêrto de um parafuso sôlto; porém a singularidade é sempre essencial.

(Às vêzes o que se pretende é que certas *probabilidades* sejam univalentes. Êste objetivo mais sutil é mencionado na S.7.4 e 9.2. Não é incompatível com o que acabamos de dizer: significa simplesmente que a *probabilidade* é que é variável importante, e não a variável que está fornecendo a probabilidade. Assim, se eu estudar cientìficamente uma rolêta posso interessar-me pela variável "*probabilidade* de que o próximo lance seja Vermelho", que é uma variável dotada de valores numéricos no intervalo entre 0 e 1, mais do que pela variável "*côr* do próximo lance", que é uma variável com apenas dois valores: Vermelho e Prêto. Um sistema que inclua a última variável é quase certamente imprevisível, ao passo que aquêle que inclui a primeira (a probabilidade) pode muito bem ser previsível, pois a probabilidade possui um valor *constante,* de aproximadamente meio.)

O sistema "absoluto" descrito e utilizado no livro *Design for a Brain* é, exatamente, um conjunto de variáveis dêsse tipo.

Fica claro agora por que se pode afirmar que *todo* sistema dinâmico determinado corresponde a uma transformação univalente (a despeito do fato de não ousarmos dogmatizar quanto ao conteúdo do mundo real, pois êste está cheio de surprêsas). Podemos fazer esta assertiva simplesmente porque a ciência se recusa a estudar os outros tipos, tais como o pêndulo a uma variável, acima mencionado, repudiando-os como "caóticos" ou "sem sentido". Somos *nós* quem decidimos, em última instância, o que aceitaremos como "do tipo máquina" ou o que rejeitaremos. (O assunto será resumido na S.6.3.)

A Máquina com Entrada

4

4.1. No capítulo anterior, estudamos a relação entre transformação e máquina, considerando a última simplesmente como uma unidade. Continuamos agora a fim de determinar, no mundo das transformações, o que corresponde ao fato de que tôda máquina comum pode ser acionada por vários fatôres e, destarte, levada a mudar seu comportamento, do mesmo modo que uma grua é controlável por um motorista ou um músculo por um nervo. A fim de efetuar tal estudo, faz-se necessário um entendimento adequado do que significa "parâmetro".

Até aqui, cada transformação foi considerada em si mesma; precisamos agora estender nosso exame, de modo a examinar a relação entre uma transformação e outra. A experiência mostrou que exatamente os mesmos métodos (como em S.2.3) aplicados de nôvo serão suficientes; pois a variação da transformação A para a transformação B nada mais é do que a transição $A \rightarrow B$. (Em S.2.3 estava subentendido que os elementos de uma transformação podem ser qualquer coisa passível de definição clara: não há portanto razão por que os próprios elementos não sejam transformações.) Assim, se T_1, T_2 e T_3 são três transformações, não há por que não definir a transformação U:

$$U: \downarrow \begin{matrix} T_1 & T_2 & T_3 \\ T_3 & T_2 & T_1 \end{matrix}$$

Para evitar confusão é necessário apenas impedir que as mudanças induzidas pela transformação T_1 venham a confundir-se com as induzidas por U; qualquer que seja o método adequado ao caso particular, os dois conjuntos de variações precisam permanecer conceitualmente distintos.

Um exemplo efetivo de uma transformação como U ocorre quando um menino tem uma máquina de brinquedo T_1, feita de partes intercambiáveis, e a seguir a desmonta para construir uma nova máquina de brinquedo T_2. (Neste caso as variações que sucedem quando T_1 passa de um de seus estados ao próximo (i.e., quando T_1 "funciona") são claramente distinguíveis da variação que ocorre quando T_1 muda para T_2.)

As mudanças de transformação para transformação podem, em geral, ser completamente arbitrárias. Preocupar-nos-emos, porém, com o caso especial em que várias transformações atuam sôbre o mesmo conjunto de operandos. Destarte, se os quatro operandos comuns forem *a, b, c* e *d*, poderia haver três transformações, R_1, R_2 e R_3:

$$R_1: \downarrow \begin{matrix} a & b & c & d \\ c & d & d & b \end{matrix} \qquad R_2: \downarrow \begin{matrix} a & b & c & d \\ b & a & d & c \end{matrix} \qquad R_3: \downarrow \begin{matrix} a & b & c & d \\ d & c & d & b \end{matrix}$$

É possível escrevê-las mais compactamente como

$\downarrow$	*a*	*b*	*c*	*d*
R_1	*c*	*d*	*d*	*b*
R_2	*b*	*a*	*d*	*c*
R_3	*d*	*c*	*d*	*b*

que empregaremos como forma-padrão. (Neste capítulo continuaremos a discutir apenas transformações fechadas e univalentes.)

Uma transformação corresponde a uma máquina com um modo característico de comportar-se (S.3.1); assim o conjunto de três — R_1, R_2 e R_3 — se incorporado no mesmo corpo físico, terá de corresponder a uma máquina com três modos de comportamento. Pode uma máquina possuir três maneiras de comportar-se?

Sim, pois as condições em que trabalha são alteráveis. Muitas máquinas dispõem de uma chave ou alavanca que pode ser colocada em qualquer de três posições, e a colocação determina qual dos três modos de comportamento há de ocorrer. Assim, se *a* etc., especifica o estado da máquina, e R_1 corresponde à chave na posição 1, e R_2 corresponde à chave na posição 2, então a variação do índice de R de 1 a 2 corresponde precisamente à mudança da chave da posição 1 à posição 2; e corresponde à mudança da máquina de um modo de comportar-se para outro.

Ver-se-á que a palavra "mudança", aplicada a semelhante máquina, pode referir-se a duas coisas muito diferentes. Há a mudança de estado a estado, de a para b, digamos, que é o comportamento da máquina, e que se verifica sob seu próprio impulso interno, e existe a mudança de transformação a transformação, de R_1 a R_2, digamos, que constitui a *mudança de seu modo de comportar-se,* e que ocorre ao capricho do experimentador ou de algum outro fator externo. A distinção é fundamental e não deve a nenhum pretexto ser negligenciada.

O índice de R, ou qualquer símbolo similar cujo valor determina qual a transformação a aplicar-se aos estados básicos, será denominado **parâmetro.** Caso seja numérico, cumpre distingui-lo cuidadosamente de quisquer números que se possam usar para especificar os operandos como vetores.

Uma máquina real cujo comportamento seja representável por um tal conjunto de transformações univalentes fechadas será denominada **transdutor** ou **máquina com entrada** (segundo a conveniência do contexto). O conjunto de transformações é sua representação canônica. O parâmetro, como algo que pode variar, constitui a sua **entrada.**

Ex. 1: Se S fôr $\downarrow \begin{matrix} a & b \\ b & a \end{matrix}$, quantas transformações univalentes e fechadas podem ser formadas com os mesmos dois operandos?

Ex. 2: Desenhe os três gráficos cinemáticos das transformações acima R_1, R_2 e R_3. A variação no valor do parâmetro modifica o gráfico?

Ex. 3: Com R (acima) em R_1, o ponto representativo partiu de c e moveu-se dois passos (para $R^2{}_1(c)$); depois com o ponto representativo neste nôvo estado, a transformação mudou para R_2 e o ponto pôde mover-se mais dois passos. Onde se encontra agora?

Ex. 4: Determine uma seqüência de R que leve o ponto representativo (i) de d para a, (ii) de c para a.

Ex. 5: Qual a mudança na transformação que corresponde a uma máquina com uma de suas variáveis fixa? Que transformação se obteria se o sistema

$$x' = -x + 2y$$
$$y' = x - y$$

tivesse a sua variável x fixada no valor 4?

Ex. 6: Construa uma tabela de transformações afetadas de um parâmetro, para mostrar que um parâmetro, embora presente, pode na realidade não ter qualquer efeito.

4.2. Podemos considerar agora o modo algébrico de representar um transdutor.

As três transformações

$$R_1: n' = n + 1 \qquad R_2: n' = n + 2 \qquad R_3: n' = n + 3$$

podem, òbviamente, ser escritas de maneira mais compacta como

$$R_a: n' = n + a$$

e isto nos indica como proceder. Nesta expressão cumpre perceber que as relações de n e a com o transdutor são inteiramente diversas, e a distinção de modo algum deve ser perdida de vista. n é operando e é mudado pela transformação; o fato de que é um operando manifesta-se pela ocorrência de n'. a é parâmetro e determina que transformação será aplicada a n. É preciso portanto especificar a èm valor antes de se achar a variação de n.

Quando as expressões na representação canônica se tornam mais complexas, a distinção entre variável e parâmetro pode ser feita, lembrando-se que os símbolos representativos do operando irão aparecer, de alguma forma, à esquerda, como x' ou dx/dt; pois a transformação deve dizer para o que serão modificadas. Assim, tôdas as quantidades que aparecem à direita, mas não à esquerda, devem ser parâmetros. Os exemplos abaixo esclarecerão os fatos.

Ex. 1: Quais são as três transformações obtidas quando atribuímos ao parâmetro a os valores -1, 0, ou $+1$ em T_a:

$$T_a: \begin{cases} g' = (1 - a)g + (a - 1)h \\ h' = \quad\quad 2g + \quad 2ah. \end{cases}$$

Ex. 2: O que são as duas transformações dadas quando o parâmetro α assume os valores 0 ou 1 em S?:

$$S: \begin{matrix} h' = (1 - \alpha)j + \log(1 + \alpha + \operatorname{sen} \quad h) \\ j' = (1 + \operatorname{sen} \alpha\, j)\ e\ (\alpha\ 1)\ h \end{matrix}$$

Ex. 3: O transdutor $n' = n + a^2$, no qual a e n assumem apenas valores inteiros positivos, começa com $n = 10$. (i) Em que valor a deveria ser mantido se, a despeito de transformações repetidas, n tivesse de permanecer em 10? (ii) Em que valor a deve ser mantido se n tem de avançar em passos de 4 em cada vez (i. e., 10, 14, 18 . . .)? (iii) Quais valores de a, escolhidos de nôvo a cada passo, fazem com que n siga a série 10, 11, 15, 16, 20, 21, 25, 26, . . ., em que as diferenças são alternadamente 1 e 4? (iv) Que valores de a farão n avançar por passos unitários até 100 e depois saltar diretamente para 200?

Ex. 4: Tendo um transdutor n operandos e também um parâmetro capaz de assumir n valores, o conjunto apresenta uma correspondência triúnica entre os valores do operando, transformado e parâmetro se (1) para dado valor de parâmetro a transformação é um-um, e (2) para dado operando a correspondência entre valor de parâmetro e transformada é um-um. Tal é o conjunto

$\downarrow$	a	b	c	d
R_1	c	d	a	b
R_2	b	a	c	d
R_3	d	c	b	a
R_4	a	b	d	c

Mostre que as transformadas devem constituir um quadrado latino, i. e., um quadrado no qual cada linha (e cada coluna) contém cada transformada uma e uma só vez.

Ex. 5: Certo sistema de uma variável V comporta-se como

$$V' = \frac{1}{10}\left(V + \frac{90}{P}\right),$$

onde P é um parâmetro. Dê a P algum valor P_1, *e. g.*, 10, e determine o limite para o qual V tende quando a transformação é repetida indefinidamente; chame êste limite de V_1. A seguir atribua a P outro valor P_2, *e. g.*, 3, e determine o limite correspondente V_2. Depois de encontrados vários de tais pares de valores, (de P e limite V) examine-os para verificar se vale entre êles alguma lei. Comporta-se V como o volume de um gás quando submetido a uma pressão P?

Ex. 6: Que transformação, com um parâmetro a, proporcionará para n as três séries de valores?

$$\begin{aligned}
a = 1&: \ 0, \to 1, \to 2, \to 3, \to 4, \ldots \\
a = 2&: \ 0, \to 4, \to 8, \to 12, \to 16, \ldots \\
a = 3&: \ 0, \to 9, \to 18, \to 27, \to 36, \ldots
\end{aligned}$$

(Sugestão: Tente algumas expressões plausíveis tais como $n' = n + a$, $n' = a^2 n$, *etc.*)

Ex. 7: Se $n' = n + 3a$, determinará o valor dado a a quão grande será o salto de n a cada passo?

4.3. Quando a expressão para um transdutor contém mais de um parâmetro, o número de transformações distintas pode ser tão grande quanto o número de combinações de valores possíveis para os parâmetros (pois cada combinação pode definir uma transformação distinta), mas nunca excedê-lo.

Ex. 1: Determine tôdas as transformações no transdutor U_{ab} quando a pode assumir valores 0, 1, ou 2, e b os valores 0 ou 1.

$$U_{ab}: \begin{cases} s' = (1 - a)s + abt \\ t' = (1 + b)t + (b - 1)a. \end{cases}$$

Quantas transformações contém o conjunto?

Ex. 2: (Continuação.) Se o vetor (a,b) pudesse assumir apenas os valores (0,1), (1,1) e (2,4), quantas transformações conteria o transdutor?

Ex. 3: O transdutor T_{ab}, com variáveis p e q:

$$T_{ab}: \begin{cases} p' = ap + bq \\ q' = bp + aq \end{cases}$$

é acionado em (3,5). Que valores devem ser atribuídos aos parâmetros a e b se (p,q) deve mover-se, em um passo, para 4,6)? (Sugestão: pode-se encarar a expressão T_{ab} como uma equação simultânea.)

Ex. 4: (Continuação.) A seguir ache um valor para (a,b) que leve todo o sistema a mover-se de volta, em um passo, de (4,6) para (3,5).

Ex. 5: O transdutor $n' = abn$ tem parâmetros a e b, cada qual podendo assumir quaisquer dos valores 0, 1 e 2. Quantas transformações distintas aí existem? (Tais casos indistinguíveis são ditos "degenerados"; a regra dada no início desta seção refere-se ao número máximo de transformações possíveis; o número máximo não precisa ser alcançado sempre.)

4.4. *Entrada e saída.* A palavra "transdutor" é usada pelo físico, e especialmente pelo engenheiro eletrotécnico, a fim de descrever qualquer sistema físico determinado que disponha de certos lugares definidos de entrada, nos quais o experimentador possa forçar mudanças que afetem seu comportamento, e certos lugares definidos de saída, onde êle observe as mudanças de certas variáveis, quer diretamente ou através de instrumentos convenientes. Ficará agora claro que o sistema matemático descrito na S.4.1. é a representação natural de tal sistema material. Tornar-se-á claro também que "a entrada" da máquina corresponde ao conjunto de estados providos por seus parâmetros; pois, assim como os parâmetros ou entrada sofrem alteração, do mesmo modo é afetado o comportamento da máquina ou do transdutor.

Com um sistema elétrico, a entrada é comumente òbvia e restrita a alguns poucos terminais. Nos sistemas biológicos, todavia, o número de parâmetros é comumente muito grande e o conjunto inteiro dêstes não é de forma alguma óbvio. É, de fato, coextensivo com o conjunto de "tôdas as variáveis cuja mudança afeta diretamente o organismo". Os parâmetros incluem assim as condições em que vive o organismo. Nos capítulos seguintes, o leitor deverá portanto estar preparado para interpretar o têrmo "entrada" como significando ou os poucos parâmetros adequados a um mecanismo simples, ou os muitos parâmetros adequados ao organismo de vida livre numa ambiência complexa. (O aumento no número de parâmetros não implica necessàriamente qualquer diminuição no rigor do argumento, pois tôdas as quantidades envolvidas são mensuráveis com uma precisão limitada apenas pelos recursos de tempo e dinheiro do experimentador.)

Ex. 1: Uma máquina elétrica que recebe potenciais pelos seus dois terminais de entrada sofre alteração quando seus dois terminais são ligados permanentemente por um fio. A que alteração em T_{ab} isto corresponderia se a máquina fôsse representada como no *Ex.* 4.3.3.?

Ex. 2: "Quando um organismo interage com seu meio, seus músculos constituem a entrada do meio e seus órgãos sensoriais, a saída do meio". O leitor está de acôrdo?

4.5. *Transiente.* O engenheiro eletrotécnico e o biólogo tendem a testar seus sistemas por métodos assaz diferentes. O engenheiro amiúde investiga a natureza de algum sistema desconhecido submetendo-o a uma variação regular incessante à sua entrada, enquanto observa sua saída. Assim, na análise de Fourier, sujeita-o a prolongada estimulação por meio de um potencial regular sinusoidal de freqüência escolhida, e observa certas características na saída; depois repete a prova com outra freqüência, e assim por diante; eventualmente deduz algo das propriedades do sistema a partir de relações entre freqüências de entrada e as correspondentes características de saída. Durante esta prova, a máquina sofre incessante perturbação.

O biólogo muitas vêzes usa um método que não perturba absolutamente o sistema, após o estabelecimento inicial das condições. Assim, pode colocar uma porção de carne perto de um formigueiro e então não efetuar qualquer modificação ulterior — mantendo constantes as condições e os parâmetros — enquanto observa a evolução conjunta dos complexos padrões de comportamento, individual e social, que a seguir se desenvolvem.

Ao contrário do que é visto em sistemas vivos, o comportamento de sistemas mecânicos e elétricos determina amiúde alguma uniformidade com razoável rapidez a partir do momento em que pára a incessante variação na entrada. A resposta apresentada pela máquina após alguma perturbação, sendo subseqüentemente mantida constante a entrada, chama-se transiente. É importante notar que, para o engenheiro, a seqüência complexa de eventos no formigueiro é um transiente. É possível defini-la em têrmos mais gerais como a seqüência de estados produzidos por um transdutor em condições constantes antes que a seqüência comece a repetir-se.

Para falar do transiente, como sendo distinto da parte repetitiva que vem a seguir, convém estar capacitado a assinalar, sem ambigüidade, seu fim. Se a transformação fôr discreta, o seguinte método dará rigorosamente o seu comprimento: Faça a seqüência de estados prosseguir até a repetição tornar-se evidente, assim

A B C D C D C D C D C . . . ou H E F G G G G G G . . .

Então, partindo da direita, faça o sinal "1" assim que a seqüência divergir do ciclo, desta maneira

$A\, B^1\, C\, D\, C\, D\, C\, D\, C\, D\, C \ldots$ ou $H\, E\, F^1\, G\, G\, G\, G\, G\, G \ldots$

Depois adicione o sinal "2", à direita de 1, para incluir um ciclo completo; dêsse modo

$A\, B^1\, C\, D^2\, C\, D\, C\, D\, C\, D\, C \ldots$ ou $H\, E\, F^1\, G^2\, G\, G\, G\, G\, G\, G \ldots$

Então o transiente é definido como uma seqüência de estados a partir de um estado inicial até a marca 2: A B C D ou H E F G.

Agora é possível dar forma rigorosa à impressão intuitiva de que sistemas complexos podem produzir, sob condições constantes, formas de comportamento mais complexas do que seriam capazes os simples. Traçando um gráfico cinemático arbitrário de N estados, é fácil verificar que, se aplicamos repetidamente uma transformação univalente fechada com N operandos, então o *comprimento de um transiente não pode exceder de N estados.*

Ex. 1: Que propriedade deve possuir o gráfico se o início de uma recorrência precisa ser adiado o mais possível?

Ex. 2: Qual é o transiente do sistema do *Ex.* 3.6.6, que parte do estado (8,5)?

ACOPLAMENTO DE SISTEMAS

4.6. Uma propriedade fundamental das máquinas é poderem ser acopladas. Podemos acoplar duas ou mais máquinas inteiras de modo a formar uma máquina; e qualquer máquina pode ser encarada como constituída pelo acoplamento de suas partes, por sua vez concebíveis como pequenas, submáquinas. O acoplamento é de profunda importância na ciência, pois quando o experimentador desenvolve uma experiência êle se acopla temporàriamente ao sistema que estuda. A que corresponderia êste processo, a junção de máquina a máquina ou de parte a parte, na forma simbólica das transformações? Em que consiste a *operação* de "acoplamento"?

Antes da dar a resposta, cumpre informar que há mais de uma resposta. Uma das maneiras é forçá-las grosseiramente à união, de modo a ficarem "acopladas" tal como dois automóveis se apresentam após um acidente. Esta forma, entretanto, nos é de pouco interêsse, porquanto os automóveis sofreram grande mudança pelo processo. O que pretendemos é um modo de acoplamento que não violente o trabalho interno de cada máquina, de maneira que, após o mesmo, cada máquina permaneça ainda a mesma que antes.

Para que assim seja, o acoplamento deve ser disposto de tal modo que, em princípio, cada máquina afete a outra simplesmente afetando suas *condições*, i. e., afetando sua entrada. Destarte, se as máquinas devem manter suas naturezas individuais depois de acopladas para formar um todo, o acoplamento tem de ocorrer entre as entradas e as saídas (dadas), ficando as outras partes de lado, por mais acessíveis que sejam.

4.7. Delineie agora a operação em pormenor. Suponha que a máquina (transdútor) P deve ser ligada a outra, R. Para simplificar, admita que P vá afetar R, sem que R afete P, como ao se ligar um microfone a um amplificador, ou quando um nervo motor encurta para suprir um músculo embrionário. Devemos acoplar a saída de P à entrada R. Evidentemente o comportamento de R, ou mais precisamente, a transformação que descreve as mudanças de estado de R, dependerá do estado de P e com êle mudará. Segue-se daí que R deve ter parâmetros, pois a entrada, e os valores dêsses parâmetros devem, a cada momento, ser alguma função do estado de P. Suponha, para fins de limitação, que a máquina ou transdutor R possua três transformações como as apresentadas na S.4.1, i. e.,

$\downarrow$	a	b	c	d
R_1	c	d	d	b
R_2	b	a	d	c
R_3	d	c	d	b

e que P tenha a seguinte transformação, sôbre os três estados i, j, k:

$$P: \downarrow \begin{matrix} i & j & k \\ k & i & i \end{matrix}$$

Agora é preciso juntar P e R especificando qual o valor do parâmetro de R, chamemo-lo α deve ser tomado quando P estiver em qualquer dos seus estados. Suponha que nos decidamos pela relação Z (uma transformação univalente, porém não-fechada):

$$Z: \begin{cases} \text{estado de } P: & \downarrow \begin{matrix} i & j & k \\ 2 & 3 & 2 \end{matrix} \\ \text{valor de } \alpha & \end{cases}$$

(Fizemos a relação entre P e α de modo algo irregular a fim de acentuar que os pormenores são completamente arbitrários e estão sob o inteiro contrôle de quem quer que ordene o acoplamento.) Suponhamos além disso — isto é essencial para a ordenação do acoplamento — que duas máquinas P e R funcionem numa escala de tempo comum, de maneira que suas mudanças atuem em cadência.

Descobriremos então que as duas máquinas formam *uma nova máquina de comportamento inteiramente determinado.* Assim, admita que o todo começou com R em a e com P em i. Por estar P em i, a transformação R será R_2 (devido a Z). Isto converte a em b; o i de P se converterá em k; dêste modo, os estados a e i mudaram de forma determinada para b e k. Devemos agora repetir o argumento. Com P em k, a transformação R será de nôvo R_2 (devido a Z); de tal maneira que b se converterá (sob R_2) em a e k em i (sob P). Isto traz todo o sistema de volta ao estado inicial de (a, i), de maneira que o todo prosseguirá sem dúvida neste ciclo, indefinidamente.

O comportamento de tôda a máquina torna-se mais óbvio se usarmos o método da S.3:5 e reconhecermos que o estado de tôda a máquina é simplesmente um vetor com duas componentes (x,y), onde x é um dos a, b,c, d e y é um dos i, j, k. Assim, a máquina tôda possui doze estados e vimos acima que o estado (a, i) sofre as transições

$$(a,i) \rightarrow (b,k) \rightarrow (a,i) \rightarrow \text{etc.}$$

Ex. 1: Se Q fôr a transformação da máquina tôda, dos doze estados (x, y), complete Q.

Ex. 2: Desenhe o gráfico cinemático de Q. Quantas bacias possui?

Ex. 3: Una P a R utilizando a transformação Y

$$Y: \begin{cases} \text{estado de } P: & \downarrow & i & j & k \\ \text{valor de } \alpha: & & 1 & 2 & 3 \end{cases}$$

O que sucede quando esta máquina parte de (a,i)?

Ex. 4: Se duas máquinas são ligadas para formar um todo, dependerá o comportamento do todo da forma do acoplamento? (Sugestão: Utilize o *Ex.* anterior.)

Ex. 5: Se duas máquinas de estados n_1 e n_2, respectivamente, são unidas, qual o comprimento máximo do transiente que o todo pode produzir?

Ex. 6: Se a máquina M possui um comprimento máximo de transiente de n estados, qual será o comprimento máximo do transiente de uma máquina formada pela junção de três M?

Ex. 7: Tome uma porção de partes (A, B, C, ...), cada qual com a transformação

$$\begin{array}{c|ccc} \downarrow & 0 & 1 & 2 \\ \hline \alpha & 0 & 2 & 0 \\ \beta & 1 & 1 & 1 \\ \gamma & 2 & 2 & 2 \end{array}$$

e as una em uma única longa cadeia

$$\text{entrada} \rightarrow \boxed{A} \rightarrow \quad \rightarrow \boxed{C} \rightarrow \text{etc.,}$$

de modo que A afete B, B, afete C, e assim por diante, por meio de Z:

$$Z: \downarrow \begin{matrix} 0 & 1 & 2 \\ \alpha & \beta & \gamma \end{matrix}$$

Se mantemos a entrada de A em α, o que sucede aos estados ulteriores da cadeia?

Ex. 8: (Continuação.) O que sucede se a entrada fôr agora modificada de um passo para β e depois retornar a α, onde é mantida?

4.8. *Acoplamento com realimentação.* Na seção anterior, P estava acoplado a R de modo que as mudanças de P afetavam, ou determinavam de algum modo, o que seriam as mudanças de R, mas as mudanças de P não dependiam do estado em que R estava. Todavia, duas máquinas podem ser acopladas de modo que uma afete a outra.

Para que isto suceda, cada qual deve possuir uma entrada, i. e., parâmetros. P não tem parâmetros, de modo que êste duplo acoplamento não pode ser efetuado diretamente sôbre as máquinas da seção anterior. Suponha, então, que vamos acoplar R (como antes) a S, dados abaixo:

$\downarrow$	a	b	c	d
R_1	c	d	d	b
R_2	b	a	d	c
R_3	d	c	d	b

$\downarrow$	e	f
S_1	f	f
S_2	e	f
S_3	f	f
S_4	f	e

S poderia ser acoplado de modo a afetar R por meio de Y (se o parâmetro R fôr):

$$Y: \begin{cases} \text{valor de } \alpha: \\ \text{estado de } S: \end{cases} \downarrow \begin{matrix} 3 & 1 \\ e & f \end{matrix}$$

e R de modo a afetar S por meio de X (se o parâmetro de S fôr β):

$$X: \begin{matrix} \text{estado de } R: \\ \text{valor de } \beta: \end{matrix} \downarrow \begin{matrix} a & b & c & d \\ 3 & 1 & 1 & 2 \end{matrix}$$

A fim de traçar as mudanças que há de sofrer esta nova máquina global, (chamemo-la T), suponha que ela parta do estado vetor (a, e). Por Y e X, as transformações a serem empregadas no primeiro passo são R_3 e S_3. Elas darão, atuando em a e e respectivamente, d e f; assim, o nôvo estado da máquina tôda é *(d, f)*. As duas transformações seguintes serão R_1 e S_2 e, portanto, o estado subseqüente *(b, f)*; e assim por diante.

Ex. 1: Construa o gráfico cinemático de *T*.

Ex. 2: Acople *S* e *R* de alguma outra maneira.

Ex. 3: Acople *S* e *R* de tal modo que *S* afete *R* mas *R* não afete *S*. (Sugestão: Considere o efeito em *X* quando todos os valores de β são os mesmos.)

4.9. *Acoplamento algébrico.* O processo das seções anteriores, que consistiu em tratar individualmente tôdas as mudanças que sofreu cada estado e parâmetro, mostra com perfeita clareza e generalidade as relações implicadas no "acoplamento". É possível desenvolver várias modificações sem qualquer perda da referida clareza.

Assim, suponha que as máquinas sejam especificadas, como é comum, em têrmos de vetores com componentes numéricas; neste caso a regra de acoplamento permanece inalterada: cada máquina precisa ter um ou mais parâmetros, e o acoplamento se faz especificando *que função das variáveis da outra máquina devem ser tais parâmetros.* Dêste modo, as máquinas *M* e *N*

$$M: \begin{cases} a' = a^2 + pb \\ b' = -qa \end{cases} \qquad N: \begin{cases} c' = rsc + ud^2 \\ d' = 2tue \\ e' = uce \end{cases}$$

podem ser ligadas pelas transformações *U* e *V*:

$$U: \begin{cases} p = 2c \\ q = de^2 \end{cases} \qquad V: \begin{cases} r = a + b \\ s = a - b \\ t = -a \\ u = b^2 \end{cases}$$

U é um modo abreviado de escrever todo o conjunto de transições de um valor de (c, d, e) a um valor de (p, q), *e. g.*

$$U: \downarrow \begin{matrix} (0,0,0) & (0,0,1) & (1,3,5) & (2,2,4) \\ (0,0) & (0,0) & (2,75) & (4,32) \end{matrix}$$

Similarmente para *V*, uma transformação de (a, b) para (r, s, t, u), que inclui, por exemplo, $(5,7) \rightarrow (12, -2, -5, 49)$ (e compare *P* de S.6.9).

O resultado do acoplamento é um sistema a cinco variáveis com representação:

$$\begin{aligned}
a' &= a^2 + 2bc \\
b' &= -\,ade^2 \\
c' &= (a^2 - b^2)c + b^2d^2 \\
d' &= -\,2ab^2e \\
e' &= b^2ce
\end{aligned}$$

(No livro *Design for a Brain*, S.21.6, encontram-se ilustrações do mesmo processo com equações diferenciais.)

Ex. 1: Quais são os parâmetros de M? E de N?

Ex. 2: Una M e N por meio de W e X e determine para que estado (1, 0, 0, 1, 0), um valor de (a, b, c, d, e), mudará:

$$W: \begin{cases} p = d \\ q = c \end{cases} \qquad X: \begin{cases} r = a \\ s = ab \\ t = a \\ u = a \end{cases}$$

4.10. O *Ex.* 4.7.4 já mostrou que partes, em geral, podem ser acopladas de modos diferentes para formar um todo. *A definição das partes componentes não determina o modo de acoplamento.*

Disto segue-se um importante corolário. O fato de uma máquina tôda ser construída de partes de dado comportamento não basta para determinar seu comportamento como um todo: sòmente quando se adicionam os pormenores do acoplamento fica determinado o comportamento do todo.

REALIMENTAÇÃO

4.11. Na S.4.7, P e R estavam unidos de tal modo que P afetava R, enquanto R não exercia qualquer efeito sôbre P. Diz-se que P domina R e (para antecipar S.4.12) nos é permitido representar a relação entre as partes por

$$\boxed{P} \rightarrow \boxed{R}$$

(Não se confunda a seta com a usada para representar a transição (S.2.2), pois a segunda relaciona sempre dois estados, ao passo que a seta acima relaciona duas partes.

Nos diagramas vindouros, mostraremos sempre as partes enquadradas.)

A cibernética, entretanto, se interessa especialmente pelo caso de S.4.8, onde cada parte afeta a outra, relação que pode ser representada da seguinte forma

$$\boxed{P} \rightleftarrows \boxed{R}$$

Quando existe esta circularidade de ação entre as partes de um sistema dinâmico, pode-se afirmar que há **realimentação** *(feedback)*.

A definição de realimentação há pouco enunciada é a mais concorde com o espírito dêste livro, que se preocupa essencialmente com princípios.

Outras definições, todavia, são possíveis, e tem havido certa disputa quanto à melhor; assim, algumas palavras explicativas talvez sejam úteis. Existem dois pontos de vista principais a considerar.

De um lado, encontram-se aquêles que seguem o caminho trilhado pelo presente livro aquêles cuja meta é entender os *princípios* subjacentes aos multitudinários mecanismos especiais que os exibem. Para tais pesquisadores, existe "realimentação" entre duas partes quando cada uma afeta a outra, como, por exemplo, em

$$\begin{aligned} x' &= 2xy \\ y' &= x - y^2; \end{aligned}$$

pois o valor de y afeta a maneira como x há de mudar e, do mesmo modo, o valor de x afeta y. Em contraposição, não caberia dizer que a realimentação esteja presente em

$$\begin{aligned} x' &= 2x \\ y' &= x - y^2 \end{aligned}$$

pois a mudança de x não depende agora do valor de y; x domina y, e a ação se desenvolve apenas num sentido.

De outro lado encontram-se os experimentadores práticos e construtores, que desejam empregar a palavra para referir, quando pode ser dado como certo algum efeito posterior de P para R, à recondução deliberada de algum efeito de R para P por alguma conexão que seja física ou materialmente evidente. Objetam à definição do matemático, salientando que esta os forçaria a admitir a presença da realimentação no pêndulo comum (veja *Ex.* 3.6.14), entre sua posição e seu momento — uma "realimentação" que, do ponto de vista prático, é algo mística. A isso o matemático retruca que se deve considerar a realimentação como presente só quando há um fio ou nervo real para representá-la, — então a teoria torna-se caótica e crivada de irrelevâncias.

Na realidade, a disputa é desnecessária, pois a definição exata de "realimentação" em parte alguma é importante. O fato é que o conceito de "realimentação", tão simples e natural em certos casos elementares, faz-se artificial e de reduzida serventia quando as interligações entre as partes se tornam mais complexas. Quando existem apenas duas partes unidas de tal maneira que cada uma afete a outra, as propriedades da realimentação fornecem importantes e úteis informações acêrca das propriedades do conjunto. Mas, quando as partes chegam mesmo a quatro, se cada qual afeta as outras três, então, podem-se traçar através delas vinte circuitos; e o conhecimento das propriedades de todos os vinte circuitos *não* proporciona informação completa acêrca do sistema. Sistemas tão complexos não podem ser tratados como um conjunto entrelaçado de circuitos de realimentação mais ou menos independentes, mas sòmente como um todo.

Para o entendimento dos princípios gerais de sistemas dinâmicos, portanto, o conceito de realimentação é inadequado em si mesmo. O que importa é que os sistemas complexos, ricamente conectados em cruz internamente, apresentam comportamentos complexos, e que tais comportamentos podem ser balizados em padrões complexos.

Ex. 1: Trace vinte circuitos no diagrama da Fig. 4.11.1:

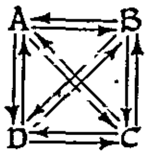


Fig. 4.11.1

Ex. 2: Uma certa máquina com entrada α, apresenta a transformação

$$T: \begin{cases} x' = y - \alpha z \\ y' = 2z \\ z' = x + \alpha \end{cases}$$

Que máquina (como transformação) resulta se a entrada α fôr acoplada com sua saída z, por $\alpha = -z$?

Ex. 3: (Continuação.) Comportar-se-á a segunda máquina diferentemente da primeira se a primeira manteve α de modo permanente em — 1?

Ex. 4: Uma certa máquina conta, entre suas entradas, com uma célula fotelétrica; entre suas saídas, com uma lâmpada de luminosidade variável. Na Condição 1 não há ligação da lâmpada com a célula, nem elétrica nem óptica. Na Condição 2 um espelho é colocado de tal maneira que as variações na luminosidade da lâmpada causam variações no potencial da célula (i e., de modo que a máquina pode "ver-se"). Seria sua expectativa que os comportamentos nas Condições 1 e 2 diferissem? (Sugestão: compare com *Ex.* 3.)

INDEPENDÊNCIA DENTRO DE UM TODO

4.12. Nas últimas seções foi usado repetidamente o conceito de uma máquina ou parte ou variável "com efeito sôbre" outra máquina ou parte ou variável. Cumpre agora precisá-lo, pois é de profunda importância. Qual seu significado em têrmos de operações reais sôbre uma dada máquina? O processo é o seguinte.

Suponha que estejamos verificando que parte ou variável i exerce efeito imediato sôbre uma parte ou variável j. A grosso modo, deixamos que o sistema mostre seu comportamento e observamos se o comportamento da parte j é alterado quando muda o valor da parte i. Se o comportamento da parte j é exatamente o mesmo, qualquer que seja o valor de i, dizemos, em geral, que i não tem efeito sôbre j.

Para sermos mais precisos, escolhemos primeiro um certo estado S (do sistema todo). Com i em algum valor, notamos a transição que ocorre na parte J (ignorando as de outras variáveis). Comparamos a referida transição com as que ocorrem quando empregamos os estados S_1, S_2, etc. — diferentes de S — nos quais S_1, S_2 etc. diferem de S *apenas no valor da i-ésima componente.* Se S_1, S_2 ... fornecem a mesma transição na parte j que S, dizemos então que *i não tem efeito imediato sôbre j*, e vice-versa. (Efeito "imediato" porque estamos considerando os valores de j sôbre um só passo de tempo.)

Consideremos a seguir o que significa o conceito numa transformação. Suponhamos que seus elementos sejam vetores com quatro componentes (u, x, y, z) e que a terceira linha das equações canônicas reze:

$$y' = 2uy - z$$

Isto nos diz que, se y está agora em algum valor, o valor particular em que estará no próximo passo dependerá dos valores que u e z possuírem, mas não dependerá do valor de x. Dizemos que as variáveis u e z exercem um **efeito imediato** sôbre y.

Cabe notar que, para manter o rigor, a presença ou ausência de um efeito imediato, de u sôbre y digamos, só é verificada primàriamente para *dois estados dados,* que devem ter os mesmos valores em suas componentes x, y e z e precisam diferir em suas componentes u. Pois um efeito imediato em um par de estados não restringe, em geral, as possibilidades em outro par de estados. Assim, a transformação acima mencionada proporciona as transições:

$$\begin{array}{l}
(0,0,0,0) \rightarrow (\ ,\ ,0,\ ) \\
(1,0,0,0) \rightarrow (\ ,\ ,0,\ ) \\
(0,0,1,0) \rightarrow (\ ,\ ,0,\ ) \\
(1,0,1,0) \rightarrow (\ ,\ ,2,\ )
\end{array}$$

(onde foram omitidos os valores irrelevantes). As duas primeiras mostram que, em uma região do espaço, u *não* exerce efeito imediato sôbre y, e as duas outras mostram que em outra região êle exerce. Em têrmos estritos, portanto, a pergunta "qual é o efeito imediato de u sôbre y?" só pode ser respondida para um dado par de estados. Freqüentemente, em sistemas simples, a mesma resposta é dada com respeito a todo o espaço de fase; se isto acontecer, podemos então descrever o efeito imediato de u sôbre y, incondicionalmente. Assim, no exemplo acima, u *tem* um efeito imediato sôbre y em todos os pontos, menos alguns particulares.

Esta prova, do efeito imediato de u sôbre y, apenas efetua em símbolos o que o experimentador faz quando deseja verificar se uma variável exerce efeito imediato sôbre outra: êle fixa tôdas as variáveis exceto o par em aprêço, e compara o comportamento de uma quando a outra tem o valor u_1 com o seu comportamento quando a outra tem o valor u_2.

O mesmo método é, de fato, usado em geral na vida cotidiana. Assim, se entramos num quarto estranho e desejamos acender a luz, verificando que existem três comutadores, nosso problema é determinar quais comutadores exercem e quais não exercem efeito sôbre o comportamento da luz. *Comutamos* um dêles e observamos se a isto se segue uma *mudança* no comportamento da luz. Desta maneira descobrimos de que comutador depende a luz.

O teste concorda pois com o senso comum e goza da vantagem de ser aplicável e interpretável ainda que nada saibamos dos fatôres físicos reais ou outros fatôres em ação. Cumpre notar que o teste não requer conhecimento de fatôres estranhos: o resultado é deduzido diretamente do sistema de comportamento observado, e depende apenas *do que* o sistema faz e não do *por que* o faz.

Foi assinalado acima que o transdutor pode exibir qualquer grau de arbitrariedade na distribuição dos efeitos imediatos sôbre o espaço de fase. Muitas vêzes, entretanto, a distribuição apresenta continuidade, de modo que, em uma apreciável região, a variável *u*, digamos, tem efeito imediato sôbre *y* enquanto na mesma região *x* não tem efeito algum. Quando isto ocorre, é possível amiúde traçar com proveito um diagrama que mostre como valem estas relações na região (que por vêzes pode compreender todo o espaço de fase). Uma seta é traçada de *u* para *y* se e sòmente se *u* exerce efeito imediato sôbre *y*. Semelhante diagrama será denominado **diagrama de efeitos imediatos.**

Tais diagramas já são corriqueiros. São freqüentemente empregados em fisiologia para mostrar como um conjunto afim de variáveis (tais como pressão sangüínea, ritmo de pulsação, secreção de adrenalina e atividade no seio carótido) atuam uma sôbre a outra. No projeto de máquinas computadoras e servomecanismos, são conhecidos como "mapas de contrôle de flutuação". São também utilizados em algumas grandes emprêsas para indicar as relações de contrôle e informação existentes entre os vários departamentos.

A seta empregada em um diagrama dêste tipo difere, sem dúvida, profundamente, em significado da seta usada para indicar variação numa transição (S.2.2). No último caso significa simplesmente que um estado muda para outro; mas a seta no diagrama dos efeitos imediatos possui um sentido muito mais complexo. Neste caso, uma seta de *A* a *B* informa que, se, sôbre uma série de testes, *A* tiver uma variedade de valores diferentes — começando *B* e tôdas as outras condições com o mesmo valor todo o tempo — então os valores que *B* assume sôbre tôda a série também apresentarão variedade. Veremos mais tarde (S.8.11) que isto redunda simplesmente em dizer que um *canal de comunicação* vai de *A* a *B*.

Quando é dado um transdutor, em forma algébrica ou em forma material efetiva, podemos examinar os efeitos imediatos dentro do sistema e, assim, deduzir algo de sua organização e estrutura internas. Nesse estudo devemos distinguir cuidadosamente entre efeitos "imediatos" e "últimos". No teste acima apresentado, o efeito de x sôbre y foi considerado apenas num único passo, e tal restrição é necessária na teoria básica. Verificou-se que x não tem efeito imediato sôbre y; pode todavia acontecer que x tenha efeito imediato sôbre u e que u tenha efeito imediato sôbre y; então x exerce algum efeito sôbre y, que aparece após um prazo de um passo extra. Um efeito assim, e aquêles que atuam mesmo através de longas cadeias de variáveis e com demoras mais longas, serão referidos como efeitos **últimos**. Um **diagrama de efeitos últimos** pode ser levantado mediante o desenho de uma seta que vai de A a B se e sòmente se A apresentar um efeito último sôbre B. Os dois diagramas se relacionam de modo simples, pois o diagrama dos efeitos imediatos, se alterado pela adição de outra seta onde houver duas setas unidas ponta à cauda, mudando e continuando semelhante processo até que sejam impossíveis ulteriores adições, fornece o diagrama dos efeitos últimos.

$$\begin{tikzcd} & \boxed{u} \arrow[dr] & \\ \boxed{x} \arrow[ur] & & \boxed{y} \end{tikzcd} \quad \text{para} \quad \begin{tikzcd} & \boxed{u} \arrow[dr] & \\ \boxed{x} \arrow[ur] \arrow[rr] & & \boxed{y} \end{tikzcd}$$

Se uma variável ou parte não exerce efeito último sôbre outra, diz-se que a segunda é **independente** da primeira.

Ambos os diagramas, como exemplos posteriores hão de mostrar, possuem traços correspondentes a importantes e bem conhecidas feições do sistema que representam.

Ex. 1: Desenhe o diagrama dos efeitos imediatos dos sistemas absolutos abaixo; e note a peculiaridade de cada um:

(i) $x' = xy,\ y' = 2y.$

(ii) $x' = y,\ y' = z + 3,\ z' = x^2.$

(iii) $u' = 2 + ux,\ v' - y,\ x' = u + x,\ y' = y + v^2.$

(iv) $u' = 4u - 1,\ x' = ux,\ y' = xy + 1,\ z' = yz.$

(v) $u' = u + y,\ x' = 1 - y,\ y' = \log y,\ z' = z + yz$

(vi) $u' = \operatorname{sen} 2u,\ x' = x^2,\ y' = y' + 1,\ z' = xy + u.$

Ex. 2: Se $y' = 2uy - z$, em que condições u não tem efeito imediato sôbre y?

Ex. 3: Encontre exemplos de máquinas reais cujas partes se relaciomem como nos diagramas de efeitos imediatos do *Ex.* 1.

Ex. 4: (Continuação.) Similarmente encontre exemplos em sistemas sociais e econômicos.

Ex. 5: Levante uma tabela para mostrar de todos os modos possíveis em que diferem o gráfico cinemático e o diagrama dos efeitos imediatos.

4.13. Na discussão da seção anterior, o sistema foi dado por representação algébrica; quando descrito desta forma, a dedução do diagrama dos efeitos imediatos é fácil. Cumpre observar, porém, que o diagrama também é diretamente dedutível da transformação, mesmo quando esta é dada simplesmente como um conjunto de transições.

Suponhamos, por exemplo, que um sistema conte com duas variáveis, x e y, cada qual podendo assumir os valores 0, 1 ou 2, e que seus estados (x, y) comportem-se como segue (os parênteses são omitidos para maior brevidade):

$$\downarrow \begin{array}{ccccccccc} 00 & 01 & 02 & 10 & 11 & 12 & 20 & 21 & 22 \\ 01 & 00 & 11 & 11 & 00 & 21 & 11 & 20 & 11 \end{array}$$

O que sucede com as transições de y? Podemos reclassificá-las, tendo x como parâmetro, representando, *e. g.*, "00 → 01" como "quando $x = 0$, y vai de 0 para 1". Isto fornece a tabela

$$\begin{array}{cc|ccc} & & & y & \\ & \downarrow & 0 & 1 & 2 \\ \hline & 0 & 1 & 0 & 1 \\ x & 1 & 1 & 0 & 1 \\ & 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}$$

Evidencia-se, assim, de pronto que as transições de y não dependem do valor de x. Portanto, x não tem efeito imediato sôbre y.

Agora classifiquemos as transições de x de modo similar. Obtemos:

$$\begin{array}{cc|ccc} & & & x & \\ & \downarrow & 0 & 1 & 2 \\ \hline & 0 & 1 & 1 & 1 \\ y & 1 & 0 & 0 & 2 \\ & 2 & 1 & 2 & 1 \end{array}$$

O que x há de fazer (i. e., a transição de x) *depende* do valor de y, de modo que y tem efeito imediato sôbre x.

Destarte, o diagrama de efeitos imediatos pode deduzir-se de uma afirmação das transições primárias. É, de fato,

$$\boxed{y} \rightarrow \boxed{x}$$

e *provou-se* que y domina x.

Ex.: Um sistema tem três variáveis —x, y, z— cada uma das quais só pode assumir os valores 0 ou 1. Se a transformação fôr

$$\downarrow \begin{array}{cccccccc} 000 & 001 & 010 & 011 & 100 & 101 & 110 & 111 \\ 110 & 111 & 100 & 101 & 110 & 011 & 100 & 001 \end{array}$$

qual é o diagrama dos efeitos imediatos? (Sugestão: Determine primeiro como as transições de z dependem dos valores das outras.)

4. 14. *Redutibilidade.* Na S.4.11 notamos que um sistema global pode consistir de duas partes, cada qual tendo um efeito imediato sôbre a outra

$$\boxed{P} \rightleftarrows \boxed{Q}$$

Vimos também que a ação pode ser apenas em um sentido, caso em que uma parte domina a outra:

$$\boxed{P} \rightarrow \boxed{Q}$$

Nesta hipótese o todo é conectado internamente de um modo menos rico, pois falta agora uma das ações ou canais:

Tal diminuição pode continuar. Podemos encontrar para diagrama dos efeitos imediatos simplesmente

$$\boxed{P} \quad \boxed{Q}$$

de modo que o todo consiste efetivamente de duas partes funcionalmente independentes. Neste caso diremos que o todo é *redutível*. Referir-nos-emos à importância dêste conceito ulteriormente (S.13.21).

Ex.: Dos sistemas do Ex. 4.12.1, quais são redutíveis?

4.15. *Materialidade.* O leitor talvez queira agora testar os métodos dêste capítulo como ajuda para resolver o problema proposto na carta que se segue. Ela justifica a proposição, feita na S.1.2, de que a cibernética não se limita às propriedades encontradas na matéria terrestre, e tampouco deriva delas as suas leis. O importante na cibernética é o âmbito no qual o comportamento observado é regular e reprodutível.

"Graveside"
Wit's End
Haunts. *

Caro amigo

Há algum tempo atrás comprei esta velha casa, mas verifiquei que ela estava assombrada por dois ruídos fantasmagóricos — um Canto dissoluto e um Riso sardônico. Em conseqüência, ela é difìcilmente habitável. Há esperança, todavia, pois através de um teste real descobri que o comportamento de ambos está sujeito a certas leis, obscuras mas infalíveis, e que, tocando o órgão ou queimando incenso, eu posso afetá-los.

A cada minuto, cada ruído é sonoro ou silente — não apresenta graus. O que cada qual irá fazer durante o minuto seguinte depende, na exata maneira que segue, daquilo que aconteceu durante o minuto precedente:

* A tradução das indicações do remetente:
"Junto ao túmulo"
"Fim do juízo"
"Fantasmas"

O Canto, no minuto subseqüente, prosseguirá como era no minuto anterior (sonoro ou silente) a menos que tenha havido execução de órgão sem o Riso, caso em que mudará para o oposto (sonoro para o silente ou vice-versa).

Quanto ao Riso, se houve queima de incenso, então soará ou não se o Canto soou ou não (de modo que o Riso copia o Canto um minuto depois). Se, entretanto, não houve queima de incenso, o Riso fará o oposto *do que o Canto fêz.*

No minuto em que escrevo, tanto o Riso quanto o Canto ressoam. Por favor, diga-me que manipulações de incenso e órgão deverei efetuar a fim de trazer silêncio à casa e mantê-la assim.

(Sugestão: Compare Ex. 4.1.4)

Ex. 2: (Continuação.) Exerce o Canto um efeito imediato sôbre o Riso?

Ex. 3: (Continuação.) Exerce o incenso efeito imediato sôbre o Canto?

Ex. 4: (Continuação.) Deduza o diagrama dos efeitos imediatos desta máquina com entrada (com dois parâmetros e duas variáveis).

O SISTEMA MUITO GRANDE

4.16. Até agora, os sistemas considerados pareciam todos razoàvelmente simples, e se havia admitido que em todos os tempos nós os tínhamos compreendido em todos os pormenores. A Cibernética, todavia, procura estar habilitada a manejar sistemas de complexidade muito maior — máquinas de computar, sistemas nervosos, sociedades. Consideremos, então, como os métodos até agora desenvolvidos são utilizados ou modificados quando o sistema é muito grande.

4.17. O que se entende por seu "tamanho" requer esclarecimento, pois aqui não nos interessa a mera massa. O Sol e a Terra formam apenas um "pequeno" sistema para nós, pois, do ponto de vista astronômico, possuem sòmente doze graus de liberdade. De preferência referimo-nos à complexidade do sistema. Mas o que significa isto aqui? Se o nosso sistema dinâmico fôsse uma família nativa de 5 pessoas, deveríamos encará-la como composta de cinco partes, e portanto, simples, ou como formada de 10^{25} átomos, e portanto muito complexa?

No conceito da cibernética, a "grandeza" de um sistema deve referir-se ao número de *distinções* feitas: quer quanto ao número de estados disponíveis ou, se seus estados são definidos por um vetor, ao número de componentes do vetor (i. e., ao número de suas variáveis ou de seus graus de liberdade, S.7.13). As duas medidas são correlatas, pois, se, outras coisas são iguais, a soma de variáveis extras possibilitará estados extras. Pode-se também ampliar um sistema de nosso ponto de vista funcional se, fixado o número de variáveis, cada qual é medida mais precisamente, de modo que apresente estados mais distinguíveis. Não devemos, entretanto, interessar-nos muito por qualquer medida exata de grandeza em alguma definição particular; devemos antes referir-nos a uma relação entre o sistema e um dado observador definido, que vai tentar estudá-lo ou controlá-lo. No presente livro empregarei as palavras "muito grande" para significar que é dado algum observador definido, com recursos e técnicas definidas, e que o sistema é, de algum modo prático, demasiado grande para êle; de forma que não lhe é permitido observá-lo inteiramente, ou controlá-lo por completo, ou realizar os cálculos para uma previsão total. Em outras palavras, êle diz que o sistema é "muito grande" se de alguma forma êste *o* vence por sua riqueza e complexidade.

Tais sistemas são bastante comuns. Um caso clássico ocorria quando o físico teórico do século XIX tentava usar a mecânica newtoniana para calcular como um gás iria comportar-se. O número de partículas em um volume ordinário de gás é tão imenso que nenhuma observação prática podia registrar o estado do sistema e nenhum cálculo prático podia predizer seu futuro. Tal sistema era "muito grande" em relação aos físicos do século XIX.

O criador de gado defronta-se com um sistema "muito grande" nos genes que procura moldar em nôvo espécime. Seu número e a complexidade de suas interações impossibilitam-lhe o contrôle *detalhado,* na prática.

Semelhantes sistemas, com respeito aos nossos recursos atuais de observação e contrôle, são muito comuns no mundo biológico, e em seus afins sociais e econômicos. São sem dúvida comuns no cérebro, embora por muitos anos a complexidade essencial fôsse objeto apenas de um reconhecimento a contragôsto. Agora, porém, reconhece-se cada vez mais que a referida complexidade não pode continuar ignorada. "Mesmo o mais simples e ínfimo ato de comportamento", declara Lashley, "requer a ação integrada de milhões de neurônios... Cheguei a crer que quase tôda célula nervosa no córtex cerebral é capaz de ser excitada em tôda atividade... Os mesmos neurônios que conservam os traços da memória e participam da revivescência de uma memória encontram-se também envolvidos, em diferentes combinações, em milhares de outras memórias e atos." E von Neumann: "O número de neurônios no sistema nervoso central é algo da ordem de 10^{10}. Não temos absolutamente experiência passada com sistemas dêsse grau de complexidade. Todos os autômatos artificiais feitos pelo homem possuem números de partes que por qualquer contagem esquemática comparável são da ordem de 10^3 a 10^6". (*Mecanismos Cerebrais no Comportamento.*)

4.18. Cabe notar que esta grandeza *per se* não invalida de modo algum os princípios, argumentos e teoremas dos capítulos anteriores. Embora os *exemplos* se limitassem a sistemas com apenas uns poucos estados ou poucas variáveis, tal restrição devia-se sòmente à conveniência do autor e do leitor: os argumentos permanecem válidos sem qualquer restrição quanto ao número de estados ou variáveis no sistema. O método de argumentar a respeito dos estados, em vez de fazê-lo sôbre as variáveis mais comuns, oferece a vantagem específica de dispensar menção explícita ao número de partes do sistema; e teoremas cuja verdade seja provada valem para sistemas de todos os tamanhos (desde que, é claro, os sistemas obedeçam às suposições aventadas no argumento).

O que permanece válido é, naturalmente, a verdade das deduções matemáticas sôbre as coisas *matemàticamente definidas.* O que pode mudar, quando o sistema se torna muito grande, é a aplicabilidade dêstes teoremas a algum sistema material real. A aplicabilidade, todavia, só é discutível em relação a casos particulares. Por ora, portanto, podemos notar que o tamanho em si não invalida os raciocínios utilizados até agora.

4.19. *Acoplamento aleatório.* Suponhamos agora que o observador se defronte com um sistema que, para êle, seja muito grande. Como deve proceder? Surgem muitas questões, demasiadas para serem aqui abordadas em pormenor, de modo que selecionarei apenas alguns tópicos, tomando-os como padrão para o restante. (Veja S.6.19 e o Capítulo 13.) Em primeiro lugar, como especificar o sistema?

Por definição, o observador só pode especificá-lo de maneira incompleta. Isto significa dizer que êle deve especificá-lo "estatìsticamente", pois a estatística é a arte de dizer coisas que se referem apenas a algum aspecto ou porção do todo, sendo a verdade tôda demasiado volumosa para o uso direto. Se apresentar partes por demais numerosas para a sua especificação individual, cumpre especificá-las por um número manuseável de regras, cada uma das quais se aplica a muitas partes. As partes especificadas por uma regra não precisam ser idênticas; em geral, é possível mantê-las admitindo-se que cada regra especifica estatìsticamente um conjunto. Isto significa que a regra especifica uma distribuição de partes e um modo pelo qual suas amostras podem ser classificadas. Os aspectos particulares do resultado individual ficam assim determinados não pelo observador mas pelo processo de amostragem (como duas pessoas entregam uma decisão ao giro de uma moeda).

O mesmo método deve ser usado para especificar o acoplamento. Se esta especificação não fôr completa, é preciso de algum modo suplementá-la, pois, em última análise, alguns acoplamentos individuais e singulares devem efetivamente ocorrer entre as partes. Assim o acoplamento precisa conter um elemento "aleatório". O que significa isto?

Para definir a discussão, suponhamos que um experimentador tenha à sua frente um grande número de caixas idênticas, de natureza elétrica, cada qual com três terminais de entrada e três de saída. Êle deseja formar uma rêde extensa, acoplada "ao acaso", para ver quais serão as suas propriedades. Retira alguns fios de ligação e depois compreende que dizer "acople-os ao acaso" é completamente insuficiente como definição do modo de acoplamento; todos os tipos de "acoplamentos aleatórios" são possíveis. Assim, pode, se houver *n* caixas, marcar 6*n* cartões com números de 1 até 6*n*, marcar de modo similar os terminais, embaralhar os cartões e depois tirar dois cartões para denominar os dois terminais que serão unidos ao primeiro fio. Um segundo par de cartões nomeará os terminais ligados pelo segundo fio; e assim por diante. Será necessário decidir se os dois primeiros cartões tirados devem ser substituídos ou não antes do próximo embaralhamento e tiragem de cartões. A decisão é importante, pois a substituição permite que alguns terminais fiquem sem fios e que outros tenham vários, enquanto a não-substituição obriga que cada terminal tenha um fio e sòmente um. Tal distinção seria provàvelmente significativa, nas características da rêde, e requereria portanto especificação. Além disso, o método que mencionamos tem a propriedade de permitir que uma saída se ligue a uma saída. Se isso fôsse indesejável, deveria ser definido um nôvo método; êste poderia ser: "Marque as entradas de 1 até $3n$ e também as saídas de 1 até $3n$; marque $3n$ cartões com os números de 1 até $3n$; ligue um fio à entrada 1 e tire um cartão para determinar a saída com a qual deve conectá-lo; continue similarmente pelas entradas 2,..., $3n$". Aqui também a substituição de cartões significa que uma saída pode ter várias entradas, ou nenhuma; a falta de substituição daria uma saída para cada entrada.

Provàvelmente já se disse o suficiente para mostrar quão essencial pode ser uma definição acurada do modo de amostragem. Às vêzes, como ao tomar uma amostra de oxigênio para nela estudar as leis dos gases, o experimentador não precisa especificar como obteve a amostra, pois quase tôdas as amostras possuem propriedades similares (embora mesmo aqui possa ser importante a possibilidade de uma definição exata, como Rayleigh e Ramsay verificaram quando algumas espécies de nitrogênio forneceram de modo persistente pesos atômicos diferentes dos outros.)

Não se vá pensar que êste método "estatístico" de especificar um sistema — pela especificação de distribuições com métodos de amostragens — é essencialmente diverso de outros métodos. Inclui o caso de um sistema que é *exatamente* especificado, pois a especificação exata é simplesmente aquela em que cada distribuição míngua até que a sua dispersão seja zero, e na qual, portanto, a "amostragem" conduz a um resultado inevitável. O que *é* nôvo no tocante ao sistema estatístico é que a especificação permite que muitas máquinas, não idênticas, se qualifiquem com fins de inclusão. Poder-se-ia, pois, conceber a "máquina" estatística mais como um conjunto de máquinas do que como uma única máquina. Neste capítulo, entretanto, ignoraremos tal aspecto (será abordado de modo completo no Capítulo 7).

Veremos agora, todavia, que, em certo sentido, é possível a um observador especificar um sistema cuja especificação é demasiado grande para êle! O método, em princípio, é simples: êle deve especificar amplamente, e deve fazê-lo por um método *geral* pelo qual os pormenores sejam especificados por alguma outra fonte que não êle próprio. Nos exemplos acima, a decisão final coube a um pacote de cartões. Assim, pode-se conseguir um sistema final, único, desde que seja *suplementada* a sua especificação. (O tema é mais desenvolvido na S.13.18.)

Ex. 1: Defina um método (usando dados, cartas, números aleatórios, etc.) que venha a proporcionar a transformação T univalente fechada:

$$T: \downarrow \begin{matrix} S_1 & S_2 & S_3 & S_4 & S_5 & S_6 \\ ? & ? & ? & ? & ? & ? \end{matrix}$$

a alguma forma particular, de modo que a forma final particular seja escolhida pelo método e não pelo leitor.

Ex. 2: (Continuação.) Defina um método de modo que a transformação seja um-um mas não restrita de outro lado.

Ex. 3: (Continuação.) Defina um método de modo que nenhum estado de numeração para seja transformado em estado de numeração ímpar.

Ex. 4: (Continuação.) Defina um método de modo que qualquer estado de numeração par seja transformado em estado de nunúmero.

Ex. 5: Defina um método que imite a rêde que se obteria se fôssem acopladas partes pela seguinte regra: Em duas dimensões, com as partes colocadas em um padrão regular como êste:

$$\begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

e estendidas indefinidamente em tôdas as direções no plano, cada parte tem ou não um efeito imediato sôbre os seus vizinhos diretamente acima, com igual probabilidade; similarmente para seus três vizinhos à direita, à esquerda e abaixo. Construa uma rêde de amostra.

4.20. *Riqueza de conexão.* O sistema mais simples de grandeza dada é aquêle cujas partes são tôdas idênticas, meras réplicas umas das outras, e entre cujas partes os acoplamentos são de grau zero (e.g. Ex. 4.1.6). Tais partes são de fato independentes entre si, o que torna o todo um "sistema" apenas no sentido nominal, pois é totalmente redutível. No entanto, êste tipo de sistema deve ser considerado sèriamente pois proporciona uma importante forma básica a partir da qual é possível efetuar modificações de vários modos. Exemplos aproximados de semelhante tipo de sistema são os gases, cujos átomos só colidem raramente, os neurônios no córtex profundamente narcotizado (se pudermos admitir que são aproximadamente similares entre si) e espécies de animais quando a densidade de população é tão baixa que dificilmente êles se encontram ou competem. Na maior parte dos casos as propriedades dêste tipo básico de sistema são positivamente de fácil dedução.

A primeira modificação a ser considerada é òbviamente aquela que permite uma pequena quantidade de acoplamento entre as partes, de modo que alguma coerência seja introduzida no todo. Suponhamos então que, no diagrama dos efeitos imediatos do sistema, sejam aditadas algumas ações, i. é., algumas setas, mas apenas o suficiente para dar coerência ao conjunto de partes. O menor número possível de setas, se houver n partes, será $n - 1$; mas isto fornece sòmente uma simples cadeia longa. Ocorreria uma pequena quantidade de acoplamento se o número de setas fôsse um pouco mais que isso, mas não chegasse a $n^2 - n$ (o que daria a cada parte um efeito imediato sôbre tôdas as outras partes).

A pequenez da quantidade de interação pode assim dever-se à pequenez no número de efeitos imediatos. Outro modo, importante devido ao seu caráter comum, ocorre quando uma parte ou variável afeta uma outra apenas sob certas condições, de modo que o efeito imediato se faça presente durante muito tempo apenas em um sentido nominal. Tais acoplamentos temporários e condicionais acontecem se a variável, por qualquer razão, gasta apreciável proporção de seu tempo sem variar (a "função de partes"). Uma causa comum dêsse fato é a existência de um limiar, de modo que a variável não apresente modificação exceto quando o distúrbio entrante excede algum valor definido. Dêsse tipo são a voltagem abaixo da qual um arco voltaico não ultrapassa um certo intervalo, e o prejuízo que um cidadão suportará antes de julgar que vale a pena recorrer à lei. No sistema nervoso, o fenômeno do limiar é, de fato, onipresente.

A existência de limiar induz um estado de coisas que podemos encarar como um corte do todo em sistemas isolados temporàriamente; pois uma variável, na medida em que permanece constante, não pode, por S.4.12, atuar sôbre outra; tampouco pode ser afetada por outra. No diagrama dos efeitos imediatos perderá tanto as setas que dela partem como as que a ela se dirigem. Na Fig. 4.20.1 a ação é apresentada em diagrama.

O quadrado da esquerda apresenta um rêde básica, um diagrama de efeitos imediatos, como o método do Ex. 4.19.5 poderia produzir. O quadrado do meio mostra o que restaria se trinta por cento das variáveis permanecessem constantes (pelo fato de os distúrbios entrantes estarem abaixo do limiar). O quadrado da direita mostra o que sobra se a proporção constante subir para cincoenta por cento. Tais

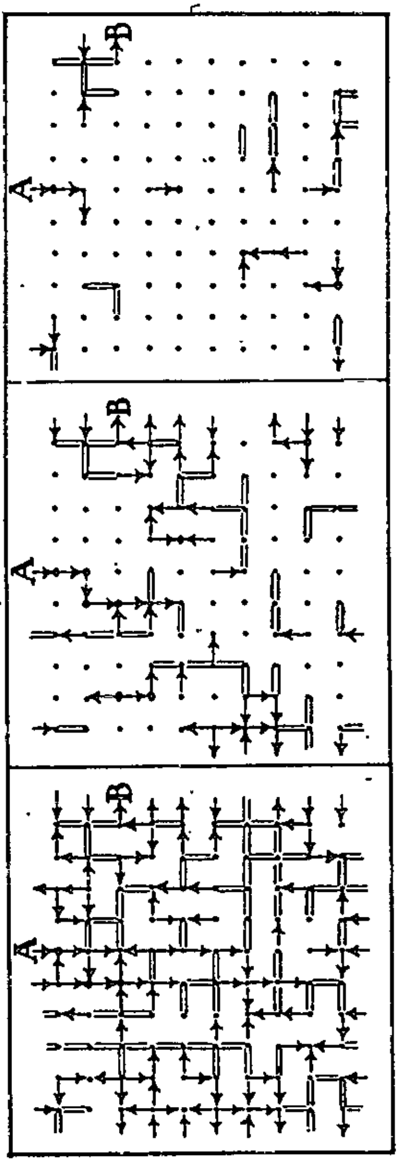


Fig. 4.20.1

variações, da esquerda para a direita, podem ser induzidas por um limiar crescente. Veremos que os subsistemas que reagem tendem a tornar-se cada vez menores, tendo o limiar crescente o efeito de, funcionalmente, cortar tôda a rêde em partes cada vez menores.

Destarte, existem fatôres, como a "altura do limiar" ou "proporção das variáveis constantes", que podem alterar continuamente um sistema grande ao longo de todo o intervalo que possui, em um extremo, a forma totalmente unida, na qual cada variável tem um efeito imediato sôbre tôdas as outras variáveis, e, no outro, a forma totalmente desunida, na qual cada variável é independente de outra qualquer. Assim, os sistemas podem apresentar mais ou menos "completude". O grau pode, portanto, ser estatìsticamente especificável, mesmo que o sistema seja demasiado grande para a especificação individual dos pormenores.

Ex.: Pode um distúrbio em *A* (Fig. 4.20.1) afetar *B* no sistema da esquerda? E nos outros dois?

4.21. *Propriedades locais.* Sistemas grandes com muita repetição nas partes, poucos efeitos imediatos e acoplamentos frouxos, podem comumente apresentar alguma propriedade numa forma *localizada,* de modo que ela ocorre apenas em umas poucas variáveis e que sua ocorrência (ou não) nas raras variáveis não determina se a mesma propriedade pode ou não ocorrer em outros conjuntos de poucas variáveis. Tais propriedades localizáveis são habitualmente de grande importância em tais sistemas, e o restante dêste capítulo será dedicado à sua consideração. Eis aqui alguns exemplos:

Na química elementar — a reação do nitrato de prata em solução com o cloreto de sódio, por exemplo — as partes componentes atingem em número cêrca de 10^{22}, constituindo assim um sistema muito grande. As partes (átomos, íons etc.) são largamente repetitivas, pois consistem de apenas um dúzia ou mais de tipos. Além disso, cada parte exerce um efeito imediato apenas sôbre uma pequena fração da totalidade de partes. Assim, o acoplamento (ou não) de um íon de prata com um íon cloreto não afeta a grande maioria de outros pares de íons. O resultado é que a propriedade "acoplada para formar AgCl" pode existir repetidas vêzes e em forma reconhecível através de todo o sistema. Comparemos essa possibilidade de repetição com o que sucede em um sistema bem acoplado, em um termostato, por exemplo. No termostato, semelhante propriedade localizada dificilmente pode existir, e decerto não pode repetir-se de modo independente algures no sistema; pois a existência de qualquer propriedade em um ponto é decisiva na determinação do que deverá ocorrer em outros pontos.

A mudança da química de solução em um tubo de ensaio para a do protoplasma é provàvelmente do mesmo tipo, sendo o protoplasma, enquanto sistema químico dinâmico, interconectado em suas partes de maneira demasiado rica para permitir muita independência local na ocorrência de alguma propriedade.

Outro exemplo é fornecido pelo próprio mundo biológico, encarado como um sistema de muitas partes. Tal sistema, composto em última análise de átomos da superfície terrestre, é feito de partes grandemente repetitivas, tanto num baixo nível no qual todos os átomos de carbono são quìmicamente similares, como num alto nível no qual todos os membros de uma espécie são mais ou menos parecidos. Nesse sistema as várias propriedades, se existirem em um lugar, podem também existir em outros lugares. Segue-se que as propriedades básicas do mundo biológico serão dos tipos que descreveremos nas seções subseqüentes.

4.22. *Propriedades de autofechamento.* Êsses sistemas têm uma propriedade geral, qual seja o seu comportamento no tempo é muito afetado pelo fato de poderem ou não desenvolver, em seu interior, propriedades tais que a propriedade, uma vez desenvolvida, torna-se inacessível aos fatôres que poderiam "subdesenvolvê-la". Consideremos, por exemplo, uma colônia de ostras. Cada ostra pode livremente receber sinais de perigo e fechar-se; uma vez fechada, todavia, não pode receber os sinais de segurança que a reabririam. Fôssem êsses os únicos fatôres em ação, poderíamos prever que em certo instante a colônia de ostras passaria inteiramente à condição fechada — um fato relevante na história da colônia!

Em muitos outros sistemas, o mesmo princípio pode ser observado mais sèriamente, e em quase todos é importante. Consideremos, por exemplo, uma solução de moléculas reagentes capazes de formar vários compostos, alguns dos quais podem reagir de nôvo mas sendo um dêles insolúvel, de modo que as moléculas nesta forma sejam não-reativas. A propriedade de "ser o composto insolúvel" é agora aquela que pode ser tomada parte após parte, mas que, depois da insolubilidade haver retirado a substância de solução, não é reversível. A existência desta propriedade é decisiva na história do sistema, fato bem conhecido na química, onde possui inúmeras aplicações.

Muito pouco se conhece sôbre a dinâmica do córtex cerebral para que estejamos aptos a falar muito sôbre o que aí acontece. Podemos todavia verificar que, se as células nervosas pertencem apenas a alguns poucos tipos, e se os efeitos imediatos entre elas são esparsos, portanto se pode existir entre elas qualquer propriedade de "autofechamento", é quase certo que seja relevante — que desempenhe uma parte essencial na determinação do comportamento do córtex, especialmente quando êste perdura durante muito tempo. Tal ocorreria, por exemplo, se as células tivessem alguma probabilidade de penetrar em circuitos cerrados que reverberassem com demasiada fôrça para que fôssem suprimidos por inibição. Outras possibilidades merecem sem dúvida consideração. Aqui nos é dado apenas olhá-las de passagem.

O mesmo princípio também se aplicaria a um sistema econômico se os operários de alguma indústria desagradável ficassem desempregados de tempos em tempos, e durante sua ausência descobrissem a existência de formas mais agradáveis de emprêgo à sua disposição. O fato de passarem ràpidamente duma indústria desagradável para a agradável, mas de recusarem a volta, seria por certo questão de alta importância no futuro da indústria.

Em geral, portanto, as mudanças que implicam o autofechamento são comumente da maior relevância na determinação do estado eventual do sistema.

4.23. *Propriedades que procriam.* Cumpre notar que na seção anterior consideramos, em cada exemplo, dois sistemas diferentes. Pois, embora cada exemplo fôsse baseado apenas em uma entidade material, usamo-lo para proporcionar dois conjuntos de variáveis, e êstes conjuntos formam, pela S.3.11, dois sistemas. O primeiro era o sistema óbvio, muito grande em número, provido pelas partes; o segundo, o sistema com uma variável: "*número* de partes que apresentam a propriedade". Os exemplos exibiam casos onde a referida variável não podia diminuir com o tempo. Em outros têrmos, comportava-se conforme a transformação (se o número é *n*):

Esta transformação é uma das várias que podemos encontrar quando consideramos as variações do segundo sistema (número de partes que apresentam a propriedade). Acontece amiúde que a existência da propriedade em algum lugar do sistema afeta a probabilidade de que ela exista, um intervalo de tempo mais tarde, em outro lugar. Assim, se o sistema básico consistir de um rastilho de pólvora ao longo de uma linha de trinta centímetros de comprimento, a existência da propriedade "estar em fogo" agora no décimo centímetro torna altamente provável que, um intervalo mais tarde, a mesma propriedade valha no nono e no undécimo centímetros. Mais uma vez, se um carro tem uma aparência atraente, a sua venda a uma casa aumentará provàvelmente a possibilidade de sua venda a casas vizinhas. Se uma espécie tem carência de alimento, a existência de um membro diminui a probabilidade da existência contínua ulterior de outro membro.

Às vêzes êstes efeitos são de grande complexidade; outras vêzes, entretanto, cada mudança da variável "número dotado da propriedade" pode expressar-se muito bem pela simples transformação $n' = kn$, onde k é positivo e independente de n.

Quando é assim, a história do sistema depende amiúde agudamente do valor de k, sobretudo em sua relação com $+ 1$. A equação tem como solução, se t mede o número de intervalos de tempo que decorreu desde $t = 0$, e se n_0 é o valor inicial:

$$n = n_0 e^{(k-1)t}$$

Três casos são discerníveis.

1) $k < 1$. Neste caso o número que apresenta a propriedade cai regularmente e a densidade das partes dotadas da propriedade decresce. É mostrado, por exemplo, numa peça de pechblenda, pelo número de átomos de rádio. Surge também pelo número em uma espécie quando ela tende a extinguir-se.

2) $k = 1$. Neste caso o número tende a permanecer constante. Um exemplo é dado pelo número de moléculas dissociadas quando a porcentagem dissociada se encontra no valor de equilíbrio para as condições de obtenção. (Uma vez que o mais ligeiro desvio de k de 1 conduzirá o sistema a um dos dois outros casos, êle é de pouco interêsse.)

3) $k > 1$. Êste caso é de grande interêsse e profunda importância. A presença da propriedade aumenta a proba-

bilidade de sua ocorrência algures. A propriedade "procria", e o sistema é, neste particular, potencialmente explosivo, seja de forma dramática, como na bomba atômica, seja de forma insidiosa, como numa epidemia que se alastra. Assim, se o etilacetato foi misturado com água, a probabilidade de que uma molécula particular de etilacetato se converta, no próximo intervalo, em água e ácido acético dependerá de quantas moléculas de acetato já tenham a propriedade de estar em forma ácida. Outros exemplos se configuram comumente na combustão, na difusão de uma moda, no aumento de uma avalanche e na procriação de coelhos.

É neste ponto que o majestoso desenvolvimento da vida através da evolução darwiniana mostra sua relação com a teoria aqui formulada dos sistemas dinâmicos. O mundo biológico, como notamos na S.4.21, é um sistema com algo semelhante à homogeneidade e à paucidade dos efeitos imediatos considerados no presente capítulo. Nos primórdios do mundo existiam diversas propriedades com diversos k. Em algumas k era menor do que 1 — desapareceram de maneira regular. Em algumas k era igual a 1 — poderiam permanecer. E havia aquelas onde k era maior do que 1 — desenvolveram-se como uma avalanche, entraram em conflito entre si, encetaram a interação que chamamos "competição" e geraram um processo que dominou todos os outros eventos no mundo e que ainda prossegue.

Desconhece-se se tais propriedades, onde k é maior do que 1, existem ou podem existir no córtex cerebral. Podemos estar certos, porém, de que se existem serão importantes, impondo características salientes no comportamento do córtex. Vale assinalar que esta previsão pode efetuar-se sem qualquer referência aos pormenores particulares do que acontece no cérebro dos mamíferos, pois é verdade em todos os sistemas do tipo descrito.

4.24. As observações feitas nas últimas seções só podem ilustrar, do modo mais sumário, as principais propriedades do sistema muito grande. Já se disse o suficiente, todavia, para evidenciar que o sistema muito grande não é inteiramente diverso dos abordados nos capítulos iniciais, e para mostrar que a construção de uma teoria realmente adequada dos sistemas em geral é mais uma questão de tempo e trabalho do que de qualquer dificuldade profunda ou peculiar.

A questão do sistema muito grande será retomada novamente na S.6.14.

Estabilidade

5

5.1. A palavra "estabilidade" tende a surgir com freqüência nas discussões sôbre máquinas, mas nem sempre é usada com precisão. Bellman refere-se a ela como "... estabilidade, esta tão sobrecarregada palavra com uma definição não-estabilizada". Como as idéias subjacentes ao têrmo são de grande importância prática examinaremos o assunto com algum cuidado, distinguindo os vários tipos que ocorrem.

A terminologia atual é insatisfatória e confusa; não tentarei estabelecer outra melhor. Chamarei antes a atenção para os fatos efetivos aos quais se aplicam os diferentes têrmos, de modo que o leitor tenderá a pensar antes nos fatos do que nas palavras. No que tange aos têrmos usados, tentarei apenas não cometer violência contra os usos estabelecidos, e manter coerência dentro do livro. Cada palavra utilizada será cuidadosamente definida, e nos manteremos adstritos ao sentido definido.

5.2. *Invariante.* Através de todos os significados corre a idéia básica de um "invariante": de que, embora o sistema atravesse uma série de modificaçeõs, há algum aspecto que não muda; destarte, pode-se fazer alguma afirmação que, a despeito da incessante mudança, é imutàvelmente verdadeira. Assim, se tomarmos um cubo que repousa sôbre uma face e o inclinarmos de 5 graus e o largarmos, seguir-se-á tôda uma série de modificações de posição. Uma proposição do tipo "está inclinado de 1°" pode ser verdadeira em um instante mas falsa no próximo. De outro lado, a proposição "sua inclinação não excede de 6°" continua permanentemente verdadeira. Esta verdade é invariante para o sistema. Consideremos a seguir um cone apoiado em seu vértice e soltemo-lo, como fizemos com o cubo, a partir de uma inclinação de 5°". A proposição "sua inclinação não excede de 6°" logo torna-se falsa e (se excluirmos a referência a outros aspectos) do mesmo modo as proposições com limites mais amplos. Esta incapacidade de pôr um limite aos estados do sistema ao longo de uma trajetória corresponde à "instabilidade".

Tais são as idéias básicas. Para evitar qualquer ambigüidade, devemos remontar aos primeiros princípios.

5.3. *Estado de equilíbrio.* O caso mais simples ocorre quando um estado e uma transformação se relacionam de tal modo que a transformação não causa mudança ao estado. Algèbricamente, isto ocorre quando $T(x) = x$. Assim se T fôr

$$T: \downarrow \begin{matrix} a & b & c & d & e & f & g & h \\ d & b & h & a & e & f & b & e \end{matrix}$$

como $T(b) = b$, então o estado b é um **estado de equilíbrio** sob T. Do mesmo modo o são e e f.

Se os estados forem definidos por vetores, neste caso, para que um vetor permaneça inalterado, cada componente deve permanecer inalterada (segundo S.3.5). Assim, se o estado fôr o vetor (xy), e a transformação fôr

$$U: \quad \begin{cases} x' = 2x - y + 2 \\ y' = x + y + 3 \end{cases}$$

então, a um estado de equilíbrio (x', y') deve ser igual a $(x'\ y)$, e os valores de x e y precisam satisfazer as equações

$$\begin{cases} x = 2x - y + 2 \\ y = x + y + 3 \end{cases}$$

i. e.

$$\begin{cases} x - y = -2 \\ x = -3 \end{cases}$$

Destarte, o sistema em aprêço possui apenas um estado de equilíbrio, em $(-3, -1)$. Não fôssem lineares as equações, poderia haver maior número.

Exatamente o mesmo estado, sem dúvida, é obtido mediante o fáto de que em um estado de equilíbrio cada mudança de componente tem de ser zero, dando $x' - x = 0$, $y' - y = 0$; o que leva às mesmas equações anteriores.

Se as equações se apresentarem em forma diferencial, então a proposição segundo a qual x é inalterável com o tempo equivale a afirmar que dx/dt tem de ser zero. Assim no sistema

$$dx/dt = 2x - y^2$$
$$dy/dt = xy - \tfrac{1}{2}$$

o estado (1/2, 1) é de equilíbrio, pois quando x e y possuem êsses valores tôdas as derivadas tornam-se zero, isto é, o sistema cessa de mover-se.

Ex. 1: Verificar que U transforma $(-3, -1)$ em $(-3, -1)$.

Ex. 2: Apresenta o sistema (o do último parágrafo) qualquer estado de equilíbrio diferente de (1/2,1)?

Ex. 3: Determine todos os estados de equilíbrio da transformação:
$$x' = e^{-y} \operatorname{sen} x, \qquad y' = x^2$$

Ex. 4: Determine todos os estados de equilíbrio da transformação:
$$dx/dt = e^{-y} \operatorname{sen} x, \quad dy/dt = x^2$$

Ex. 5: Se $x' = 2x - y + j$, $y' = x + y + k$, procure valores para j e k, de modo a obter um estado de equilíbrio em (1,1). (Sugestão: Modifique primeiro as equações de modo a representar o estado de equilíbrio.)

Ex. 6: Se $T(b) = b$, devem também $T^2(b)$, $T^3(b)$, etc., serem iguais a b?

Ex. 7: Pode um sistema absoluto ter mais estados de equilíbrio do que bacias?

Ex. 8: Qual é a aparência característica do gráfico cinemático de uma transformação cujos estados estão todos em equilíbrio?

Ex. 9: (Continuação.) Que nome especial recebeu semelhante transformação em capítulo anterior?

Ex. 10: Se a transformação fôr alterada (permanecendo igual o conjunto de operandos) os estados de equilíbrio também mudarão?

Ex. 11: Se a entrada de uma máquina mudar, mudarão seus estados de equilíbrio? (Sugestão: Ver *Ex.* 5.)

5.4. *Ciclo.* Aos estados de equilíbrio relaciona-se o **ciclo**, isto é, uma seqüência de estados tal que a repetida aplicação da transformação leva o ponto representativo repetidamente em tôrno da seqüência. Assim, se T fôr

$$T: \downarrow \begin{matrix} a & b & c & d & e & f & g & h \\ c & h & b & h & a & c & c & g \end{matrix}$$

então, de a, T gera a trajetória

$$a\ c\ b\ h\ g\ c\ b\ h\ g\ c\ b \ldots$$

e o ponto representativo atravessa repetidamente o ciclo

$$\begin{array}{ccc} c & \rightarrow & b \\ \uparrow & & \downarrow \\ g & \leftarrow & h \end{array}$$

Ex. 1: Escrever uma transformação que contenha dois ciclos distintos e três estados de equilíbrio.

Ex. 2: (Continuação.) Trace seu gráfico cinemático.

Ex. 3: Pode um estado de equilíbrio ocorrer em um ciclo?

Ex. 4: Pode um sistema absoluto possuir mais ciclos do que bacias?

Ex. 5: Pode uma bacia conter 2 ciclos?

**Ex.* 6: Tem o sistema $dx/dt = y$, $dy/dt = -x$ um ciclo?

**Ex.* 7: Se a transformação possuir um número finito de estados e fôr fechada e univalente, poderá uma trajetória terminar de qualquer outra maneira exceto em um estado de equilíbrio ou em um ciclo?

5.5. *Região estável.* Se a fôr um estado de equilíbrio, $T(a)$ será, como vimos na S.5.3, simplesmente a. Assim, a operação de T sôbre a não gerou nenhum estado *nôvo.*

O mesmo fenômeno pode ocorrer com um conjunto de estados. Assim, suponhamos que T seja a transformação (não-fechada)

$$T: \downarrow \begin{matrix} a & b & c & d & e & f & g & h \\ p & g & b & f & a & a & b & m \end{matrix}$$

Ela não tem estado de equilíbrio; mas o conjunto composto de b e g possui a peculiaridade de se transformar assim

$$T: \downarrow \begin{matrix} b & g \\ g & b \end{matrix}$$

i.e., a operação de T sôbre êste conjunto não gerou nenhum estado *nôvo.* Semelhante conjunto é estável com respeito a T.

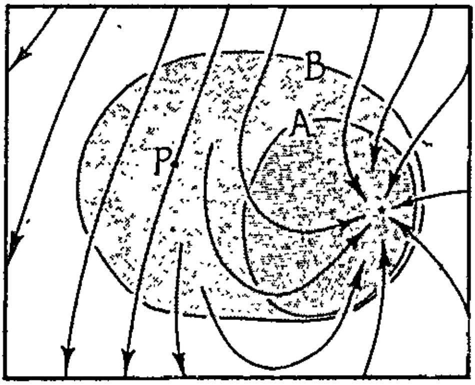


Fig. 5.5.1

Esta relação entre um conjunto de estados e uma transformação é, naturalmente, idêntica à descrita antes (S.2.4) como "fechamento". (As palavras "conjunto estável" poderiam ter sido utilizadas dali por diante, mas havia o risco de que causassem confusão antes de esclarecido o conceito de estabilidade; e isto era inviável até que outros assuntos fôssem explicados primeiro.)

Se a transformação fôr contínua, é possível que o conjunto de estados esteja em uma região conexa. Assim, na Fig. 5.5.1, a região dentro do limite *A* é estável; mas a que se encontra no âmbito de *B* não o é, pois há pontos dentro da região, tais como *P*, que são tomados fora da região.

O conceito de fechamento, de um conjunto estável de estados, é de importância fundamental em nossos estudos. Algumas razões foram apresentadas na S.3.2, onde indicamos que sòmente quando o conjunto é estável a transformação pode alcançar irrestritamente as suas potências mais altas.

Outra razão é discutida de modo mais completo na S.10.4, onde fica evidenciado que semelhante estabilidade se relaciona ìntimamente com a idéia de alguma entidade que "sobreviva" a certa operação.

Ex. 1: Que outros conjuntos são estáveis com respeito a *T*?

Ex. 2: É o conjunto de estados em uma bacia sempre estável?

Ex. 3: É o conjunto de estados em um ciclo sempre estável?

Ex. 4: Se um conjunto de estados é estável sob *T*, bem como sob *U*, será êle necessàriamente estável sob *UT*?

PERTURBAÇÃO

5.6. Nos casos até agora considerados, o equilíbrio ou estabilidade têm sido examinados apenas no estado ou estados particulares em jôgo. Nada foi dito, ou sugerido, quanto ao comportamento dos estados *adjacentes.*

Os exemplos elementares de equilíbrio — cubo apoiado numa face, bola de bilhar sôbre uma mesa, e um cone equilibrado juntamente em seu vértice — mostram todos êles um estado de equilíbrio. No entanto, o cone é sem dúvida diferente, e de um modo relevante, do cubo. A diferença aparece tão logo os dois sistemas são *deslocados* por perturbação de seus estados de equilíbrio para um estado vizinho. Como há de ser representado em geral êste deslocamento e seu resultado?

Uma "perturbação" é simplesmente aquilo que desloca, que move um sistema de um estado a outro. Assim, se definida acuradamente, será representada por uma transformação cujos operandos são os estados do sistema. Suponhamos agora que o nosso sistema sofra a transformação T, que a seja um estado de equilíbrio sob T, e que D seja um dado operador-deslocamento. Em linguagem clara, dizemos: "Desloque o sistema de seu estado de equilíbrio, deixe que o sistema siga suas próprias leis por algum tempo e veja se o sistema volta ou não ao mesmo estado". Na forma algébrica, partimos de um estado de equilíbrio a, deslocamos o sistema para o estado $D(a)$ e a seguir determinamos $TD(a)$, $T^2D(a)$, $T^3D(a)$, e assim por diante; e verificamos se essa sucessão de estados termina ou não como $a, a, a, \ldots$ De um modo mais compacto: o estado de equilíbrio a no sistema com transformação T é **estável sob o deslocamento D** se sòmente se

$$\lim_{n \to \infty} T^n D(a) = a.$$

Tentemos aplicar a formulação aos três exemplos-padrão. Com o cubo, a é o estado cujo ângulo de inclinação $= 0°$, D desloca para, digamos, 5°; e T eventualmente o traz de volta para 0°. Com o cone (objeto da transformação U, digamos) D pode ser o mesmo deslocamento, mas o limite, seja qual fôr, de U^nD (a) não será certamento uma inclinação de 0°; o equilíbrio é **instável.** Com a bola de bilhar, na posição a, as leis dinâmicas não a trarão de volta a *a* após o deslocamento, de modo que não é estável segundo a definição dada aqui. Apresenta a peculiaridade, porém, de o limite ser *D (a)*; i. e., retém o deslocamento, sem anulá-lo nem exagerá-lo. Tal é o caso do equilíbrio **neutro.**

(Cumpre notar que o estudo do que acontece depois de deslocado o sistema a partir de *a* só vale a pena se *a* fôr um estado de equilíbrio.)

Ex. 1: É o estado de equilíbrio *c* estável para *T* sob o deslocamento *D* se *T* e *D* forem dados por:

$$\begin{array}{c|ccccc} T\downarrow & a & b & c & d & e \\ & c & d & c & a & e \\ D & b & a & d & e & d \end{array}$$

Ex. 2: (Continuação.) O que acontece se o estado de equilíbrio fôr *e*?

Ex. 3: A região composta pelo conjunto de estados *b*, *c* e *d* é estável sob *U*:

$$\begin{array}{c|cccccc} U\downarrow & a & b & c & d & e & f \\ & d & c & b & b & c & a \\ E & b & e & f & f & f & d \end{array}$$

Qual o efeito do deslocamento *E*, seguido pela ação repetida de *U*? (Sugestão: Considere as três possibilidades.)

5.7. Quando o sistema dinâmico pode variar continuamente, sofre, em geral, na prática a atuação incessante de pequenas perturbações. Os sistemas eletrônicos perturbam-se por agitação térmica, os mecânicos, por vibração e os biológicos, por uma multidão de perturbações menores. Daí por que os únicos estados de equilíbrio que podem permanecer ocupados são os estáveis no sentido da seção anterior. Os estados de equilíbrio instável são de pequena importância prática no sistema contínuo (embora possam ser de importância no sistema cuja mudança só se dá por salto discreto).

O conceito de equilíbrio instável é, entretanto, de certa importância teórica. Pois, se estamos trabalhando com a *teoria* de algum mecanismo, as manipulações algébricas (S.5.3) nos proporcionarão *todos* os estados de equilíbrio — estável, neutro e instável — e talvez seja necessário eliminar um bocado se o conjunto tiver de ser reduzido ao conjunto daqueles estados que têm real probabilidade de persistência.

Ex.: Construa uma transformação com dois estados de equilíbrio, *a* e *b*, e duas perturbações, *D* e *E*, de modo que *a* seja estável para *D* mas não para *E*, e *b* seja estável para *E* mas não para *D*.

5.8. Em geral, os resultados da aplicação repetida de uma transformação a um estado dependem do que é o estado. O resultado do teste para determinar qual é o

$$\lim_{n \to \infty} T^n(x)$$

dependerá assim, em geral, do estado em que esteja x. Nestes têrmos, se houver duas perturbações disponíveis, D e E, e D levar a para b, enquanto E levar a para c (sem que haja qualquer ordem implicada entre a, b e c) os limites de $T^nD\,(a)$ e $T^nE\,(a)$ podem ser diferentes.

Destarte, o resultado de uma prova de estabilidade, desenvolvida à maneira da S.5.6, pode fornecer resultados diversos conforme o deslocamento seja D ou E. A distinção não é de maneira alguma desarrazoada do ponto de vista físico. Assim, um lápis, equilibrado em sua base quadrada, pode ser estável para D, se D fôr um deslocamento de 1° da vertical, mas instável para E, se E fôr um deslocamento de 5°.

A representação dada na S.5.6 concorda, pois, com a prática comum. Pode-se considerar um sistema em equilíbrio estável tão-sòmente se fôr especificado algum conjunto suficientemente definido de deslocamentos D. Caso a especificação seja explícita, então D estará plenamente definido. Muitas vêzes D não é dado de maneira explícita, mas é subentendido; assim, se um circuito de rádio é dito "estável", entende-se que D se refere a qualquer das flutuações de voltagem que sucedem comumente, mas o entendimento usual excluiria o relâmpago. Com freqüência considera-se o sistema estável desde que a perturbação se encontre em certo intervalo. O que importa aqui é que nos casos incomuns, nos sistemas biológicos, por exemplo, talvez seja necessário a especificação precisa das perturbações D e do estado de equilíbrio em discussão a, se é que a discussão deve apresentar exatidão.

5.9. *O sistema contínuo.* Nas seções anteriores, os estados considerados eram em geral arbitrários. Os sistemas reais, contudo, denotam amiúde alguma continuidade, de forma que os estados têm entre si o relacionamento natural (inteiramente à parte de qualquer transformação imposta por sua pertinência a um transdutor) pelo qual dois estados podem estar "perto" ou "longe" um do outro.

Com tais sistemas, e um estado de equilíbrio *a, D* é costumeiramente definido como um deslocamento de *a*, para um dos estados "próximos" *a*. Se os estados são definidos por vetores com componentes numéricas, isto é, baseados em medidas, *D* então exerce muitas vêzes o efeito de adicionar pequenas quantidades numéricas δ_1, δ_2, . . ., δ_n às componentes, de modo que o vetor $(x_1' \ldots x_n)$ se torna o vetor $(x_1 + \delta_1, \ldots x_n + \delta_n)$.

Dessa forma, tornam-se possíveis provas de estabilidade mais especializadas. Uma introdução ao tema foi dado em *Design for a Brain.* O assunto torna-se logo algo matemático; aqui basta notar que tais questões são *sempre* passíveis de resposta, pelo menos em princípio, mediante o processo de observar realmente as mudanças enquanto o sistema se move sucessivamente através dos estados $D(a)$, $TD(a)$, $T^2D(a)$ etc. (Compare S.3.9.) A única objeção a êsse método simples, fundamental e seguro é que êle tende a tornar-se extraordinàriamente trabalhoso em casos complicados. Está em condições, todavia, de dar uma resposta em casos aos quais são inaplicáveis métodos mais especializados. No material biológico, os métodos descritos no presente capítulo podem provàvelmente mostrar-se mais úteis do que os mais especializados; pois os últimos são muitas vêzes sòmente aplicáveis quando o sistema é contínuo e linear, ao passo que os métodos dêste capítulo são aplicáveis sempre.

Um caso particularmente simples e bem conhecido ocorre quando o sistema consiste de partes entre as quais há realimentação, e quando êste tem a forma muito simples de um único lupe. Um simples teste de estabilidade (de um assumido estado de equilíbrio) deve considerar a seqüência de mudanças que sucede a um pequeno deslocamento, quando êste percorre o lupe. Se o deslocamento por fim retorna ao lugar de origem com tamanho e sinal tais que, quando somados algèbricamente ao deslocamento inicial, êste se apresenta diminuído, isto é, mais próximo do estado de equilíbrio, então o sistema, em tôrno daquele estado de equilíbrio, é (em geral) estável. A realimentação, nesta hipótese, é dita "negativa" (pois causa uma eventual *subtração* do deslocamento inicial).

A prova é simples e conveniente, podendo, muitas vêzes, ser efetuada mentalmente; mas em presença de qualquer complicação torna-se insegura se fôr realizada da forma simples acima descrita. A próxima seção proporciona um exemplo de um modo pelo qual a regra pode ruir se aplicada grosseiramente.

Ex. 1: Identifique *a*, *D* e *T* no *Ex.* 3.6.17. Êste sistema é estável para êsse deslocamento?

Ex. 2: (Continuação.) Contraste com o *Ex.* 3.6.19.

Ex. 3: Identifique *a* e *T* no *Ex.* 2.14.11. Será estável se D fôr qualquer deslocamento de *a*?

Ex. 4: Pegue um trem de brinquedo (dêsses que correm sôbre o assoalho e não sôbre trilhos) e ponha a linha de vagões ligeiramente fora de linha. Seja *M* o conjunto de estados em que os desvios da reta não excedem em parte alguma de 5°. Seja *T* a operação de puxá-lo efetuada pela locomotiva. Será *M* estável sob *T*?

Ex. 5: (Continuação.) Seja *U* a operação da locomotiva de reconduzir o trem de volta. Será *M* estável sob *U*?

Ex. 6: Por que as locomotivas encabeçam os trens?

Ex. 7: Um serviço de ônibus começa com seus veículos igualmente espacejados ao longo da estrada. Se um ônibus está atrasado, passageiros extras se aglomeram nos pontos de parada, de modo que o ônibus precisa recolher e soltar maior número de passageiros do que de hábito. O veículo que o segue, estando mais perto do que de costume, tem menos passageiros e se atrasa menos que o usual. São as irregularidades do espacejamento autocorretoras ou auto-agravantes?

Ex. 8: O que aconteceria se um aumento de dióxido de carbono no sangue tornasse o centro respiratório *menos* ativo?

Ex. 9: Será o sistema $x' = 1/2y$, $y' = 1/2\ x$ estável em tôrno de (0,0)?

5.10. *Realimentação positiva.* O sistema descrito no último exercício merece atenção mais estrita.

De (10,10) passa para (5,5)

De (10,12) passa para (6,5)

de modo que um aumento em y (de 10 para 12) provoca um aumento em x (de 5 para 6). (Compare S.4.13.) Da mesma forma,

de (10,10) passa para (5,5)

de (12,10) passa para (5,6)

de modo que um aumento em x (de 10 para 12) conduz a um aumento em y (de 5 para 6). Cada variável exerce assim um efeito *positivo* sôbre a outra e, se o sistema fôsse discutido em palavras corriqueiras, tais fatos poderiam ser usados a fim de "provar" que êle é instável, pois parece estar em um círculo vicioso.

O comportamento do sistema, pela reconversão para (0,0), declara incontestàvelmente que o sistema é estável em tôrno dêste estado de equilíbrio. Mostra com clareza que os argumentos baseados em algum caminho mais curto, e.g., pela demonstração de que a realimentação é positiva, talvez não sejam de confiança. (Mostra também que pode ser positiva e no entanto manter o sistema estável; trata-se de mais outro exemplo de quão inadequado é o conceito de realimentação fora de seu âmbito particular de aplicabilidade.)

5.11. *Estabilidade indesejável.* A estabilidade em geral é encarada como desejável, pois sua presença capacita o sistema a combinar algo da flexibilidade e atividade na execução com algo de permanência. O comportamento que vise metas é um exemplo de comportamento estável em tôrno de um estado de equilíbrio. Não obstante, nem sempre a estabilidade é boa, pois um sistema pode persistir no retôrno a algum estado que, por outras razões, é considerado indesejável. Uma vez em chamas, o petróleo remanesce no estado chamejante, retornando a êste depois que a perturbação o modificou para "semi-chamejante" — uma estabilidade altamente indesejável para o bombeiro.

Outro exemplo é dado pela sugestão de que, como os membros mais inteligentes da comunidade não estão reproduzindo sua espécie tão livremente quanto os menos inteligentes, o Quociente de Inteligência da comunidade declinará. Sem dúvida não pode cair muito, pois os fracos de espírito podem reproduzir-se melhor do que os idiotas. Assim, fôssem êstes os únicos fatôres na situação, o Q. I. seria estável por volta de 90. A estabilidade nesta cifra seria encarada pela maioria das pessoas como indesejável.

Interessante exemplo de estabilidade sucede na condição conhecida como "causalgia" em que dor aguda, sem causa visível, ocorre em um nervo prèviamente dividido em parte. Granit demonstrou que o fato se deve quase certamente à condução, no local do ferimento, de impulsos do motor (partida) aos nervos sensórios (chegada), permitindo a formação de um circuito regenerativo via centros de reflexos na medula espinhal. Semelhante circuito tem dois estados de equilíbrio, cada um dêles estável: conduzindo poucos impulsos ou um número máximo. É como uma gangorra mal equilibrada, que repousará em uma das duas condições extremas mas não na intermediária. O paciente sabe muito bem que a "estabilidade" pode ser boa ou má, pois entre dois estados estáveis um é confortável e outro extremamente doloroso.

EQUILÍBRIO PARCIAL E TOTAL

5.12. É possível perceber agora a relação entre acoplamento e equilíbrio que será requerida adiante (S.12.14 e 13.19), por ter importantes aplicações.

Suponhamos que algum sistema completo seja composto de duas partes *A* e *B*, acopladas uma à outra:

$$\boxed{A} \rightleftarrows \boxed{B}$$

e suponhamos que o todo esteja em estado de equilíbrio.

Isto significa que o estado do todo permanece inalterado no tempo. Mas o estado do todo é um vetor provido de duas componentes: a do estado *A* e a de *B*. Segue-se que *A*, considerado como um subsistema, permanece também inalterado; e o mesmo acontece com *B*.

Não só o estado de *A* não sofre alteração como tampouco o valor da entrada de *A*; pois êste valor é determinado pelo estado de *B* (S.4.7), que não se modifica. Assim *A* acha-se em um estado de equilíbrio nas condições proporcionadas por *B* (Cf. *Ex.* 5.3.11). A propriedade análoga vale para *B*. Portanto, *se o todo se encontra em estado de equilíbrio, cada parte encontrar-se-á, necessàriamente, em estado de equilíbrio, nas condições proporcionadas pela outra parte.*

O argumento também é reversível. Suponhamos que *A* e *B* se encontrem em estado de equilíbrio, proporcionando cada estado ao outro sistema, um valor de entrada que leva o primeiro a um estado de equilíbrio. Neste caso nenhum dos dois pode mudar e o todo tampouco pode mudar; e assim o todo tem de encontrar-se em estado de equilíbrio.

Destarte um implica o outro. Do ponto de vista formal, *o todo acha-se em estado de equilíbrio se e sòmente se cada parte se achar em estado de equilíbrio nas condições proporcionadas pela outra parte.* (Se houver várias partes, a última palavra é simplesmente mudada para "partes").

5.13. *Poder de veto.* Pode-se sustentar a mesma tese de modo mais vívido, tornando-a mais útil do ponto de vista conceitual. Suponhamos que *A* e *B* estejam acoplados e que nos interessamos apenas pela ocorrência de um estado de equilíbrio (não de ciclos). Quando o todo é movido a partir de algum estado inicial, seguindo ao longo de alguma trajetória, *A* e *B* hão de passar através de vários estados. Suponhamos que em dado momento o estado de B proporcione condições que façam do estado presente de A um estado de equilíbrio. A não mudará durante o passo seguinte. Se B não se encontrar por sua vez em estado de equilíbrio nas condições providas por A, mover-se-á para um nôvo estado. As condições de A alterar-se-ão destarte, seus estados de equilíbrio serão provàvelmente modificados, e o estado em que se encontrar deixará possìvelmente de ser de equilíbrio. Assim, A pôr-se-á de nôvo em movimento.

Figuradamente, podemos dizer que A propôs um estado de equilíbrio (pois A queria parar), mas B recusou-se a aceitar a proposta, ou vetou o estado. Podemos, pois, considerar cada parte como que dotada de um poder de veto sôbre os estados de equilíbrio do todo. *Nenhum estado (do todo) pode ser um estado de equilíbrio a menos que seja aceitável a cada uma das partes componentes,* cada qual atuando em condições dadas pelas outras.

Ex.: Três sistemas sistemas univariáveis, tendo como parâmetros letras gregas, são:

$$x' = -x + \alpha, \quad y' = 2\beta y + 3, \quad z' = -yz + \delta.$$

Podem êles ser acoplados de modo a formarem um estado de equilíbrio em (0,0,0)? (Sugestão: Que valor teria de assumir β?)

5.14. *O homeostato.* Tal princípio oferece uma forma smiples de considerar o homeostato e entender seu funcionamento. É possível encará-lo como uma parte A acoplada a uma parte B (Fig. 5.14.1).

A parte A consiste essencialmente de quatro agulhas (com espirais ancilares, potenciômetros etc.), atuando uma sôbre a outra de modo a formar um sistema quadrivariável para o qual os valores de B são entradas. O estado de A é especificado pelas posições das quatro agulhas. Dependendo das condições e da entrada, A pode apresentar estados de equilíbrio com as agulhas ou no centro ou no desvio extremo.

A parte B consiste essencialmente de um relé, dotado de energia ou não, e quatro comutadores graduados, que podem encontrar-se, cada qual, em qualquer das 25 posições (não indicadas exatamente na Figura). Cada posição porta uma resistência de certo valor. Assim, B tem $2 \times 25 \times 25 \times 25 \times 25$, isto é, 781250 estados. Para êste sistema A é entrada.

B foi contruído de tal modo que, com o relé excitado, *nenhum* dos estados de *B* é de equilíbrio (ou seja, os comutadores continuam movendo-se), enquanto, com o relé não excitado, *todos* os estados são de equilíbrio (i. e., todos os comutadores permanecem onde se encontram).

Enfim, *B* foi acoplado de tal maneira a *A* que o relé está não-excitado quando e sòmente quando *A* é estável nas posições centrais.

Quando um problema é colocado (por uma alteração de valor em alguma entrada para *A* não indicada formalmente na Figura), *A* apresenta uma variedade de possíveis estados de equilíbrio, alguns com as agulhas nas posições centrais, outros com as agulhas plenamente divergentes. O todo passará a algum estado de equilíbrio. Um equilíbrio do todo implica que *B* deve estar em equilíbrio, pelo princípio da seção

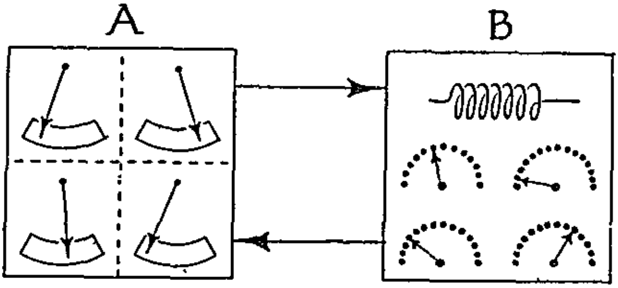


Fig. 5.14.1

anterior. *B*, porém, foi feito de modo que isto ocorra apenas quando o relé está não-excitado. E *B* foi acoplado a *A* de maneira que o relé fica não-excitado apenas quando as agulhas de *A* estão nos centros ou próximas a êles. Destarte, a conexão de *B* veta todos os equilíbrios de *A*, exceto quando as agulhas estão no centro.

Veremos agora que cada gráfico apresentado no *Design for a Brain* pode ser resumido por uma única descrição: "trajetória de um sistema que vai para um estado de equilíbrio". Num certo sentido, o homeostato não faz nada mais do que se dirigir para um estado de equilíbrio. O *Design for a Brain* mostrou que esta simples frase talvez encubra muitos caminhos de comportamento intricados e interessantes, dos quais vários são de alto interêsse na fisiologia e na psicologia.

(O tema da "estabilidade" reaparece freqüentemente, de modo especial na S.9.6, 10.4, 12.11; o do homeostato é retomado na S.12.15.)

5.15. Podemos *resumir* agora o complexo de idéias envolvidas na "estabilidade".

Em primeiro lugar há o estado de equilíbrio — o estado que não muda por transformação. Depois, o estado pode tornar-se múltiplo, e obtemos o conjunto estável de estados, dos quais o ciclo e a bacia constituem exemplos.

Dados um tal estado ou conjunto de estados e alguma perturbação particular, cabe perguntar se, após uma perturbação, o sistema retornará à sua região inicial. E se o sistema fôr contínuo, cabe perguntar se é estável contra tôdas as perturbações dentro de um certo intervalo de valores.

O conceito de estabilidade, sem dúvida, é essencialmente composto. Só depois de especificado cada aspecto dêle é que se pode aplicá-lo sem ambigüidade a um caso particular. Então, se a sua utilização demanda muito cuidado, por que usá-lo em geral? Sua vantagem é que, no caso adequado, pode englobar *resumidamente* várias possibilidades mais ou menos intricadas. Em poucas palavras, quando os fenômenos são adequadamente simples, têrmos tais como equilíbrio e estabilidade são de grande valia e conveniência. Todavia, devemos ter sempre em mente que êles constituem meras abreviações, e que os fenômenos nem sempre têm a simplicidade que tais palavras pressupõem. O usuário deverá estar sempre preparado para suprimi-las e substituí-las por fatos reais, em têrmos de estados, transformações e trajetórias, aos quais se referem.

É interessante notar, antecipando a S.6.19, que a tentativa de afirmar o que é significativo acêrca de um sistema com referência à sua estabilidade é um exemplo do método "topológico" para descrever um sistema grande. A questão, "o que fará êste sistema?", aplicado, digamos, a um sistema econômico, *pode* exigir um descrição completa de cada pormenor de seu comportamento futuro, mas *pode* ser adequadamente respondida pela proposição mais simples "Retornará ao seu estado usual" (ou, talvez, "apresentará sempre divergência crescente"). Assim, o tratamento que fizemos neste capítulo é do tipo exigido quando se lida com o sistema muito grande.

A Caixa Preta

6

6.1. Os métodos desenvolvidos nos capítulos anteriores permitem-nos empreender agora o estudo do Problema da Caixa Preta e o estudo nos proporcionará um excelente exemplo do emprêgo dos métodos.

O Problema da Caixa Preta surgiu na eletrotécnica. É dado ao engenheiro uma caixa lacrada com terminais de entrada, aos quais pode aplicar quaisquer voltagens, choques ou outras perturbações que quiser, e terminais de saída, a partir dos quais pode observar o que puder. O engenheiro deve deduzir o que puder acêrca do seu conteúdo.

Às vêzes o problema surgiu literalmente, quando um visor de bombardeio lacrado e secreto apresentou defeitos e foi preciso decidir, sem que se abrisse a caixa, se valia a pena voltar para consertá-lo ou se devia ser abandonado. Outras vêzes o problema surgiu na prática, como quando um técnico de telefonia considerava um conjunto complicado de relações entre testes aplicados e resultados observados, no meio de uma massa de máquinas em funcionamento que não devia ser desmontada por razões insuficientes.

Embora o problema tenha surgido em forma puramente elétrica, seu âmbito de aplicação é muito amplo. Um clínico que examina um paciente com lesão cerebral e afasia pode estar tentando, por meio de dados testes e observação da fala, deduzir algo dos mecanismos envolvidos. E o psicólogo que observa um rato em um labirinto pode agir sôbre o rato com vários estímulos e pode constatar os vários comportamentos do rato; juntando os fatos, pode tentar deduzir algo acêrca do mecanismo neurônico que não pode observar. Não necessito dar exemplos ulteriores porquanto são encontráveis em qualquer parte (S.6.17).

A teoria da Caixa Preta é, no entanto, ainda mais ampla na aplicação do que êstes estudos profissionais. A criança que tenta abrir uma porta deve manipular a maçanêta (a entrada) de modo a produzir o desejado movimento na lingüeta (a saída); e deve aprender como controlar uma pela outra sem estar capacitada a ver o mecanismo interno que as liga. Na nossa vida cotidiana confrontamo-nos a cada instante com sistemas cujos mecanismos internos não estão completamente abertos à inspeção, e que devem ser tratados por métodos apropriados à Caixa Preta.

O experimentador não interessado na Teoria da Caixa Preta comumente encara qualquer invólucro como mero aborrecimento, pois atrasa a sua resposta à pergunta "o que há dentro *desta* Caixa?" Nós, todavia, deveremos considerar perguntas tão amplas quanto

"Como deveria proceder um experimentador em face de uma Caixa Preta?"

"Que propriedades do conteúdo da Caixa são descobríveis e quais as fundamentalmente não-descobríveis?"

"Que métodos deverão ser utilizados se a Caixa deve ser investigada de modo eficiente?"

Podemos dar atenção adequada a estas questões apenas se aceitamos a existência, ao menos em caráter temporário, de um invólucro, e procedemos de acôrdo. Então, e sòmente então, poderemos desenvolver uma epistemologia científica.

6.2. Para começar, não façamos quaisquer suposições acêrca da natureza da Caixa e de seu conteúdo, que poderia ser algo, digamos, que tivesse acabado de cair de um disco voador. Admitiremos, todavia, que o experimentador possua certos recursos para atuar sôbre êle (e. g., incitando-o, incidindo uma luz sôbre êle) e certos recursos para observar seu comportamento (e.g., fotografando-o, registrando a sua temperatura). Agindo assim sôbre a Caixa e permitindo que a Caixa o afete e a seu aparelho registrador, o experimentador está, por sua vez, *acoplado* à Caixa, de modo que ambos formam juntos um sistema com realimentação:

$\boxed{\text{Caixa}} \rightleftarrows \boxed{\text{Experimentador}}$

A fim de que o acoplamento seja efetuado de algum modo definido e reprodutível, a "entrada" da Caixa precisa ser especificada, mesmo que seja arbitrária e provisòriamente. Todo sistema real possui um número indefinidamente grande de possíveis entradas — de meios possíveis pelos quais o experimentador pode exercer alguma ação sôbre a Caixa. Do mesmo modo, tem um número indefinidamente grande de possíveis saídas — de meios pelos quais ela pode afetar o experimentador, talvez pelos instrumentos de registro. Se a investigação deve ser feita de maneira ordenada, o conjunto de entradas a ser utilizado e o de saídas a ser observado devem ser antes de tudo decididos, ao menos provisòriamente. Admitamos, então, que isto tenha sido feito.

A situação que nós (autor e leitor) estamos considerando pode aclarar-se com a introdução de duas convenções inócuas. Assumamos que as entradas, qualquer que seja a sua natureza real, sejam substituídas, ou representadas por um conjunto de alavancas ou ponteiros — como os contrôles de um forno de cozinha. Podemos então ser muito claros quanto ao que significa dizer que a entrada "está em certo estado" — é o estado que se configuraria em um instantâneo dos contrôles. Assumamos, também, que a saída consista de um conjunto de mostradores, ligados à Caixa e afetados pelo mecanismo interior, de modo que os ponteiros exibam nos mostradores, por sua posição em um dado momento particular, o estado da saída.

Vemos agora o experimentador muito parecido ao maquinista em um navio, que está sentado diante de um conjunto de alavancas e telégrafos através dos quais pode atuar sôbre as máquinas, podendo observar os resultados sôbre uma fila de mostradores. A representação, embora pareça não natural, é de fato, sem dúvida, capaz de representar a grande maioria dos sistemas naturais, mesmo que sejam biológicos ou econômicos.

6.3. *A Investigação.* Um homem não pode entrar duas vêzes no mesmo rio; e tampouco realizar duas vêzes a mesma experiência. O que lhe é dado fazer é executar outro experimento que difira do primeiro apenas em algum aspecto que se julga desprezível.

O mesmo fato se aplica ao exame da Caixa Preta. Os dados básicos serão sempre da forma:

Tempo	Estados de entrada e saída	
...	...	...
...	...	...

onde, em cada seqüência de tempos, os estados das várias partes da Caixa, entrada e saída, são registrados. Assim, a Caixa que caiu do Disco Voador pode conduzir ao protocolo:

Tempo	Estado
11h18 min	Não fiz nada — a Caixa emitiu um hum constante a 240c/s
11h19 min	Levantei o comutador com sinal *K*: anota subiu até 480c/s e permaneceu constante.
11h20 min	Acidentalmente puxei o botão assinalado "!" — A Caixa subiu de 20°C na temperatura.
...	Etc.

(O têrmo **protocolo** será reservado para uma tal forma e seqüência.)

Assim, todo sistema, fundamentalmente, é investigado pela coleta de um longo protocolo, traçado no tempo, mostrando a seqüência de estados de entrada e de saída. Assim, se um sistema possui estados possíveis de entrada α e β e possíveis estados de saída *f*, *g*, *h* e *j*, um protocolo típico pode ser lido (e no entanto ser outra transformação!):

Tempo:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
Estado:	αg	αj	αf	αf	αf	βf	βh	βh	αh	αj	βf	αh	βj	βf	αh	βj	αf

(Por razões de brevidade, omitimos os parênteses.).

Essa forma, embora possa parecer artificial e não natural, é de fato típica e geral. Representará qualquer coisa, desde a investigação de uma rêde elétrica pela introdução de uma voltagem sinusoidal e observação da saída, até uma entrevista psiquiátrica onde são colocadas as questões α e β e provocadas as resposta *g*, *f*, *h* e *j*.

Assim, os dados primários de qualquer investigação de uma Caixa Preta consistem de uma seqüência de valores do vetor com duas componentes

(estado entrada, estado saída).

(Não excluímos a possibilidade de que cada componente possa ser, por si, um vetor (S.3.5).)

Segue-se daí a dedução fundamental de que *todo conhecimento obtenível de uma Caixa Preta (de dada entrada e saída) é tal que pode ser obtido por uma recodificação do protocolo;* tudo isso e nada mais.

Ex.: Tabule as transições observadas no sistema que principia em αg. Determine algumas regularidades nelas.

6.4. Cabe notar que comentário algum foi feito acêrca da perícia do experimentador em manipular a entrada. A omissão foi deliberada, pois nenhuma perícia é exigida! Admitimos, lembremo-nos, que *nada* é conhecido a respeito da Caixa, e quando isso sucede o método de efetuar apenas variações aleatórias (e.g., guiadas pelos lançamentos de um dado) sôbre os comutadores de entrada é tão defensável como qualquer outro método, pois não existe ainda fato algum a que se possa recorrer como justificativa pela preferência de qualquer método particular. Com maquinaria terrestre — industrial, biológica, neurônica — o experimentador teve amiúde experiências prévias com Caixas da mesma classe. Quando isso ocorre, pode estar capacitado a utilizar um método que explore o que *não* sabe acêrca da presente Caixa mais eficientemente do que algum outro. (Tais questões, de explorar um sistema parcialmente conhecido, levam a problemas de tipo inteiramente mais avançado, e sua consideração deve ser postergada; um pouco acêrca do tema é dito na S.13.5 e nas seguintes).

6.5. *Caráter absoluto.* Uma vez obtido um generoso comprimento de registro, o experimentador considerará regularidades, *repetências* no comportamento (S.7.19). Êle pode verificar, por exemplo, no Ex. 6.3.1, que αj é sempre seguido de αf ou de βf — que, embora a transição de α não seja univalente, a de j o *é*.

Assim, êle examina o registro. Comumente, a sua primeira preocupação é verificar se a Caixa é absoluta se fôr dado o estado de entrada. Êle o faz coletando:

(i) tôdas as transições que seguem o estado de entrada α, classificando-as no que g se tornou, no que h se tornou, e assim por diante através de todos os estados de saída;

(ii) o mesmo para a entrada β;

(iii) e assim por diante através de todos os estados de entrada observados.

O que êle tenta, em outras palavras, é preencher um conjunto de transformações como as da S.4.1. e examina o que conseguiria ver se tôdas fôssem univalentes.

Assim, se o dado protocolo é testado, e se cada um dos 16 transformados fôr registrado, resultará:

$\downarrow$	f	g	h	j
α	fff	j	jjj	ff
β	hhh	.	hh	ff

(Não se observou nenhuma transição a partir de g com entrada em β.) Dentro de cada célula as letras são tôdas iguais, de modo que a tabela pode ser assim simplificada:

$\downarrow$	f	g	h	j
α	f	j	j	f
β	h	.	h	f

com afirmação de que foi observada através de todo protocolo esta transformação univalente fechada.

Destarte, por uma recodificação direta do protocolo, o experimentador pode demonstrar que o comportamento é do tipo máquina, e *pode deduzir sua representação canônica.*

Caberia reparar que êle a deduziu da observação direta do comportamento efetivo da Caixa. Não confiou em nenhum conhecimento "emprestado". O que quer que esperasse, e independentemente da confiança de sua expectativa, a dedução final depende apenas daquilo que efetivamente aconteceu. Assim, em qualquer conflito entre o que êle, ou outros, esperavam e o que foi encontrado, tais resultados empíricos são conclusivos enquanto afirmação sôbre a natureza da Caixa.

Não fôsse o sistema determinado, i. e., a transformação não-univalente, êle poderia proceder de um dos dois modos seguintes:

Um dêles consiste em alterar o conjunto de entradas e saídas — levar em conta mais variáveis — e então verificar se o *nôvo* sistema (equivalente a uma nova Caixa, S.3.11) é determinado. Assim, um químico pode descobrir que o comportamento de um sistema é, a princípio, não-determinado, mas depois de considerada a presença de traços de cloro torna-se determinado. Boa parte da pesquisa consiste em tais buscas de um conjunto adequado de variáveis.

O segundo modo é abandonar a tentativa de encontrar uma estrita determinação e procurar um estado de determinação *estatístico,* i. e., estado de determinação em médias etc. O experimentador, com vastos registros disponíveis, examina-os então em longas seções, a fim de verificar, caso os pormenores não sejam previsíveis passo a passo, se as *médias* (ou estatísticas similares) são previsíveis de seção a seção. Pode constatar, talvez, que os registros indicam a determinabilidade estatística da cadeia de Markov; (mas a discussão a respeito ficará para o Capítulo 9, pois até lá estaremos preocupados apenas com as máquinas determinadas passo a passo).

Para resumir: uma vez obtido o protocolo, a determinabilidade do sistema pode ser posta à prova e (se êste fôr determinado) sua representação canônica, deduzida.

Ex. 1: Deduza o gráfico cinemático para a entrada em α diretamente do protocolo do sistema de S.6.3.

Ex. 2: (Continuação.) e para a entrada em β.

Ex. 3: Um sistema com apenas um estado-entrada fornece a seguinte seqüência de estados como saída:

$$D\ G\ A\ H\ C\ L\ H\ C\ L\ H\ C\ F\ C \ldots$$

Será absoluto?

Ex. 4: Um sistema possui duas variáveis, x e y, cada qual podendo assumir os valores 0,1 ou 2. A entrada pode assumir dois valores α ou β. O protocolo fornece:

Tempo:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Entrada:	α	α	α	α	α	β	α	α	α	α	α	α	α
x:	1	0	0	0	0	0	1	2	2	1	0	0	0
y:	1	0	1	0	1	0	2	1	0	1	0	1	0

Tempo:	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
Entrada:	β	α	α	β	β	β	α	β	β	β	α	β
x:	0	0	1	0	1	1	1	1	1	2	2	1
y:	1	2	1	0	2	1	0	1	0	0	2	1

Trata-se de uma máquina com entrada?

Ex. 5: (Continuação.) Qual será a sua transformação se a entrada fôr mantida em α?

Ex. 6: Se uma máquina possuir m estados-entradas e n estados-saídas, qual será o número mínimo de passos de observação suficiente para seu estudo completo?

Ex. 7: Duas Caixas Pretas têm idêntica aparência externa, e cada qual possui uma única entrada α e uma única saída x, e cada qual uma variável numérica. Foram rotuladas com os índices I e II, e suas representações canônicas são:

$$\text{I: } x' = x + 1 - \alpha$$
$$\text{II: } x' = (1 + \alpha)\, x^{-2} + \alpha$$

Infelizmente os rótulos "I" e "II" se destacaram posteriormente e não se sabe qual é qual. Sugira um teste simples que os reidentifique.

6.6. *Estados inacessíveis.* O exame das transformações

$\downarrow$	f	g	h	j
α	f	j	j	f
β	h	f	h	f

mostra que é impossível ressuscitar, por quaisquer manipulações da entrada, o estado g, uma vez passado ao protocolo. As transições de g não podem assim ser exploradas posteriormente ou testadas repetidamente. Êste fato, de que não se pode retornar à vontade a certos estados da Caixa, é muito comum na prática. Tais estados serão denominados **inacessíveis.**

Na sua forma mais dramática, ocorre quando a investigação de um nôvo tipo de mina inimiga leva a uma explosão — que é descritível de modo mais abstrato pela afirmação de que o sistema passou de um estado para aquêle em que nenhuma manipulação na entrada pode fazer o sistema retornar. Essencialmente, o mesmo fenômeno ocorre quando as experiências são conduzidas sôbre um organismo que aprende; pois, à medida que o tempo passa, deixa o seu estado inicial "não-sofisticado", e nenhuma simples manipulação pode conduzi-lo de volta a êste estado. Em tais experimentos, entretanto, o psicólogo está comumente investigando, não o indivíduo particular, mas a espécie particular, de modo que *pode* restaurar o estado inicial pela simples operação de tomar um nôvo indivíduo.

Assim, o experimentador, se o sistema fôr determinado, deve ou restringir-se à investigação de um conjunto de estados que é tanto fechado como acessível, tais como *f*, *h*, *j* no exemplo, ou adicionar mais estados à sua entrada, de modo que mais transformações se tornem disponíveis e, assim, forneçam talvez uma transição para *g*.

6.7. *Conexões dedutíveis.* Fica agora claro que se pode obter parte das conexões dentro de uma Caixa Preta por dedução. Pois a manipulação direta e a observação fornecem o protocolo, êste (se o sistema fôr determinado) fornece a representação canônica, e esta fornece o diagrama dos efeitos imediatos (um para cada estado-entrada) (S.4.13). Mas devemos prosseguir com cautela.

Cumpre notar que num sistema real o "diagrama das conexões internas" *não é único.* O aparelho de rádio, por exemplo, possui um diagrama de conexões se considerado elètricamente e outro, se considerado mecânicamente. Um isolador, de fato, é exatamente um componente dêste tipo, na medida em que fornece firme conexão mecânica, embora não proporcione conexão elétrica. *O padrão de conexões a ser encontrado depende do conjunto de entradas e saídas utilizado.*

Mesmo que o diagrama dos efeitos imediatos seja único, não indica um único padrão de conexões dentro da Caixa. Destarte, suponhamos uma Caixa Preta com uma saída de dois mostradores, *x* e *y*; e suponhamos que se descobriu que *x* domina *y*. O diagrama dos efeitos imediatos é pois

$$\boxed{x} \rightarrow \boxed{y}$$

(onde as duas caixas são partes de tôda a Caixa). Esta relação pode ser dada por uma infinidade de possíveis mecanismos internos. Um exemplo particular ocorre no caso em que os relés abrem e fecham comutadores de modo a produzir uma rêde particular de conexões. Ficou provado por Shannon que qualquer comportamento dado pode ser produzido por um número

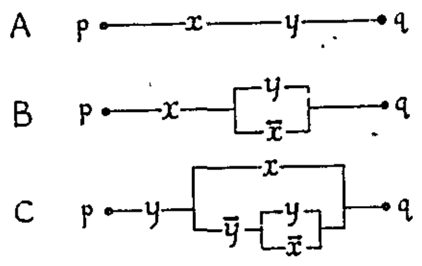


Fig. 6.7.1

indefinidamente grande de possível rêdes. Assim, represente por x um contato que estará fechado quando o relé X estiver excitado e represente por x outro que ficará aberto. Similarmente admita que outro relé Y tenha contatos similares y e y. Suponha ainda que a rêde deva conduzir de p para q quando e sòmente quando quer X quer Y estejam excitados. A rêde A da Fig. 6.7.1, na qual x e y estão ligados em série, apresentará o comportamento requerido. O mesmo ocorrerá com B e C, e um número indefinidamente grande de outras rêdes.

O comportamento não especifica as conexões de modo único.

Ex.: (Ex. 6.5.4, continuação.) Deduzir o diagrama dos efeitos imediatos quando a entrada está fixada em α. (Sugestão: S.4.13.)

MÁQUINAS ISOMORFAS

6.8. O estado de uma Caixa Preta pode assim fornecer informação ao experimentador até um certo montante; e, se forem dadas as entradas e as saídas, possìvelmente não se poderá fazer com que forneça mais. O quanto de informação será discutido na S.13.15 (especialmente em seu último exercício). Aqui basta notar que a representação canônica especifica ou identifica o mecanismo "a menos de um isomorfismo".

"Isomorfo" significa, grosseiramente, "similar no modêlo". Trata-se de um conceito do mais amplo alcance e da máxima importância para todos os que desejam abordar acuradamente assuntos onde o "modêlo" desempenha uma parte. Consideremos inicialmente alguns poucos exemplos apenas para ilustrar as idéias básicas.

Um negativo fotográfico e a sua cópia são, no que se refere ao molde da foto, isomorfos. Os quadrados no negativo aparecem como quadrados na cópia; os círculos aparecem como círculos; as linhas paralelas em uma permanecem como linhas paralelas no outro. Assim, certas *relações* entre as partes dentro do negativo aparecem como as mesmas *relações* na cópia, embora as aparências, no que se refere à luminosidade, sejam diferentes, na verdade exatamente opostas. Assim, a operação de mudança do negativo para a cópia deixa inalteradas essas relações (compare S.5.2).

Um mapa e a região que êle representa são isomorfos (se o mapa fôr preciso!). Os relacionamentos na região, tais como formarem as cidades *A*, *B* e *C* um triângulo eqüilátero, ocorrem inalterados sôbre o mapa, onde os pontos representativos para *A*, *B* e *C* formam também um triângulo eqüilátero.

Os moldes não precisam ser visuais. Se uma pedra é lançada verticalmente para cima com uma velocidade inicial de 15 m por segundo, há um isomorfismo entre o conjunto de pontos no ar tal que no instante t a pedra esteja h metros acima, e o conjunto dos pontos de um gráfico que satisfazem a equação

$$y = 15x - 16x^2$$

As linhas ao longo das quais o ar flui (em velocidades subsônicas) através de um aerofólio forma um padrão idêntico às linhas ao longo das quais passa uma corrente elétrica num líquido condutor através de um não condutor do mesmo formato que o aerofólio. Os dois modelos são iguais, embora as bases físicas sejam diferentes.

Vale considerar com mais pormenores outro isomorfismo. A Fig. 6.8.1 apresenta dois sistemas dinâmicos, cada qual com uma entrada e uma saída. No de cima, o eixo esquerdo I é a entrada; pode-se girá-lo para qualquer posição, acusada pelo mostrador u. Está ligado pela mola S a uma roda pesada M, ridigamente conectada ao eixo de saída O. O grau de rotação de O aparece ao mostrador v, que é a sua saída. A roda mergulha em um recipiente com líquido F, que exerce sôbre a roda uma fôrça de atrito proporcional à velocidade da roda. Se, agora, partindo de condições dadas, a entrada *u* fôr conduzida através de alguma seqüência de valores, a saída *v* passará, do mesmo modo, através de alguma seqüência determinada de valores, dependendo a seqüência particular do valor inicial de *v*, da taxa de variação de *v* naquele instante, e da seqüência utilizada para a entrada de *u*.

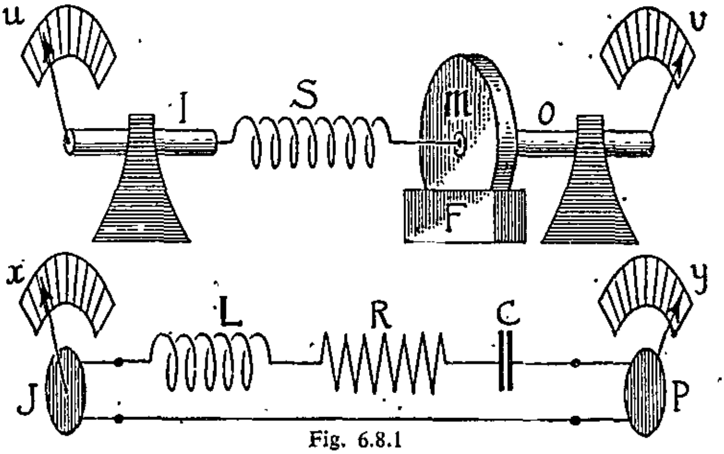


Fig. 6.8.1

O sistema inferior é elétrico. Sua entrada é um potenciômetro, ou outro dispositivo, *J*, que emite a voltagem indicada na escala *x*. Em série, há uma indutância *L*, uma resistência *R*, e uma capacitância *C*. *P* é um medidor de corrente (tal como o usado no fornecimento doméstico) que registra a soma das correntes que o atravessaram. A soma é indicada na escala *y* que é a sua saída.

Se ajuntarmos agora os valores de *L*, *R* e *C* de modo a emparelhar a rigidez da mola, a inércia da roda e o atrito em *F* (embora não respectivamente), os dois sistemas poderão apresentar notável identidade funcional. Que ambos partam do repouso. Apliquemos qualquer seqüência-entrada de valores em *u*, por mais longa e arbitrária que seja, e obtenhamos uma seqüência-saída em *v*, de igual comprimento: se fôr dada em *x* a mesma seqüência de valores, a saída em *y* será idêntica à de *v*, ao longo de todo o seu comprimento. Tentemos outra seqüência de entradas em *u* e registremos o que aparece em *v*: a mesma entrada dada a *x* resultará numa saída em *y* que copia a de *v*. Recubramos as partes centrais do mecanismo e as duas máquinas serão indistinguíveis através de todo um número infinito de testes aplicados. As máquinas podem assim apresentar as mais profundas semelhanças no comportamento enquanto são, de outros pontos de vista, extremamente dissimilares.

Mas isso não é tudo. São familiares aos matemáticos as equações do tipo

$$a\frac{d^2z}{dt^2} + b\frac{dz}{dt} + cz = w$$

pelas quais, quando é dado um gráfico que apresenta como w varia com o tempo (t), se encontram as variações induzidas em z. Assim, w pode ser encarada como uma "entrada" para a equação e z como uma "saída". Se agora a, b e c são valores dados adequadamente relacionados com L, R e S etc., a relação entre w e z torna-se idêntica à relação entre u e v, e entre x e y. *Tôdos êstes três sistemas são isomorfos.*

Torna-se agora manifesto o valor prático dos isomorfismos. Suponhamos que tenha surgido o problema de como o sistema mecânico se comportará sob certas condições. Dada uma entrada u, pede-se o comportamento v. O sistema mecânico real pode ser inadequado para um teste direto: pode ser demasiado pesado, ou não prontamente acessível, ou mesmo ainda não feito! Se, todavia, houver um matemático disponível, a resposta pode ser encontrada rápida e fàcilmente determinando-se a saída z da equação diferencial de entrada w. Dir-se-ia, em têrmos usuais, que um problema de física-matemática foi resolvido. O que devemos notar, entretanto, é que o processo consiste essencialmente no uso de um mapa — no uso de uma representação isomórfica conveniente de preferência a uma realidade inconveniente.

Pode acontecer que não haja um matemático disponível, mas um eletricista. Neste caso, é possível utilizar mais uma vez o mesmo princípio. O sistema elétrico é montado, a entrada é dada a x, e a resposta é lida em y. Isto é mais comumente descrito como "construção de um modêlo elétrico".

É claro que nenhum dos três sistemas tem prioridade; cada qual pode substituir os outros. Assim, se um engenheiro quer resolver a equação diferencial, pode encontrar a resposta mais ràpidamente construindo o sistema elétrico e lendo as soluções em y. Dizemos comumente que êle "construiu um computador análogo". Pode-se encontrar, no sistema mecânico, em outras circunstâncias, uma forma mais conveniente para o computador. O grande computador digital para finalidades gerais é notável precisamente porque pode ser programado para tornar-se isomorfo a qualquer sistema dinâmico.

Destarte, a utilização de sistemas isomorfos é comum e importante. É importante porque a maioria dos sistemas apresentam tanto porções fáceis quanto difíceis em suas propriedades. Quando um experimentador chega a uma porção difícil no sistema particular que está investigando, pode, se existir uma forma isomorfa, descobrir que a porção correspondente na outra forma é muito mais fácil de entender, controlar ou investigar. E a experiência provou que a capacidade de mudar para uma forma isomorfa, embora não forneça evidência absolutamente fidedigna, (pois um isomorfismo pode valer apenas dentro de certo limite), constitui no entanto a mais útil e prática ajuda ao experimentador. Na ciência êle é usado por tôda a parte.

6. 9. É preciso mostrar agora que êste conceito de isomorfismo, por mais vasto que seja o seu grau de aplicabilidade, é capaz de uma definição exata e objetiva. A definição mais fundamental foi dada por Bourbaki; necessitamos aqui apenas da forma adequada aos sistemas dinâmicos. Ela se aplica de modo completamente direto uma vez reduzidas as duas máquinas às suas representações canônicas.

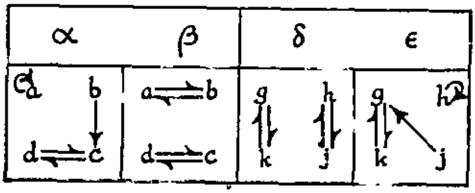


Fig. 6.9.1

Consideremos, por exemplo, duas máquinas simples M e N, com as seguintes representações canônicas

$$M: \begin{array}{c|cccc} \downarrow & a & b & c & d \\ \hline \alpha & a & c & d & c \\ \beta & b & a & d & c \end{array} \qquad N: \begin{array}{c|cccc} \downarrow & g & h & j & k \\ \hline \delta & k & j & h & g \\ \epsilon & k & h & g & g \end{array}$$

Elas não apresentam relação óbvia. Se, entretanto, forem desenhados os seus gráficos cinemáticos, veremos que são como os da Fig. 6.9.1. A inspeção prova que há uma profunda semelhança. De fato, por um mero rearranjo de *pontos* em N, sem interromper qualquer seta (S. 2.17), podemos obter a forma apresentada na Fig. 6.9.2. Tais gráficos são idênticos aos gráficos M, afora as rotulações.

De um modo mais preciso; as representações canônicas de duas máquinas são **isomorfas** se uma transformação um-um dos estados (entrada e saída) de uma máquina para outra puder converter uma representação na outra.

Assim, no exemplo dado, apliquemos a transformação um-um P

$$P: \downarrow \begin{array}{cccccc} \delta & \epsilon & g & h & j & k \\ \beta & \alpha & c & a & b & d \end{array}$$

à tabela de N, aplicando-a aos limites bem como ao corpo. O resultado será:

$$\begin{array}{c|cccc} \downarrow & c & a & b & d \\ \hline \beta & d & b & a & c \\ \alpha & d & a & c & c \end{array}$$

Isto é essencialmente o mesmo que M. Assim, c e β no limite fornecem d em ambos. O isomorfismo corresponde à

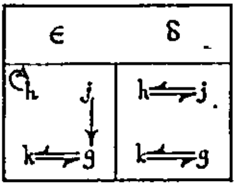


Fig. 6.9.2

definição. (O isomorfismo pode ser visto mais claramente se primeiro as linhas forem trocadas para

$$\begin{array}{c|cccc} \downarrow & c & a & b & d \\ \hline \alpha & d & a & c & c \\ \beta & d & b & a & c \end{array}$$

e depois as colunas trocadas para

$$\begin{array}{c|cccc} \downarrow & a & b & c & d \\ \hline \alpha & a & c & d & c \\ \beta & b & a & d & c \end{array}$$

mas êste rearranjo é apenas para conveniência visual.)

Quando os estados são definidos por vetores, o processo é essencialmente inalterado. Suponhamos que R e S sejam dois sistemas absolutos:

$$R: \begin{cases} x' = x + y \\ y' = x - y \end{cases} \qquad S: \begin{cases} u' = -u - v \\ v' = -u + v \end{cases}$$

A transformação P:

$$P: \downarrow \begin{matrix} u & v \\ y & -x \end{matrix}$$

é um modo abreviado de descrever a transformação um-um que pareia estados de S e de R assim:

em S,	(2,3)	contra	(—3,2)	em R
" "	(1,0)	"	(0,1)	" "
" "	(4,5)	"	(—5,4)	" "
" "	(—3,0)	"	(0,—3)	" "
" "	(u,v)	"	$(-v,u)$	" "

(Compare com U de S.4.9.) Apliquemos P a tôda a descrição de S; o resultado será

$$\begin{cases} y' = -y + x \\ -x' = -y - x \end{cases}$$

que é algèbricamente idêntico a R. Assim R e S são isomorfos.

Ex. 1: Que transformação um-um mostrará que êsses sistemas absolutos são isomorfos?

$$Y: \downarrow \begin{matrix} a & b & c & d & e \\ c & c & d & d & b \end{matrix} \qquad Z: \downarrow \begin{matrix} p & q & r & s & t \\ r & q & q & p & r \end{matrix}$$

(Sugestão: Tente identificar um traço característico, tal como um estado de equilíbrio.)

Ex. 2: No caso quantas transformações um-um existem que mostrarão que êstes sistemas absolutos são isomorfos?

$$A:\downarrow\begin{matrix} a & b & c \\ b & c & a \end{matrix} \qquad B:\downarrow\begin{matrix} p & q & r \\ r & p & q \end{matrix}$$

**Ex.* 3: Escreva as equações canônicas dos dois sistemas da Fig. 6.8.1 e prove que são isomorfas. (Sugestão: Quantas variáveis são necessárias se o sistema deve ser uma máquina com entrada?)

Ex. 4: Determine uma nova rotulação das variáveis que prove serem isomorfos os sistemas absolutos A e B.

$$A:\begin{cases} x' = -x^2 + y \\ y' = -x^2 - y \\ z' = y^2 + z \end{cases} \qquad B:\begin{cases} u' = w^2 + u \\ v' = -v^2 + w \\ w' = -v^2 - w \end{cases}$$

(Sugestão: À direita de A uma variável é mencionada apenas uma vez; o mesmo é verdade com respeito a B. Também em A, apenas uma das variáveis depende de si própria quadràticamente, i. é, se fôr da forma $a' = \pm a^2 \ldots$; o mesmo é verdade com respeito a B.)

6.10. Na seção anterior provamos que duas máquinas são isomorfas se podemos tornar uma delas idêntica a outra por mera re-rotulação. A "re-rotulação", todavia, pode apresentar vários graus de complexidade, como veremos agora.

O sistema que é especificado apenas por estados, como na seção anterior, não contém referências diretas quer a partes, quer a variáveis. Em tal caso, a "re-rotulação" pode significar apenas "re-rotular os estados". Um sistema com partes ou variáveis, entretanto, pode também ser rotulado de nôvo em suas variáveis — o que não é de nenhum modo a mesma coisa. Re-rotular as variáveis, com efeito, significa re-rotular os estados, mas de uma maneira sujeita a considerável restrição (S.7.8), enquanto a re-rotulação dos estados pode ser tão arbitrária quanto queiramos. Portanto, uma re-rotulação dos estados é mais geral do que a das variáveis.

Suponhamos assim um sistema com nove estados; uma re-rotulação arbitrária de oito dos estados não restringe o rótulo a ser dado ao nono. Suponhamos, agora, que o sistema possua duas variáveis, x e y, e que cada qual possa assumir três valores: x_1, x_2, x_3, *e* y_1, y_2, y_3. Nove estados são possíveis, dois dos quais são (x_2, y_3) e (x_3, y_1). Suponhamos que êste sistema seja re-rotulado nas suas *variáveis* do seguinte modo

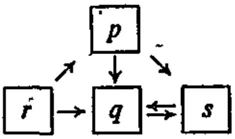
$$\downarrow \begin{matrix} x & y \\ \xi & \eta \end{matrix}$$

Se agora (x_2, y_3) é transformado em algum estado (α, β), e $(x_3\ y_1)$ em (γ, δ), então, por razões de coerência, o estado (y_2, y_1) deve transformar-se em (α, δ). (Desenhe os espaços da fase e identifique os valores sôbre os eixos ξ e η.) Assim, os nove estados podem agora ser transformados arbitrária e independentemente. *A re-rotulação das variáveis oferece menos liberdade para mudança que a re-rotulação dos estados.*

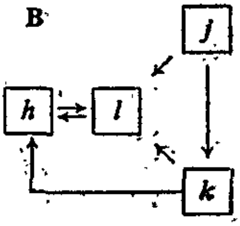
Como resultado, certos aspectos que são destruídos com uma re-rotulação dos estados são preservados com uma re-rotulação das variáveis. Entre êles figura o diagrama dos efeitos imediatos.

O sistema descrito por seus estados não tem, sem dúvida, um diagrama dêste tipo, pois apresenta com efeito apenas uma variável. Um sistema com variáveis, no entanto, possui um diagrama de efeitos imediatos. O espaço de fase tem agora eixos; e vê-se fàcilmente, após uns poucos ensaios, que uma transformação um-um que re-rotule as variáveis, modifica o diagrama dos efeitos imediatos apenas até onde vai a mudança de "botão e linha"; volvendo, digamos *A* em *B:*

A



B



Ex. 1: (Ex. 6.9.4 continuação.) Compare o diagrama dos efeitos imediatos de *A* e *B*.

Ex. 2: Assinale dentre as seguintes propriedades de um sistema absoluto as que mudam e as que não mudam por uma re-rotulação de seus estados: (i) O número de bacias em seu espaço de fase; (i) se é redutível; (iii) seu número de estados de equilíbrio; (iv) se a realimentação está presente; (v) o número de ciclos em seu espaço de fase.

Ex. 3: (Continuação.) Como seriam afetados por uma re-rotulação de variáveis?

6.11. O assunto isomorfismo é extenso, e apenas podemos dar aqui uma introdução ao tema. Antes de passarmos a outro, todavia, cumpriria notar que transformações mais complexas do que uma simples re-rotulação de variáveis podem modificar o diagrama dos efeitos imediatos. Assim, os sistemas

$$A: \begin{cases} x' = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + xy + y \\ y' = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + xy + x \end{cases} \qquad B: \begin{cases} u' = -u \\ v' = v + v^2 \end{cases}$$

são isomorfos, sob a transformação um-um

$$P: \begin{cases} u = x - y \\ v = x + y \end{cases}$$

No entanto o diagrama de A é

$$\boxed{x} \rightleftarrows \boxed{y}$$

enquanto o de B é

$$\boxed{u} \quad \boxed{v},$$

i. e., duas variáveis não conexas.

O "método de coordenadas normais", largamente utilizado na física matemática, consiste em aplicar exatamente uma transformação dêste tipo quando tratamos o sistema não na sua forma óbvia, mas em uma forma isomorfa, na qual tôdas as variáveis são independentes. Nesta transformação o diagrama dos efeitos imediatos é totalmente alterado; o que é mantido é o conjunto dos modos normais, i. e., sua maneira característica de comportamento.

Uma tal transformação (como P acima), que forma alguma função de variáveis (i. e., $x - y$) representa, para o experimentador, mais do que uma simples re-rotulação dos mostradores x, y de saída. Ela significa que as saídas de x e de y da Caixa devem atravessar algum aparelho físico que tome x e y como entrada e emita $x - y$ e $x + y$ como novas saídas. A combinação corresponde a uma operação mais complexa do que a considerada na S.6.10.

Ex.: Prove que A e B são isomórficos. (Sugestão: $(x - y)' = x' - y'$: por quê?)

MÁQUINAS HOMOMORFAS

6.12. A definição dada para o isomorfismo define "igualdade" no sentido mais estrito — permite que duas máquinas (ou duas Caixas Pretas) sejam "iguais" sòmente quando forem tão semelhantes que uma permuta acidental entre elas seria subseqüentemente indetectável, pelo menos por qualquer teste aplicado a seus comportameentos.

Há, todavia, graus menores de semelhança. Assim, dois pêndulos, um batendo segundos e o outro meio-segundos, são òbviamente similares ainda que não sejam isomorfos no sentido estrito. Há, todavia, alguma similaridade, mostrada pelo fato de se tornarem isomorfos quando mensurados em escalas de tempo separadas, um tendo a metade dos valores do outro.

Duas máquinas podem também ser relacionadas por "homomorfismo". Tal ocorre quando uma transformação muito aplicada à mais complexa, pode reduzi-la a uma forma que é isomórfica à mais simples. Assim, duas máquinas M e N,

$$M: \begin{array}{c|ccccc} \downarrow & a & b & c & d & e \\ \hline i & b & a & b & c & a \\ j & a & b & c & b & c \\ k & a & b & b & e & d \\ l & b & c & a & e & e \end{array} \qquad N: \begin{array}{c|cc} \downarrow & g & h \\ \hline \alpha & g & h \\ \beta & h & h \end{array}$$

podem à primeira vista parecer pouco semelhantes. Há, entretanto, profunda similaridade. (O leitor aproveitará muitíssimo se não ler mais a frente até que descubra, ainda que de modo vago, onde reside a similaridade. Note a peculiaridade da tabela de N, com três elementos iguais e um diferente — pode algo como isto ser visto na tabela de N? — se fôr cortada em quadrantes?)

Transforma M pela transformação muitos-um T:

$$T: \downarrow \begin{matrix} a & b & c & d & e & i & j & k & l \\ h & h & h & g & g & \beta & \beta & \alpha & \alpha \end{matrix}$$

(que é univalente mas não um-um como S.6.9) e obteremos

↓	h	h	h	g	g
β	h	h	h	h	h
β	h	h	h	h	h
α	h	h	h	g	g
α	h	h	h	g	g

Verificar-se-á que as repetições não se contradizem, e que a tabela pode ser igualmente dada por

↓	h	g
β	h	h
α	h	g

que é isomorfa a N.

O exame de M mostra agora onde está a semelhança com N. Dentro de M as transições ocorrem em blocos; assim a, b e c sempre vão para algum dos a, b ou c. E os *blocos* em M sofrem transições da mesma maneira que os *estados* em N. *Assim N equivale a uma versão simplificada de M.*

A relação pode ser desenvolvida de outro modo. Suponha primeiro que as duas máquinas são vistas por alguém capaz de distinguir todos os cinco estados de N; êle reportará simplesmente que M é diferente de N (isto é, não isomorfo) e mais complexo. Suponha em seguida que êles sejam vistos por algum observador com menos poder de discriminação, alguém que não possa discriminar entre a, b e c, mas os aglomerou todos juntos como, digamos, A; e que também juntou d e e como B, i e j como Γ e k e l como Δ. Êste nôvo observador, vendo esta versão simplificada de M, relatará que êle é isomorfo com N. Assim, duas máquinas são homomorfas quando se tornam iguais se uma fôr meramente simplificada, isto é, observada com uma discriminação menos completa.

Formalmente, se duas máquinas estiverem relacionadas de tal modo que se possa encontrar uma transformação muitos-um que, aplicada a uma das máquinas, proporcione outra que seja isomorfa com a primeira, então esta (a mais simples das duas) será um **homomorfismo** da primeira.

Ex.: Será o isomorfismo simples caso extremo do homomorfismo?

Problema: Quais os outros tipos de homomorfismo existentes entre uma máquina e outra?

6.13 Se os métodos do presente livro devem aplicar-se aos sistemas biológicos, não só é preciso que tais métodos se tornem bastante complexos para emparelhar com os sistemas, mas êstes devem simplificar-se consideràvelmente se é que o seu estudo há de ser alguma vez prático. Nenhum sistema biológico foi por enquanto estudado em sua plena complexidade, e nem é provável que o seja por muito tempo, no futuro. Na prática, o biólogo sempre impõe tremenda simplificação antes de encetar o trabalho: se observa um pássaro a construir o ninho não vê o intricado padrão de pormenorizadas atividades neurônicas no cérebro do pássaro; se estuda como o lagarto escapa de seus inimigos, não repara nas mudanças iônicas e moleculares particulares em seus músculos; se estuda uma tribo em conselho, não nota os numerosos processos pormenorizados que se desenvolvem nos indivíduos. O biólogo assim estuda costumeiramente apenas pequena fração do sistema com que se defronta. Qualquer afirmação que faça é sòmente meia verdade, simplificação. Em que medida podem ser justificadamente simplificados os sistemas? Podem os cientistas trabalhar devidamente com meias verdades?

O homem prático, por certo, jamais duvidou disto. Vejamos se é possível tornar clara e exata a posição.

O conhecimento pode sem dúvida ser parcial e no entanto completo em si mesmo. O exemplo mais contundente talvez ocorra em conexão com a multiplicação ordinária. A verdade completa acêrca da multiplicação é, por certo, muito extensa, pois inclui os fatos relativos a todo par possível, inclusive itens tais como

$$14792 \times 4.183584 = 61883.574528.$$

Há, no entanto, uma porção bem menor do todo que consiste simplesmente nos seguintes fatos

$$\begin{aligned}
&\text{Par} \times \text{Par} = \text{Par}\\
&\text{Par} \times \text{Ímpar} = \text{Par}\\
&\text{Ímpar} \times \text{Par} = \text{Par}\\
&\text{Ímpar} \times \text{Ímpar} = \text{Ímpar}
\end{aligned}$$

O importante aqui é que, embora êste conhecimento seja apenas uma fração infinitesimal do todo, é completo *em si próprio.* (Trata-se, de fato, do primeiro homomorfismo considerado na matemática.) Em contraste com essa completude, com respeito ao Par e ao Ímpar, vejamos a incompletude apresentada por

$$
\begin{aligned}
2 \times 2 &= 4 \\
2 \times 4 &= 8 \\
4 \times 2 &= 8 \\
4 \times 4 &= 16
\end{aligned}
$$

o que deixa de mencionar o que seja 4×8 etc. Assim, é perfeitamente possível que algum conhecimento, embora parcial com respeito a um sistema maior, seja completo em si próprio, completo até onde vai.

Os homomorfismos podem, como vimos, existir entre duas máquinas diferentes. Podem também existir no interior de uma única máquina: entre as suas várias simplificações possíveis que *ainda conservam a propriedade característica de ser do tipo-máquina* (S.3.1). Suponhamos, por exemplo que a máquina fôsse A:

$$A: \downarrow \begin{matrix} a & b & c & d & e \\ e & b & a & b & e \end{matrix}$$

Esta é a máquina vista pelo primeiro observador (chamemo-lo Um). Admita agora que outro observador (Dois) fôsse incapaz de distinguir estados a e d, bem como b e e. Atribuamos novos nomes ao estados para maior clareza

$$\downarrow \quad \underbrace{a \; d}_{K} \quad \underbrace{c}_{L} \quad \underbrace{b \; e}_{M}$$

O segundo observador, à vista dos estados K, L ou M, consideraria determinado o comportamento da máquina. Assim, quando em K (efetivamente a ou d), a máquina sempre se dirigia para M (ou b ou e) e assim por diante. Êle diria que ela se comporta segundo uma transformação fechada.

$$\downarrow \begin{matrix} K & L & M \\ M & K & M \end{matrix}$$

e que esta é univalente, e portanto determinada.

O nôvo sistema foi constituído pelo simples agrupamento de certos estados prèviamente distintos, mas não se segue daí que qualquer agrupamento arbitrário forneça um homomorfismo. Destarte, suponha ainda outro observador Três que possa distinguir apenas dois estados:

$$\downarrow \underbrace{a \quad b \quad c}_{P} \quad \underbrace{d \quad e}_{Q}$$

Êle verificaria que P muda algumas vêzes para Q (quando P estava efetivamente em a) e algumas vêzes para P (quando P estava efetivamente em b ou c). A mudança de P não é pois univalente, e Três diria que a máquina (com estados P e Q) não é determinada. Ficaria descontente com às medidas que conduzissem à distinção entre P e Q e tentaria tornar-se mais discriminador, de modo a remover a imprevisibilidade.

É possível pois simplificar uma máquina em uma nova forma quando seus estados são adequadamente compostos. O tratamento científico de um sistema complexo *não* exige que se faça tôda a distinção possível.

Ex. 1: Que homomorfismo combina Ímpar e Par pela operação de adição?

Ex. 2: Determine tôdas as simplificações possíveis do sistema de quatro estados

$$\downarrow \begin{matrix} a & b & c & d \\ b & b & d & c \end{matrix}$$

cujo resultado ainda é uma máquina determinada.

Ex. 3: Qual a simplificação possível em:

$$\begin{cases} x' = -y \\ y' = x^2 + y, \end{cases}$$

se o resultado ainda deve ser uma máquina determinada?

6.14. A deliberada recusa de tentar tôdas as distinções possíveis, e a deliberada restrição do estudo de um sistema dinâmico a algum homomorfismo do todo, justifica-se, e de fato é quase inevitável, quando o experimentador se confronta com o sistema de origem biológica.

Admitimos em geral, nos capítulos anteriores, que o observador sabe, a cada instante, o estado exato do sistema. Assumimos, em outros têrmos, que a cada momento sua informação acêrca do sistema era completa. Ocorre entretanto um estágio, à medida que o sistema aumenta, em que é impossível a recepção de tôda a informação em virtude de seu volume total. Ou os canais de registro não podem transportar tôda a informação, ou o observador, presenteado com tôda ela, é submerso. Quando isto ocorre, o que deve fazer? A resposta é clara: deve desistir de qualquer ambição de conhecer o sistema *todo*. Seu objetivo deve ser alcançar um conhecimento parcial que, embora parcial quanto ao todo, seja não obstante completo em si mesmo e suficiente para o seu propósito prático final.

Êsses fatos enfatizam importante questão de princípio no estudo do sistema muito grande. Diante de tal sistema, o observador deve tomar cuidado quando se referir ao "sistema", pois o têrmo será provàvelmente ambíguo, e talvez mesmo em alto grau. "O sistema" pode referir-se a todo o sistema, completamente à parte de qualquer observador que o estude — a coisa como ela é em si mesma; ou pode referir-se ao conjunto de variáveis (ou estados) com o qual um determinado observador está preocupado. Embora do ponto de vista filosófico o primeiro soe mais imponente, o pesquisador prático julga inevitàvelmente o segundo mais importante. Então, o segundo significado pode, êle mesmo, ser ambíguo se o observador particular não fôr especificado, pois o sistema pode ser qualquer das muitas submáquinas proporcionadas pelo homomorfismo. O fato de se distinguirem todos êstes significados se deve às diferentes propriedades que as submáquinas podem ter; de modo que, embora ambas as submáquinas possam ser abstraídas da mesma "coisa" real, uma proposição que é verdadeira numa pode ser falsa na outra.

Segue-se que não há uma coisa como *o* (único) comportamento de um sistema muito grande, à parte de um dado observador. Pois pode haver legìtimamente tantas submáquinas quanto observadores, e, portanto, quanto comportamentos, passíveis, na verdade, de serem diversos a ponto de serem incompatíveis se ocorrerem em um sistema. Assim o sistema de 5-estados com o gráfico cinemático

$$h \rightleftarrows k \qquad m \rightarrow l \rightleftarrows j$$

tem duas bacias, e sempre termina em um ciclo. A submáquina homomorfa (com estados r e s) dada pela transformação

$$\downarrow \underbrace{h \quad j \quad k \quad l}_{r} \quad \underbrace{m}_{s}$$

apresenta o gráfico $s \to r$, com uma bacia e nenhum ciclo. Ambas as proposições são verdadeiras, e são compatíveis porque se referem a sistemas diferentes (como os definidos na S.3.11).

O ponto de vista aqui assumido é que a ciência (como representada pelas descobertas do observador) não se interessa imediatamente em descobrir o que o sistema "realmente" é, mas em coordenar as várias descobertas do observador, sendo cada uma delas apenas uma porção, ou um aspecto, da verdade tôda.

Fôsse o engenheiro tratar a construção de pontes considerando cada átomo, acharia a tarefa impossível por seu próprio tamanho. Êle, portanto, não leva em conta o fato de suas vigas e blocos serem na realidade compostos, feitos de átomos, e os trata como unidades. Neste caso, a natureza das vigas permite a simplificação, e o trabalho do engenheiro tornar-se uma possibilidade prática. Veremos, portanto, que o método de investigar sistemas muito grandes estudando ùnicamente aspectos cuidadosamente selecionados dos mesmos é apenas o que se faz sempre na prática. Pretendemos aqui seguir o processo de modo mais rigoroso e consciente.

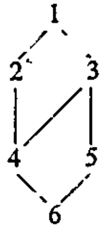
6.15. *A rêde.* As várias simplificações de uma máquina apresentam relações exatas uma com a outra. Assim, as seis formas do sistema do *Ex.* 6.13.2 são:

(1) a, b, c, d
(2) $a + b, c, d$
(3) $a, b, c + d$
(4) $a + b, c + d$
(5) $a, b + c + d$
(6) $a + b + c + d$

onde, e. g., "$a + b$" significa que a e b não são mais distinguíveis. Agora (4) pode ser obtida de (3) por uma fusão de a e b. Mas (5) não pode ser obtida de (4) por simples fusão, pois (5) utiliza uma distinção entre a e b que se perdeu em (4). Assim, verifica-se logo que a simplificação pode fornecer

de (1) : tôdas as outras cinco,
" (2) : (4) e (6),
" (3) : (4), (5) e (6)
" (4) : (6)
" (5) : (6)
" (6) : nenhuma

Estão dêste modo relacionadas as várias simplificações como no diagrama, no qual a linha descendente conecta a forma mais simples (abaixo) com a forma da qual se pode obtê-la diretamente (acima):



Êste diagrama é do tipo conhecido como rêde — uma estrutura muito estudada na matemática moderna. O que é de interêsse nesta Introdução é que o ordenamento acima precisa muitas idéias sôbre sistemas, idéias até agora consideradas apenas de modo intuitivo.

Tôda rêde possui um elemento único no tôpo (como 1) e um elemento único na base (como 6). Quando a rêde representa as simplificações possíveis de uma máquina, o elemento no tôpo corresponde à máquina com a distinção de cada estado; corresponde ao conhecimento do experimentador que anota cada distinção possível de seus estados. O elemento na base corresponde a uma máquina com todos os estados englobados; se o estado fôr denominado *Z*, a máquina tem como transformação apenas

$$\downarrow \begin{matrix} Z \\ Z \end{matrix}$$

Esta transformação é fechada, de modo que *algo* persiste (S.10.4), e o observador que vê apenas a êsse nível de discriminação pode dizer da máquina: ela "persiste", e nada mais. Tal persistência é, sem dúvida, a propriedade mais rudimentar de uma máquina, distinguindo-a do meramente evanescente. (A importância do "fechamento", acentuada nos primeiros capítulos, pode agora ser apreciada — corresponde à idéia intuitiva de que, para ser máquina, uma entidade deve pelo menos persistir.)

Entre êsses extremos residem as várias simplificações, em sua ordem natural e exata. Próximo ao tôpo estão aquelas que diferem da verdade plena apenas em algum aspecto insignificante. As que se encontram perto da base constituem as simplificações do tipo mais grosseiro. Próximo à base acha-se a simplificação do tipo da que reduziria todo um sistema econômico, com vasto número de partes, interatuantes, que atravessa um ciclo de comércio, à simples forma de dois estados:

$$\text{Alta} \rightleftarrows \text{Baixa}$$

Assim, *é possível ordenar e relacionar as várias simplificações de um sistema dinâmico.*

6.16. *Modelos.* Vemos agora mais claramente o que se entende por "modêlo". Tocamos no assunto na S.6.8, onde se verificou que três sistemas eram isomorfos e portanto passíveis de serem utilizados como representações um do outro. O assunto é de certa importância para aquêles que trabalham com sistemas biológicos, pois em muitos casos o uso de um modêlo é útil, quer para ajudar o pesquisador a pensar sôbre o tema, quer para agir como uma espécie de computador análogo.

O modêlo raramente será isomorfo com o sistema biológico: em geral será um homomorfismo dêste. Mas o próprio modêlo é raramente encarado em todos os seus pormenores práticos: de hábito, apenas determinado *aspecto* do modêlo é relacionado ao sistema biológico; assim, o rato de lata pode constituir um modêlo satisfatório de um rato vivo — desde que se ignore o caráter latífero de um e o proteínico de outro. Assim, o que comumente sucede é que os dois sistemas, o biológico e o modêlo, estão de tal sorte relacionados que um homomorfismo de um é isomorfo a um homomorfismo de outro. (Tal relação é simétrica, de modo que se justificaria chamá-lo "modêlo" do outro.) Quanto mais altos os homomorfismos em suas rêdes, tanto melhor e mais realista será o modêlo.

Neste ponto esta Introdução deve abandonar o tema do Homomorfismo. Dissemos o suficiente para mostrar os fundamentos do assunto e para indicar as linhas mestras de seu desenvolvimento. Mas tais desenvolvimentos pertencem ao futuro.

Ex. 1: Como se apresentaria o caso em que houvesse dois elementos no tôpo de duas rêdes isomórficas?

Ex. 2: Até que ponto o Rochedo de Gibraltar é um modêlo do cérebro?

Ex. 3: Até que ponto pode a máquina

$$\downarrow \begin{matrix} p & q & r \\ q & r & r \end{matrix}$$

proporcionar modelos para o sistema do Ex. 6.13.2?

A CAIXA MUITO GRANDE

6.17. Na seção anterior mostramos como as propriedades muitas vêzes atribuídas às máquinas também são atribuíveis às Caixas Pretas. De fato, na nossa vida cotidiana, trabalhamos muito mais com Caixas Pretas do que tendemos a pensar. Em primeiro lugar, estamos propensos a pensar, por exemplo, que uma bicicleta não é uma Caixa Preta, pois cada ligação é visível. Todavia, iludimo-nos. Em última análise, os vínculos entre o pedal e a roda são aquelas fôrças interatômicas que unem as partículas do metal; destas não vemos nada, e a criança que aprende a andar de bicicleta pode tornar-se capacitada com o mero conhecimento de que a pressão sôbre os pedais provoca o giro das rodas.

Para enfatizar que a teoria das Caixas Pretas é na prática coextensiva à da vida cotidiana, observemos que se um Conjunto de Caixas Pretas foi estudado por um observador, êle estará em condições de acoplá-las para formar uma maquinaria projetada. O método é direto: como o exame de cada Caixa forneceu a sua representação canônica

(S.6.5), faz-se possível acoplá-las, entradas a saídas, para constituir novos sistemas exatamente como os descritos na S.4.8.

O que sugerimos agora não é que as Caixas Pretas se comportam de algum modo como objetos reais mas que os objetos reais são todos, de fato, Caixas Pretas, e que, de fato, durante tôda a nossa vida operamos com Caixas Pretas. A teoria da Caixa Preta é simplesmente a teoria dos objetos ou sistemas reais, quando se dá uma atenção estrita ao problema que relaciona objeto e observador, de qual informação provém do objeto, e como é obtida. Destarte, a teoria da Caixa Preta é o simples estudo das relações entre o experimentador e o seu ambiente, quando se dá uma atenção especial ao fluxo de informação. "Um estudo do mundo real torna-se assim um estudo dos transdutores." (Goldman, *Information Theory*).

6.18. Antes de passarmos à frente, cabe esclarecer a questão das "propriedades emergentes".

Em primeiro lugar, estabeleçamos um fato. Se é dado um número de Caixas Pretas, e cada qual é estudada isoladamente até que se estabeleça a sua representação canônica, e se estão acopladas em um nôvo padrão com articulações conhecidas, segue-se então (S.4.8), que o comportamento do todo é determinado e previsível. Assim, um conjunto de Caixas Pretas, nestas condições, não apresentará propriedades "emergentes", i. e., nenhuma propriedade imprevisível a partir do conhecimento das partes e de seus acoplamentos.

O conceito de "emergência" nunca foi definido com precisão, mas os exemplos abaixo, provàvelmente, bastarão como base de debate:

(1) A amônia é um gás, bem como o ácido clorídrico. Quando misturamos os dois gases, o resultado é um sólido — propriedade que nenhum dos reagentes possuía.

(2) Carbono, hidrogênio e oxigênio são todos pràticamente sem gôsto; já o composto particular "açúcar" possui um gôsto característico que nenhum dêles antes possuía.

(3) Os vinte (ou tanto) aminoácidos de uma bactéria não possuem nenhum dêles a propriedade "auto-reprodutiva", enquanto o todo, com algumas outras substâncias, apresenta esta propriedade.

Comparando tais exemplos em pormenor com os processos de estudo e acoplamento de Caixas Pretas, ver-se-á logo que os exemplos postulam muito menos conhecimento de suas partes do que é postulado pelas Caixas Pretas. Assim, a previsão com respeito à amônia e ao ácido clorídrico não se baseia em um maior conhecimento de cada substância, do que o fato de ser ela um gás. Similarmente, dos vinte aminoácidos, tudo o que se pergunta é: "são auto-reprodutivos"? Se cada aminoácido fôsse tratado como uma Caixa Preta o exame seria bem mais minucioso. A entrada para uma molécula é o conjunto das fôrças elétricas e mecânicas, em tôdas as distribuições e combinações, que podem afetá-la; e a saída é o conjunto de todos os estados, elétricos e mecânicos, em que ela pode estar. Disponível êste conhecimento completo, o método da S.4.8 mostra como o comportamento de muitos aminoácidos acoplados é previsível; e dentre os comportamentos previstos estaria o da auto-reprodução do todo.

Veremos que a previsão do comportamento do todo pode basear-se no conhecimento completo ou incompleto das partes. Se o conhecimento fôr completo, então será o caso da Caixa Preta cuja representação canônica é conhecida, sendo as entradas ou circunstâncias tôdas aquelas que podem ser dadas por outras Caixas às quais deve ser acoplada. Quando o conhecimento das partes é assim completo, a previsão também pode ser completa, e não podem emergir propriedades extras.

Amiúde, todavia, o conhecimento não é, por não importa que razão, completo. Então a previsão tem de ser empreendida à base de conhecimento incompleto, e pode mostrar-se errônea. Algumas vêzes tudo o que se conhece sôbre as partes é que cada qual tem uma certa característica. É bem possível que não haja meio melhor de previsão afora o uso da extrapolação simples — para prever que o todo a tenha. Algumas vêzes isto se mostra justificado; assim, se um todo é constituído de três partes, cada qual de cobre puro, então será correto prevermos que o todo é de cobre puro. Mas, amiúde, o método falha, e podemos dizer de um nova propriedade, se nos agrada, que ela "emerge".

De fato, ocorre comumente que, quando o sistema se torna grande de modo que o âmbito de tamanho da parte para com o todo é muito grande, as propriedades do todo diferem muito das propriedades das partes. Sistemas biológicos em particular são os que têm maior probabilidade de apresentar a diferença. Devemos pois estar prevenidos contra a expectativa de que as propriedades do todo reproduzem as propriedades das partes, e vice-versa.

Os exemplos do sal amoníaco e do açúcar acima mencionados constituem exemplos simples, mas ocorrem casos mais complexos. Considere, por exemplo, o conceito de "localização" de alguma função em um sistema. Pode muito bem acontecer que a apreciação, feita quando a matéria foi examinada em pequena escala, seja completamente diferente daquela feita em grande escala. Assim, suponha que se pergunte se a indústria inglêsa de cerveja é localizada. O coletor do impôsto de consumo, conhecendo a respeito de cada edifício de seu distrito se é ou não parte do comércio de cerveja, dirá que a cerveja encontra-se sem dúvida "localizada". De outro lado, o cartógrafo da Inglaterra, incapaz de assinalar qualquer condado particular como sede de cervejaria, dirá que ela não está localizada. Ambos, na verdade, têm razão. O que permite a contradição é que, quando o intervalo das medidas é grande, o que é verdadeiro num extremo da escala pode ser falso no outro.

Outro exemplo que mostra quão contraditórias podem ser as propriedades no pequeno e no grande surge numa peça comum de elástico. Durante anos os químicos-físicos procuraram a causa da contratibilidade da molécula. Vieram a descobrir em seguida que estavam cometendo exatamente o engano que esta seção tenta evitar. Sabe-se hoje que a molécula de borracha não possui contratibilidade inerente: se esticarmos uma delas e a soltarmos, nada ocorrerá! Por que então se contrai a borracha? A questão é que "esticar borracha" não é "esticar *uma* molécula. . ."; as moléculas, quando há mais de uma, empurram umas às outras e, destarte, forçam a maioria a tomar comprimentos menores do que seu máximo. O resultado é que ocorre um encurtamento precisamente como se, em uma praia apinhada, uma corda de cinqüenta pés de comprimento fôsse esticada: após alguns minutos as pontas encontrar-se-iam a menos de cinqüenta pés de distância uma da outra! Quase não são necessários exemplos, pois se trata de estabelecer o ponto meramente negativo de que em um sistema grande não há necessidade *a priori* de que as propriedades do todo sejam simples cópia das propriedades das partes. (S.7.3 acrescenta alguns exemplos adicionais.)

6.19. À medida que o sistema se torna mais amplo, mais laborioso, na aplicação, se torna o método fundamental de estudo (S.6.3). Eventualmente a quantidade de trabalho requerido vem a ser proibitiva. O que deve então fazer o observador? A pergunta é de grande importância nas ciências biológicas, quer sociológicas, quer zoológicas, pois na verdade o tamanho e a complexidade dos sistemas é grande.

A mesma dificuldade sucedeu em outras ciências. Assim, embora a teoria newtoniana tivesse, em princípio, resolvido todos os problemas gravitacionais, no entanto sua aplicação para três corpos é muito complexa e é proibitivamente trabalhosa para meia dúzia. Todavia, os astrofísicos querem propor indagações sôbre o comportamento de aglomerados de estrêlas com 20.000 membros! O que fazer?

A experiência indicou que em tais casos o cientista deve tomar cuidado com a pergunta que faz. Deve inquirir sôbre aquilo que *efetivamente* deseja saber, e não sôbre aquilo que julga desejar. Assim, o principiante dirá simplesmente que pretende saber o que fará o conglomerado, i. e., estará interessado nas trajetórias das componentes. Se êste conhecimento, entretanto, pudesse ser dado a êle, assumiria a forma de numerosos volumes repletos de tabelas numéricas, e êle viria então a perceber que não desejava na realidade tudo aquilo. De fato, acontece em geral que a questão significativa é algo mais simples, tal como "contrair-se-á o aglomerado numa esfera, ou espalhar-se-á como um disco?"

Os físicos, conduzidos originalmente por Poincaré, dispõem agora de um método bem desenvolvido para lidar com semelhantes assuntos — o da topologia. Por seu intermédio, é possível responder sem ambigüidade a questões simples, de modo que as complicações que esmagariam o observador jámais aparecem.

Um método similar, aplicado a equações diferenciais complicadas, permite deduzir a maior parte dos aspectos principais das soluções, nos casos onde as soluções completas seriam tão complicadas que não se poderia manejá-las. Trata-se da chamada teoria da "estabilidade" dessas equações.

O que nos importa aqui é que tais métodos existem. Sugerem que se uma Caixa Preta (como o cérebro) possui um número demasiado grande de variáveis para que o estudo pormenorizado seja prático, então deverá ser possível a um psicólogo com mentalidade cibernética inventar uma abordagem "topológica" que o capacite a obter a informação que efetivamente deseja (não aquela que pensa desejar!) sem ficar perdido com detalhes inúteis. Lewin tentou semelhante psicologia; mas na década de 30 a topologia ainda não estava desenvolvida a ponto de ser um instrumento útil. Na década de 50, todavia, foi bem mais desenvolvida, pela escola francesa, particularmente na forma publicada sob o pseudônimo de *Nicholas Bourbaki.* Por fim temos diante de nós a possibilidade de uma psicologia que seja ao mesmo tempo rigorosa e prática.

A CAIXA INCOMPLETAMENTE OBSERVÁVEL

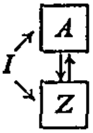
6.20. Até aqui, neste capítulo, admitimos que o observador da Caixa Preta possui os meios necessários para observar tudo o que pertence ao estado da Caixa, de maneira que se assemelha a um Maquinista de Navio (S.6.2) diante de um conjunto completo de mostradores. Muitas vêzes, entretanto, não acontece assim — alguns mostradores estão ocultos ou faltam — e uma importante parte da teoria da Caixa Preta dedica-se a esclarecer que peculiaridades surgem quando o observador pode observar apenas certas componentes do estado inteiro.

Os desenvolvimentos teóricos são amplos e pouco explorados. Serão quase com certeza de relevância na psicologia; pois, para o psicólogo, o objeto individual, seja uma pessoa neurótica ou um rato no labirinto, é em larga medida um sistema não inteiramente observável; uma vez que os eventos no cérebro do objeto não são diretamente observáveis na sessão experimental ou clínica.

Cabe notar que, tão logo algumas variáveis do sistema se tornam inobserváveis, o "sistema" representado pelo remanescente pode desenvolver notáveis e até mesmo miraculosas propriedades. Uma ilustração corriqueira do fato é dada no conjuro, que leva a cabo (aparentemente) o miraculoso, simplesmente porque nem tôdas as variáveis significativas são observáveis. É possível que algumas propriedades "miraculosas" do cérebro — de mostrar "previsão", "inteligência" etc. — sejam miraculosas apenas porque não estivemos até agora habilitados a observar os eventos em *tôdas* as variáveis significativas.

6.21. Como exemplo da profunda modificação que pode ocorrer na opinião do observador acêrca de um mecanismo se parte dêle se faz inacessível à observação direta, consideremos o seguinte caso:

Admitamos que o observador esteja estudando uma Caixa Preta formada de duas partes interatuantes, *A* e *Z*. Ambas são afetadas pela entrada comum *I*. (Observe-se que as entradas de *A* são *I* e *Z*.)



Suponhamos que a questão importante seja saber se a parte *A* apresenta ou não algum comportamento característico *B* (i. e., segue trajetória *B*). Suponhamos que isto seja apresentado (seguido) apenas pela ocorrência simultânea de

(1) *I* no estado α

e (2) *Z* no estado *y*.

Suponhamos que *Z* esteja no estado *y* apenas *depois* de *I* assumir um valor especial μ.

Nós (o autor e o leitor) somos oniscientes, pois conhecemos tudo acêrca do sistema. Vejamos, usando o conhecimento total, como dois observadores (Um e Dois) podem chegar a opiniões diversas se tiverem diferentes podêres de observação.

O observador Um pode ver, como nós, os valores tanto de *A* quanto de *Z*. Êle estuda as várias combinações capazes de conduzir ao aparecimento de *B*, e informa que *B* aparece sempre que o todo exibe um estado com *Z* em *y* e uma entrada em α. Assim, dado que a entrada está em α, êle informa a ocorrência de *B* se *Z* está ou não agora em *y*.

O observador Dois está prejudicado — consegue ver apenas *I* e *A*, e não *Z*. Verificará que o conhecimento do estado de *A* e de *I* não basta para capacitá-lo a predizer seguramente se *B* será apresentado; (pois algumas vêzes *Z* se encontrará em *y* e outras, em algum outro estado). Se, porém, Dois volve sua atenção a eventos *anteriores* em *I*, verificará que pode prever o aparecimento de *B* com precisão. Pois se *I* apresenta sucessivamente os valores μ, α, então o comportamento *B* se apresentará e não outro. Assim, dado que a entrada está em α, êle informa a ocorrência de *B* se *I* teve anteriormente o valor μ.

Dêste modo, Dois, sendo incapaz de observar Z diretamente, pode não obstante tornar o todo previsível, *levando em conta valores anteriores daquilo que êle* pode *observar.* Isto se deve à existência da correspondência:

$$I \text{ em } \mu \text{ anteriormente} \leftrightarrow Z \text{ em } y \text{ agora}$$

$$I \text{ não em } \mu \text{ anteriormente} \leftrightarrow Z \text{ não em } y \text{ agora.}$$

Como esta correspondência é um-um, a informação sôbre o estado de I um passo antes e a informação sôbre o estado de Z agora são *equivalentes,* e uma pode substituir a outra; pois conhecer uma é conhecer a outra.

Se Um e Dois são briguentos, podem agora entrar em disputa. Um pode sustentar que o sistema não mostra "memória", isto é, seu comportamento não requer referência ao passado, porque o aparecimento do comportamento B pode ser inteiramente responsabilizado pelo *presente* estado do sistema (em I, A e Z). Dois pode negá-lo e indicar que o sistema de I e A só se apresenta como determinado quando os valores passados de I são levados em conta, isto é, quando há recurso a alguma forma de "memória".

Sem dúvida, não precisamos tomar partido. Um e Dois falam de sistemas diferentes (de $I + A + Z$ ou de $I + A$), de tal maneira que não surpreende o fato de que possam fazer afirmações diferentes. O que incumbe notar aí é que Dois utiliza o recurso à "memória" como substitutivo para a sua incapacidade de observar Z.

Assim obtemos a regra geral: *Se um determinado sistema é apenas parcialmente observável, e por isto se torna (para aquêle observador) não previsível, o observador pode ser capaz de restaurar a previsibilidade levando em conta a história passada do sistema, i. e., pressupondo a existência, no seu interior, de alguma forma de "memória".*

O argumento é sem dúvida geral, e aplica-se igualmente bem se o evento (μ) especial e anterior ocorreu não um, porém muitos passos atrás. Assim, em geral, se acontecimentos anteriores $E_1, E_2, \ldots, E_k$ deixam traços $T_1, T_2, \ldots, T_k$ respectivamente, que persistem; e se depois o resto do sistema produz comportamentos $C_1, C_2, \ldots, C_k$ correspondentes ao valor de T, então os vários comportamentos podem ser relacionados, ou explicados por:

(1) o *presente* valor de T, caso em que não há necessidade de invocar qualquer "memória", ou

(2) o valor *passado* de E, caso em que o observador é compelido a postular alguma forma de "memória" no sistema.

Assim, *a posse de "memória" não é uma propriedade inteiramente objetiva de um sistema* — trata-se de uma relação entre um sistema e um observador; e a propriedade mudará com as variações no canal de comunicações entre êles.

Destarte, invocar "memória" em um sistema como uma explicação de seu comportamento equivale a declarar que não se pode observar o sistema completamente. As propriedades da "memória" não são as da "coisa" simples, porém de sua "codificação" mais sutil.

* *Ex.* 1: Prove a proposição (*Design*... S.19.22) segundo a qual em um sistema absoluto pode-se evitar referência direta a alguma das variáveis, desde que recorramos a derivados das variáveis restantes para substituí-las.

* *Ex.* 2: Prove a mesma proposição com respeito a equações com diferenças finitas.

* *Ex.* 3: Mostre que, se um sistema tem n graus de liberdade, cumpre, em geral, efetuar sempre, no mínimo, n observações, cada qual do tipo "no instante t_i a variável x tinha o valor X_i", se o comportamento subseqüente deve ser previsível.

6.22. Um exemplo claro de como a presença da "memória" se relaciona à observabilidade de uma parte é fornecido pelo calculador digital com fita magnética. Suponhamos, por razões de simplicidade, que em um certo momento o calculador produza um 1 ou um 2, conforme a fita, em um certo ponto, esteja magnetizada + ou —, respectivamente. O ato de magnetização ocorreu, digamos, há dez minutos, e se a fita foi magnetizada + ou — dependeu do operador ter fechado ou não, respectivamente, um comutador. Há, assim a correspondência

$$\begin{array}{ll} \text{comutador fechado} & \leftrightarrow + \leftrightarrow 1 \\ \text{comutador aberto} & \leftrightarrow - \leftrightarrow 2 \end{array}$$

Um observador que veja agora a fita magnética pode argumentar que qualquer referência ao passado é desnecessária, pois pode responder pelo comportamento da máquina (i. e., se ela produzirá 1 ou 2) por seu estado *agora*, examinando o que a fita traz *agora*. Assim, sabermos que ela traz um +, agora, basta para permitir a previsão de que o próximo estado da máquina será 1.

Por outro lado, um observador a quem não seja dado observar a fita pode prever o seu comportamento apenas com referência ao que foi feito ao comutador dez minutos atrás. Êle insistirá que a máquina possui "memória".

Os dois observadores não se encontram efetivamente em conflito, como podemos ver de pronto quando compreendemos que estão falando de duas "máquinas" não idênticas. Para o primeiro observador, "a máquina" significa "calculador + fita + comutador"; para o segundo, significa "calculador + comutador". *Estão falando de sistemas diferentes.* (Mais uma vez é preciso sublinhar que em sistemas complexos a mera referência ao objeto material não basta, amiúde, para definir de modo adequado o sistema em discussão.) (Compare S.6.14, 12.9.)

Em essência, a mesma diferença pode surgir em um sistema mais biológico. Assim, suponhamos que eu esteja em casa de um amigo e, quando um carro passa na rua, o cachorro corra para um canto da sala e encolha-se. Para mim êste comportamento não tem causa nem explicação. Então o meu amigo diz: "Êle foi atropelado por um carro seis meses atrás". O comportamento fica agora explicado em referência a um evento ocorrido há seis meses. Se dissermos que o cachorro denota "memória", reportamo-nos a um fato bastante semelhante — que seu comportamento pode ser explicado, não com referência a seu estado agora mas ao que era seu estado há seis meses. Alguém, descuidado, dirá que o cachorro "tem" memória, e pensará a respeito do cachorro como dotado de alguma *coisa,* como se fôsse dotado de uma mecha de cabelos prêtos. Poder-se-ia então ficar tentado a começar a procurar á coisa; e poder-se-ia descobrir que esta "coisa" possui algumas propriedades muito curiosas.

De fato, a "memória" não é algo objetivo que um sistema possui ou não; trata-se de um conceito que o *observador* invoca para preencher a lacuna que surge quando parte do sistema é inobservável. Quanto menos variáveis observáveis, tanto mais será obrigado o observador a considerar que eventos do passado desempenham um papel no comportamento do sistema. Destarte, a "memória" no cérebro é apenas parcialmente objetiva. Não é de estranhar que suas propriedades fôssem julgadas algumas vêzes inusitadas e até mesmo paradoxais. Sem dúvida o assunto requer um reexame completo a partir dos primeiros princípios.

Segunda parte

VARIEDADE

Agora o soldado compreendeu quão excelente isqueiro era aquêle. Se êle o riscava uma vez, aparecia o cachorro que sentava sôbre a arca de moedas de cobre; se riscava duas, aparecia o cachorro da arca de prata; e se riscava três, então aparecia o cachorro que tinha o ouro.

("O Isqueiro")

Quantidade de Variedade

7\. 7. 1. Na Primeira Parte consideramos as propriedades principais da máquina, admitindo usualmente ter diante de nós a coisa real, sôbre a qual queríamos fazer alguma afirmação definida, referente àquilo que está sendo feito por ela aqui e agora. Todavia, para progredirmos na cibernética, deveremos estender o nosso âmbito de consideração. As questões fundamentais em matéria de regulagem e contrôle podem ser respondidas apenas quando estivermos capacitados a considerar o conjunto mais amplo daquilo que a máquina poderia fazer, quando é dado ao têrmo "poderia" alguma especificação exata.

Através de tôda a Segunda Parte, portanto, consideraremos sempre *um conjunto* de possibilidades. O estudo nos introduzirá nos problemas da informação e comunicação, bem como no modo de sua codificação quando passam pelo mecanismo. Trata-se de um estudo essencial ao entendimento completo da regulagem e contrôle. Partiremos das considerações mais básicas ou elementares possíveis.

7\. 2. Uma segunda razão pela qual consideraremos *um conjunto* de possibilidades é que a ciência está pouco interessada em algum fato válido apenas para um único experimento, levado a efeito num único dia; procura sempre generalizações, afirmações que serão verdadeiras para todo um conjunto de experiências, realizadas numa variedade de laboratórios e numa variedade de ocasiões. A descoberta da lei do pêndulo por Galileu teria sido de pouco interêsse se fôsse válida apenas para aquêle pêndulo, naquela tarde. Sua grande importância reside precisamente no fato de ser verdadeira para um grande âmbito de espaço, tempo e materiais. A ciência procura o repetitivo (S.7.15).

7.3. Tal fato, que é o *conjunto* ao qual a ciência se refere, é amiúde obscurecido por uma maneira de falar. "O íon cloro ...", diz o conferencista, quando claramente êle aplica sua proposição a todos os íons cloro. Do mesmo modo recebemos referências ao motor a gasolina, à criança em crescimento, ao bêbado crônico, e a outros objetos no singular, quando a referência é de fato ao conjunto de todos êstes objetos.

Sucede algumas vêzes que uma proposição é igualmente verdadeira para o indivíduo e para o conjunto: "o elefante come com a tromba", por exemplo. Mas a trivialidade de semelhante aplicação dupla não nos deveria induzir a passar por cima do fato de que alguns tipos de proposições são aplicáveis apenas ao conjunto (ou apenas ao indivíduo), tornando-se equívocos e fonte de confusão se aplicados a outro. Assim, um grama de ácido iodídrico aquecido, em algum momento particular, pode muito bem estar 37 por cento ionizado; no entanto, esta proposição não se aplica às moléculas individuais, as quais estão tôdas ou totalmente ionizadas ou não; o que é verdade para o conjunto é falso para os indivíduos. Do mesmo modo, os membros conservadores do Parlamento Inglês constituem, no momento, a maioria; a proposição não tem sentido se aplicada ao membro como indivíduo. O pneu de um carro, por exemplo, pode muito bem estar rodando para oeste a 50 milhas por hora, quando considerado como um todo; todavia, a porção em contato com a estrada está imóvel, enquanto a do tôpo roda para oeste precisamente a 100 milhas por hora, e de fato nenhuma única partícula no pneu se comporta como o todo.

Vinte milhões de mulheres podem ter trinta milhões de filhos, mas apenas através de uma perigosa distorção de linguagem nos é dado dizer que a Sra. Everyman tem um filho e meio. É possível algumas vêzes enunciar a proposição sem causar confusão sòmente porque aquêles que devem agir, os que precisam providenciar escolas para os filhos, por exemplo, sabem que meio filho não é uma anomalia, mas sim um conjunto de 10 milhões de filhos.

Aceitemos então como básico que uma proposição verdadeira sôbre um **conjunto** pode ser verdadeira ou falsa (ou talvez sem sentido) se aplicada aos **elementos** do conjunto.

Ex.: As proposições abaixo aplicam-se a "O Gato", ou à espécie *Felis domestica* ou ao gato do vizinho. Considere a aplicabilidade de cada proposição (i) à espécie, (ii) ao indivíduo:

1. Tem um milhão de anos,
2. É macho,
3. Hoje se encontra em todos os continentes,
4. Luta com os seus irmãos,
5. Cêrca de metade é constituída de fêmeas,
7. Relaciona-se estreitamente aos *Ursidae*.

7.4. *Probabilidade*. O exercício que acabamos de dar ilustra a confusão e o absurdo que podem ocorrer quando um conceito que pertence devidamente ao conjunto é aplicado impròpriamente ao indivíduo, e vice-versa. Um exemplo notável ocorre quando, do conjunto inteiro, alguma *fração* tem uma propriedade particular. Assim, de 100 homens numa aldeia, 82 podem estar casados. A fração 0,82 é òbviamente relevante para o conjunto, mas tem pouco sentido para qualquer elemento individual, pois cada um é ou não casado. Por mais de perto que se examine cada homem, não se encontrará nenhum "0,82" a seu respeito; e se êle se mudar para outra aldeia, a cifra pode variar sem que êle tenha absolutamente variado. Sem dúvida, o "0,82" é uma propriedade da aldeia, não do indivíduo.

No entanto, julgou-se algumas vêzes conveniente pretender que a fração apresente um significado para o indivíduo, e pode-se dizer que qualquer pessoa tem uma "probabilidade" 0,82 de estar casada. Êste modo de dizer é inócuo, desde que se tenha em mente que a proposição, a despeito de sua aparente referência ao indivíduo, é de fato uma proposição acêrca da aldeia. Esqueça-se disto e surgirá uma multidão de "paradoxos", tão insensatos e tolos quanto a tentativa de ensinar o "meio"-filho. Adiante (no Capítulo 9) teremos de usar o conceito de probabilidade em conjunto com o de máquina; cumprirá ter sempre em mente a origem e a natureza real do conceito.

7. 5. *Comunicação.* Outra questão em que o conceito de *conjunto* desempenha parte essencial é o de "comunicação", especialmente na teoria desenvolvida por Shannon e Wiener. A princípio, quando alguém pensa, digamos, em um telegrama que chega, percebe apenas a singularidade de *um* telegrama. No entretanto, o ato de "comunicação" implica necessàriamente a existência de um *conjunto* de possibilidades, i. e., mais de uma, como mostrará o exemplo seguinte.

Um prêso deve ser visitado por sua espôsa, a quem não se permite enviar-lhe qualquer mensagem, por mais simples que seja. Entende-se que, antes da prisão, talvez tenham estabelecido algum código simples. Na visita, ela solicita permissão de enviar-lhe uma xícara de café; admitindo que a bebida não seja proibida, como assegurará o carcereiro que dessa maneira não se transmitirá qualquer mensagem codificada? Êle sabe que a mulher está ansiosa por informar o marido da captura ou não de seu cúmplice.

O carcereiro raciocinará mais ou menos como segue: "Ela pode ter feito um arranjo de modo a informá-lo conforme o café venha ou não adoçado — posso impedi-la acrescentando simplesmente muito açúcar e contando-lhe depois o que fiz. Ela pode ter feito um arranjo de modo a informá-lo pelo envio ou não de uma colher — posso impedi-lo retirando qualquer colher e depois notificando-lhe que o Regulamento proíbe quaisquer colheres. Ela pode fazê-lo mandando chá em vez de café — não, isto não funciona porque, como êles sabem, a cantina fornece café apenas uma vez por dia". Assim, prosseguem as suas cogitações; o digno de nota é que a cada possibilidade êle tenta interromper intuitivamente a comunicação impondo uma redução das possibilidades para uma — sempre adoçado, jamais uma colher, apenas café, e assim por diante. Tão logo as possibilidades se restrinjam a uma, a comunicação estará bloqueada, e a bebida privada de seu poder de transmitir informação. A transmissão (e o armazenamento) de informação está, assim, essencialmente relacionada à existência de um *conjunto* de possibilidades. O exemplo pode tornar plausível a proposição; de fato, ela é também sustentada por todo o trabalho realizado na moderna teoria da comunicação, que demonstrou de modo abundante quão essencial e quão frutífero é o conceito do conjunto de possibilidades.

Assim, a comunicação necessàriamente demanda um conjunto de mensagens. Não sòmente isso, como também a informação veiculada por uma mensagem particular depende do conjunto de onde provém. *A informação transmitida não é uma propriedade intrínseca da mensagem individual.* Que isto é assim pode-se ver considerando o seguinte exemplo. Dois soldados são aprisionados por dois países inimigos *A* e *B*, cada qual por um dêles; e cada uma das espôsas recebe posteriormente uma breve mensagem "Estou bem". Sabe-se, contudo, que o país *A* permite que o prisioneiro escolha entre

Estou bem,

Estou ligeiramente doente,

Estou sèriamente doente,

enquanto o país *B*, permite apenas a mensagem

Estou bem

significando "Estou vivo". (No conjunto também existe a possibilidade de "nenhuma mensagem".) As espôsas estarão por certo cientes de que, embora cada uma tenha recebido a mesma frase, as informações que elas receberam não são de modo algum idênticas.

A partir destas considerações, segue-se que, no presente livro, devemos desistir de pensar, como o fazemos enquanto indivíduos, acêrca "desta mensagem". Devemos tornar-nos cientistas, nos apartarmos de nós próprios, e pensar em "pessoas recebendo mensagens". E isso significa que devemos voltar a nossa atenção de uma mensagem individual qualquer para o conjunto de tôdas as possibilidades.

VARIEDADE

7. 6. Em tôda esta Parte, estaremos muito interessados na questão de, dado um conjunto, quantos elementos distinguíveis êle contém. Assim, se se ignora a ordem de ocorrência, o conjunto

$$c, b, c, a, c, c, a, b, c, b, b, a$$

que contém doze elementos, contém apenas três elementos *distintos a, b* e *c*. Diremos que tal conjunto possui uma **variedade** de três elementos. (Uma qualificação é acrescentada na seção seguinte.)

Embora esta contagem possa parecer simples, é necessário cuidado. Assim o semáforo de dois braços pode dispor cada braço, independentemente do outro, em qualquer de oito posições; destarte, os dois braços proporcionam 64 combinações. À distância, contudo, os braços não têm individualidade — "braço *A* levantado e braço *B* abaixado" não pode ser distinguido de "braço *A* abaixado e braço *B* levantado" — de modo que para o observador distante são distinguíveis apenas 36 posições, sendo a variedade de 36 e não de 64.

Cabe assinalar que a variedade do conjunto não constitui uma propriedade intrínseca do conjunto: para que a variedade seja bem definida, talvez seja preciso especificar o observador e seus podêres de discriminação.

Ex. 1: Podendo escolher 26 letras, quantas combinações de três letras são possíveis para o registro de um motor?

Ex. 2: Se um granjeiro pode distinguir 8 raças de pintos, mas não pode separá-los por sexo, enquanto a sua espôsa pode fazer esta identificação mas nada conhece acêrca das raças, quantas classes distintas de pintos podem êles distinguir quando trabalham em conjunto?

Ex. 3: Um espião no interior de uma casa de quatro janelas dispostas retangularmente deve fazer sinais para o mar, durante a noite, em cada uma das janelas, mostrando ou não uma luz. Quantos modos podem ser apresentados se, no escuro, não pode ser percebida a posição das luzes com relação à casa?

Ex. 4: Bactérias de diferentes espécies diferem na sua capacidade de metabolizar várias substâncias: assim, a lactose é destruída por *E. coli* mas não por *E. typhi*. Se um bacteriologista possui dez substâncias disponíveis, podendo cada qual ser destruída ou não por uma dada espécie, qual o número máximo de espécies que pode distinguir?

Ex. 5: Se cada Teste de Personalidade pode distinguir cinco graus de sua própria característica, qual o número mínimo necessário de semelhantes testes para distinguir os 2.000.000.000 de indivíduos da população mundial?

Ex. 6: Num conhecido truque de baralho, o prestidigitador identifica uma carta assim: Mostra 21 cartas a um espectador que seleciona, mentalmente, uma delas sem revelar a escolha. O prestidigitador manipula então as 21 cartas com as faces para baixo em três pilhas iguais com as faces voltadas para o espectador, e pergunta-lhe qual a pilha que contém a carta escolhida; depois, toma de nôvo as cartas, manipula-as e as dispõe em três pilhas iguais, e pergunta de nôvo em que pilha está a carta selecionada; e similarmente para uma terceira manipulação. Depois o prestidigitador nomeia a carta selecionada. Que variedade há na (i) indicação do espectador, (ii) na seleção final do prestidigitador?

Ex. 7: (Continuação.) De fato, 21 cartas não constituem o número máximo que se poderia usar. Qual seria o máximo, se as outras condições ficarem inalteradas?

Ex. 8: (Continuação.) Quantas vêzes teria o espectador de indicar qual dos três montes possui a carta selecionada se o prestidigitador precisa estar apto a identificar a carta correta no maço todo de 52 cartas?

Ex. 9: Se o grupo sangüíneo de uma criança fôr O e o de sua mãe também fôr O, quanta variedade haverá nos grupos de seus possíveis pais?

7.7. Percebeu-se, por certo, que muitos dos exercícios envolviam a determinação de produtos e altas potências. Tais cálculos são amiúde facilitados pelo uso dos logaritmos. Pressupomos que o leitor esteja familiarizado com as suas propriedades básicas, mas daremos uma fórmula de referência. Se são disponíveis apenas logaritmos na base *a*, e queremos determinar logaritmos na base *b* de algum número *N*, então

$$\log_b N = \frac{\log_a N}{\log_a b}$$

Em particular, $\log_2 N = 3{,}322 \log_{10} N$.

A palavra **variedade** em relação ao conjunto de elementos distinguíveis, será utilizada para significar ou (*i*) o número de elementos distintos, ou (*ii*) o logaritmo de base 2 do número, indicando o contexto o sentido utilizado. Quando a variedade é medida na forma logarítmica sua unidade é o "bit", uma contração inglêsa das palavras "BInary digiT" (dígito binário). Assim a variedade de sexos é 1 bit, e a variedade das 52 cartas do baralho é 5,7 bits, porque $\log_2 52 = 3{,}322 \log_{10} 52 = 3{,}322 \times 1{,}7160 = 5{,}7$. A vantagem principal dêste modo de computar é que as combinações multiplicativas se combinam agora por simples adição. Assim no *Ex.* 7.6.2 o granjeiro é capaz de distinguir uma variedade de três bits, sua mulher de 1 bit, e os dois juntos 3 + 1 bits, isto é, 4 bits.

Dizer que um conjunto não apresenta "nenhuma" variedade, que todos os elementos são de um só tipo, é, sem dúvida, medir a variedade logarìtmicamente; pois o logaritmo de 1 é 0.

Ex. 1: Quanta variedade em bits, distingue cada substância no Ex. 7.6.4.

Ex. 2: No Ex. 7.6.5: (i) quanta variedade em bits distingue cada teste? (ii) Qual é a variedade em bits de 2.000.000.000 de indivíduos distinguíveis? A partir destas duas variedades confira sua resposta prévia.

Ex. 3: Qual é a variedade em bits das 26 letras do alfabeto?

Ex. 4: Qual é a variedade em bits de um bloco de cinco letras (não obrigadas a formar uma palavra)? Confira a resposta, determinando o número de tais blocos, e depois a variedade.

Ex. 5: A questão só pode ser respondida por um Sim ou Não; (i) que variedade há na resposta? (ii) E em vinte destas respostas feitas independentemente?

Ex. 6: (Continuação.) Quantos objetos são distinguíveis em vinte perguntas, cada qual podendo ser respondida apenas por Sim e Não?

Ex. 7: Considere uma transformação univalente e fechada sôbre 6 estados:

$$\downarrow \begin{matrix} a & b & c & d & e & f \\ ? & ? & ? & ? & ? & ? \end{matrix}$$

onde cada ponto de interrogação deve ser substituído por uma letra. Caso não haja restrição para a substituição, qual a variedade (logarítmica) que há no conjunto de tôdas as possíveis transformações dêste tipo?

Ex. 8: (Continuação.) Se a transformação fechada possui n estados que variedade existe nela?

Ex. 9: Se o vocabulário de uma língua possui uma variedade de 10 bits por palavra, qual a capacidade de armazenamento de um discurso de 10 minutos em um disco, admitindo que o discurso é de 120 palavras pór minuto?

Ex. 10: (Continuação.) Como se compara isso à capacidade de uma página impressa de jornal (aproximadamente)?

Ex. 11: (Continuação.) Se é preciso 10 minutos para ler um panfleto em voz alta, como se compara sua variedade com a de um disco?

Ex. 12: A que conjunto e refere o Ex. anterior?

Ex. 13: Pode um evento simplesmente negativo — uma lâmpada não-acesa, um neurônio não-excitado, um telegrama que não chega — ser usado como uma contribuição à variedade?

COERÇÃO

7.8. Um conceito dos mais importantes, com o qual teremos muito a ver posteriormente, é o de **coerção.** Trata-se de uma *relação* entre dois conjuntos, e ocorre quando a variedade que existe sob uma condição é menor do que a variedade que existe sob outra. Assim, a variedade nos sexos humanos é de 1 bit; se uma certa escola admite apenas meninos, a variedade nos sexos dentro da escola é zero; como 0 é menor do que 1 existe coerção.

Outro exemplo bem conhecido é dado pelos semáforos de tráfego, que possuem três lâmpadas e que realizam a seqüência (onde + representa luz e 0 a ausência de luz):

	(1)	(2)	(3)	(4)	(1)	...
Vermelho:	+	+	0	0	+	...
Amarelo:	0	+	0	+	0	...
Verde:	0	0	+	0	0	...

Utilizam-se assim quatro combinações. Note-se que o Vermelho é, nos vários turnos, tanto luminoso quanto não-luminoso; o mesmo acontece com o Amarelo e com o Verde. Assim, se as três luzes pudessem variar independentemente, apareceriam oito combinações. De fato, quatro apenas são usadas; como quatro é menor do que oito, a coerção está presente.

7. 9. Uma coerção pode ser tênue ou severa. Suponhamos, por exemplo, que um pelotão de soldados deva formar em uma única fileira, e que "independência" signifique que podem dispor-se em qualquer ordem, à sua vontade. É possível introduzir várias coerções na ordem de ficar em forma, e tais coerções podem diferir em seu grau de restrição. Assim, se fôsse ordenado que nenhum homem se colocasse próximo de outro cujo aniversário caísse no mesmo dia, a coerção seria tênue, pois de todos os possíveis arranjos poucos seriam excluídos. Se, todavia, se ordenasse que nenhum homem se postasse de pé à esquerda de outro mais alto que êle próprio, a coerção seria severa; pois, de fato, possibilitaria apenas uma ordem única de colocação (a menos que dois homens fôssem exatamente da mesma altura). A intensidade da coerção é assim apresentada pela redução que provoca no número de possíveis arranjos.

7. 10. As coerções, ao que parece, não são classificáveis de qualquer modo simples, pois englobam todos os casos nos quais um conjunto, por qualquer razão, é menor do que poderia ser. Aqui, posso discutir apenas certos tipos salientes por sua importância e por seu caráter comum, deixando ao leitor o acréscimo de outros tipos, caso seu interêsse especial o leve a êles.

7.11. *Coerção em vetores.* Às vêzes os elementos de um conjunto são vetores, e têm componentes. Assim, o sinaleiro de tráfego da S.7.8. era um vetor de três componentes, cada qual podendo assumir dois valores. Em tais casos uma coerção comum e importante sucede se o número real de vetores que ocorre sob condições definidas é menor que o número total de vetores possíveis sem condições (i.e., quando cada componente assume seu pleno intervalo de valores independentemente dos valores assumidos pelas outras componentes). Assim, no caso das luzes de tráfego, quando acesos ao mesmo tempo o Vermelho e o Amarelo, só o Verde pode estar apagado, estando ausente o vetor com Verde.

Deve-se notar que um conjunto de vetores proporciona muitas variedades, que é preciso identificar individualmente se não se quer confusão. Considere, por exemplo, o vetor da S.3.5:

(Ano do carro, Potência, Côr).

A primeira componente possui alguma variedade definida, e do mesmo modo a segunda e a terceira. As três variedades não precisam ser iguais. E a variedade no conjunto dos vetores será de nôvo diferente.

A variedade no conjunto dos vetores tem, no entanto, uma relação invariável com respeito às variedades das componentes — não pode exceder a soma delas (se pensamos em logaritmos, como convém mais aqui). Assim, se um carro pode ser de qualquer dentre os 10 anos, de 8 c. v., e de 12 côres, então a variedade nos tipos de carro não pode exceder 3,3 + 3,0 + 3,6 bits, i. e., 9,9 bits.

7.12. As componentes são **independentes** quando a variedade no todo de algum dado conjunto de vetores é igual à soma (logarítmica) das variedades nas componentes individuais. Se verificarmos, por exemplo, que todos os 960 tipos de carro podem ser observados dentro de algum conjunto definido de carros, dir-se-ia então que as três componentes são "independentes" ou que "variam independentemente", dentro dêste conjunto definido.

Cumpre reparar que semelhante proposição se refere essencialmente àquilo que, segundo se observa, ocorre dentro do conjunto; não precisa conter nenhuma referência a qualquer causa suposta para a independência (ou para a coerção).

Ex. 1: Quando Pantagruel e seu círculo debatiam se era ou não chegado o momento de Panurge casar-se, chamaram conselheiros, que foram assim apresentados: "... Rondibilis, está agora casado, mas antes não estava .. Hippothadeus não estava antes, nem está ainda ... Bridlegoose estêve antes casado, mas não está agora... e Trouillogan está casado agora, mas antes estava casado com outra mulher". Êste conjunto de vetores apresenta coerção?

Ex. 2: Se cada componente pode ser Cara (C) ou Coroa (K), apresenta o conjunto de quatro vetores (C,C,C), (K,K,C), (C,K,K), (K,C,K) coerção em relação ao conjunto que apresenta independência?

7.13. *Graus de liberdade.* Quando um conjunto de vetores não exibe o intervalo completo de possibilidades disponíveis graças às componentes (S.7.11), o intervalo que permanece pode às vêzes ser mensurado ùtilmente ao se enunciar quantas componentes com independência proporcionam a mesma variedade. Tal número de componentes chama-se **graus de liberdade** do conjunto de vetores. Assim, as luzes de tráfego apresentam (S.7.8) uma variedade de quatro. Se as componentes continuassem a ter dois estados cada uma; *duas* componentes com independência poderiam proporcionar a mesma variedade (de quatro). Assim, a coerção com respeito às luzes pode ser expressa afirmando-se que as três componentes, não independentes, produzem a mesma variedade que *duas* produziriam se fôssem independentes; i. e., as três luzes possuem dois graus de liberdade.

Se tôdas as combinações são possíveis, então o número de graus de liberdade é igual ao número de componentes. Se apenas uma combinação fôr possível, os graus de liberdade serão zero.

Reconhecer-se-á que êste modo de medir aquilo que permanece livre de coerção aplica-se apenas em certos casos favoráveis. Destarte, se as luzes de tráfego apresentassem três ou cinco combinações, a equivalência não mais seria representável por um número inteiro simples. O conceito é importante, sobretudo quando as componentes variam continuamente, de modo que cada qual dispõe de um número infinito de valores. Um cálculo por meio de graus de liberdade talvez ainda seja possível, embora os estados não possam ser computados.

Ex. 1: Se um vendedor de carros usados apregoa que o seu estoque cobre um intervalo de 10 anos, 8 c.v. potências e 12 côres, em tôdas as combinações, quantos graus de liberdade possui o seu estoque?

Ex. 2: As posições angulares dos dois ponteiros de um relógio são as duas componentes de um vetor. Possuirá o conjunto dos vetores (no trabalho comum de percorrer as 12 horas) uma coerção se os ângulos forem medidos com precisão?

Ex. 3: (Continuação.) Quantos graus de liberdade possui um vetor? (Sugestão: A remoção do ponteiro dos minutos causaria uma perda essencial?)

Ex. 4: Quando os dois olhos se movem, apontando os eixos em várias direções, definem um vetor com quatro componentes: os desvios verticais e laterais dos olhos direito e esquerdo. O homem possui visão binocular: o camaleão move os olhos de modo independente, cada lado procurando comida de seu lado do corpo. Quantos graus de liberdade possuem os olhos do camaleão? E os do homem?

Ex. 5: Uma seta, de comprimento fixo, jaz sôbre um plano e tem três graus de liberdade para posição (pois duas coordenadas fixarão a posição de seu centro, digamos, e depois um ângulo determinará a sua direção). Quantos graus de liberdade possui se adicionarmos a restrição segundo a qual deve sempre apontar na direção de um dado ponto *P*?

Ex. 6: T é uma dada transformação fechada e univalente, e a é qualquer de seus operandos. Considere o conjunto de vetores, cada um de três componentes,

$$(a, T(a), T^2(a)),$$

com a fornecendo todos os seus possíveis valores em troca. Quantos graus de liberdade possui o conjunto?

Ex. 7: De que modo o gráfico comum, de x sôbre y, apresentaria coerção?

Ex. 8: Quantos graus de liberdade possui um corpo comum — uma cadeira, digamos — no espaço tridimensional?

IMPORTÂNCIA DA COERÇÃO

7.14. As coerções são de grande importância na cibernética, e receberão um lugar proeminente no restante dêste livro, *pois quando existe coerção usualmente podemos tirar uma vantagem disto.*

A obra de Shannon, discutida principalmente no Capítulo 9, desenvolve esta tese de modo claro. A maior parte dela procura avaliar a variedade que existiria se ocorresse uma total independência, mostrando que existem restrições (ali chamadas "redundâncias"), e mostrando como a sua existência torna possível um uso mais eficiente do canal.

As próximas seções procurarão também mostrar algo da ampla aplicabilidade e da grande importância do conceito.

7. 15. *Leis da Natureza.* Em primeiro lugar podemos notar que a existência de qualquer invariante sôbre um conjunto de fenômenos implica uma coerção, pois sua existência implica que não ocorre o intervalo total de variedade. Assim, a teoria geral dos invariantes constitui uma parte da teoria das coerções.

Depois, como cada lei da natureza implica a existência de um invariante, segue-se que *tôda lei da natureza é uma coerção.* Assim, a lei de Newton diz que, dos vetores posicionais planetários e velocidades que podem ocorrer, e. g., escritos em uma fôlha de papel (o conjunto maior), sòmente um conjunto menor efetivamente ocorrerá nos céus; e a lei especifica que valores terão os elementos. De nosso ponto de vista, o que importa é que a lei *exclui* muitas posições e velocidades, prevendo que jamais se verificará a sua ocorrência.

A ciência procura leis; está, portanto, muito interessada em procurar coerções. (No caso, o maior conjunto compõe-se do que poderia acontecer se o comportamento fôsse livre e caótico, e o conjunto menor compõe-se do que realmente ocorre.)

Êste ponto de vista, notar-se-á, se adequa ao que foi dito na S.1.5. A Cibérnética visa a totalidade, em tôda a sua riqueza possível, e depois pergunta por que as realidades deveriam estar restritas à alguma porção das possibilidades totais.

Ex. 1: De que modo a Lei das Proporções Simples da química constitui uma coerção?

Ex. 2: De que modo a Lei da Conservação da Energia constitui uma coerção?

7.16. *Objeto como coerção.* As coerções são extremamente comuns no mundo a nossa volta, e muitos de nossos conceitos básicos utilizam-nas de um modo essencial. Consideremos como exemplo o conceito básico de uma "coisa" ou "objeto", como algo manipulado na vida diária. Uma cadeira é uma coisa porque tem coerência, porque podemos pô-la neste ou naquele lado da mesa, porque podemos empurrá-la ou sentar-nos nela. A cadeira é também uma coleção de partes.

Pois bem, qualquer objeto livre em nosso mundo tridimensional possui seis graus de liberdade para o movimento. Se as partes da cadeira fôssem desconexas, cada qual teria seus próprios seis graus de liberdade; e isto constitui de fato o montante de mobilidade de que dispõe pelas partes na oficina antes de serem montadas. Assim, as quatro pernas, quando separadas, têm 24 graus de liberdade. Depois de juntadas, todavia, apresentam apenas os seis graus de liberdade do objeto único. Que *há* uma coerção é óbvio quando se percebe que, se são conhecidas as posições das três pernas de uma cadeira montada, a da quarta perna decorre necessàriamente — ela não tem liberdade.

Assim, a mudança das quatro pernas separadas e livres para uma cadeira corresponde precisamente à mudança do conjunto dotado de 24 graus de liberdade para o da cadeira que possui apenas seis. Assim, a essência do fato de ser a cadeira uma "coisa", uma unidade, em vez de uma coleção de partes independentes, corresponde à presença da coerção.

7.17. Visto dêste ponto de vista, o mundo à nossa volta é extremamente rico de coerções. Elas nos são tão familiares que tomamos como certas a maioria delas e às vêzes nem sequer estamos cientes de sua existência. Para vermos como o mundo pareceria sem suas coerções usuais, teríamos de recorrer aos contos de fadas ou a um filme "maluco", e mesmo êles removeriam apenas uma fração de tôdas as coerções.

Um mundo sem coerções seria totalmente caótico. O turbulento rio Niagara a baixo poderia ser um mundo dêste tipo (embora os físicos ainda encontrassem aí alguma coerção). Nosso mundo terrestre, ao qual o organismo vivo está adaptado, está longe de apresentar semelhante caos. Posteriormente (S.13.5), será sugerido que o organismo pode adaptar-se exatamente na medida que o mundo real é coagido, e não mais.

Ex.: Tente contar, durante o próximo minuto, tôdas as coerções que operam em suas vizinhanças.

7.18. *Previsão e coerção.* Que algo é "previsível" implica a existência de uma coerção. Se um avião, por exemplo, fôsse capaz de se mover, segundo após segundo, de um ponto qualquer no espaço para outro ponto qualquer, então a melhor previsão antiaérea seria ineficaz e inútil. Esta última pode fornecer informação útil apenas porque um avião não pode mover-se assim, mas deve mover-se sujeito a muitas coerções. Há aquela que se deve à continuidade — um avião não pode saltar de súbito, nem em posição, velocidade ou direção. Há outra devida à particularidade do projeto do avião, que leva êste avião a comportar-se como um A-10 e aquêle como um Z-20. Há também a coerção devida à individualidade do pilôto; e assim por diante. Assim, uma futura posição do avião sempre é algo coagido, e é nesta precisa extensão que pode ser útil um previsor.

7.19. *Máquina como coerção.* Veremos agora que o conceito de "máquina", como foi desenvolvido a partir da inspeção de um protocolo (S.6.5), provém do fato de se reconhecer que *a seqüência no protocolo apresenta uma forma particular de coerção.* Se o protocolo não exibisse coerção, o observador diria que era caótico ou imprevisível, como uma roleta.

Quando apresenta a forma característica de coerção, o observador pode tirar vantagem do fato. Êle o faz recodificando todo o protocolo em uma forma mais compacta que contém apenas:

(i) uma proposição da transformação
e (ii) uma proposição da entrada real fornecida.

Subseqüentemente, em vez da discussão ser conduzida em têrmos de um protocolo extenso, é conduzida de forma compacta em têrmos de uma transformação sucinta; como o fizemos na Primeira Parte.

Assim, o uso da transformação é um exemplo de como alguém pode tirar vantagem da coerção característica sôbre o comportamento impôsto pelo fato de ser do "tipo máquina".

Ex. Se um protocolo apresenta a coerção característica de uma máquina, o que a coerção exclui?

7.20. Dentro do conjunto das máquinas determinadas pode-se aplicar outras coerções. Assim, o conjunto pode ser restringido àquelas que possuem um certo conjunto de estados como operandos, ou àquelas que possuem apenas uma bacia, ou àquelas que não são redutíveis.

Uma coerção comum e muito poderosa é a da continuidade. Trata-se de uma coerção porque, embora a função que varia arbitràriamente possa sofrer *qualquer* variação, a função contínua pode variar, a cada passo, apenas para um valor vizinho. Exercício 4 fornece apenas uma débil impressão da severidade dessa coerção.

Ex. 1: O conjunto de transformações fechadas univalentes (sistemas absolutos) sôbre três estados *a*, *b*, *c* tem 27 membros (compare *Ex.* 7.7.7). Quantos membros restam se acrescentarmos a restrição de que o sistema absoluto não deve ter estado de equilíbrio?

Ex. 2: (Continuação.) Similarmente, mas a restrição é que deve haver apenas uma bacia.

Ex. 3: (Continuação.) Similarmente, mas a restrição é que não podem ocorrer as transições $a \rightarrow b$ e $b \rightarrow c$.

Ex. 4: Um vetor tem dez componentes, cada uma das quais pode assumir um dos valores 1, 2, 3, 4. Quanta variedade possui o conjunto dos vetores se (i) as componentes variam de modo independente (S.7.12); (ii) sob a regra de que duas componentes adjacentes não podem diferir de mais de uma unidade em valor?

7.21. *Aprendizagem e coerção.* Para o psicólogo, um importante exemplo de coerção ocorre na aprendizagem. Assim, Pavlov, em uma experiência, proporcionou estímulos térmicos e táteis, bem como refôrço com carne em pó, nas seguintes combinações:

	Térmico	Tátil	Refôrço
1	+	+	+
2	+	—	—
3	—	+	+
4	—	—	—

(A quarta combinação ocorreu evidentemente, nos intervalos.) Pois bem, o total de combinações possíveis são oito; Pavlov apresentou apenas quatro. Constituía parte essencial da experiência que o conjunto completo não fôsse dado, pois de outro modo não haveria nada de particular para o animal aprender. A coerção era um aspecto fundamental da experiência.

O mesmo princípio verifica-se de modo mais simples na aprendizagem por associação. Suponhamos que alguém proponha ao paciente, que dada uma letra, replique com um número, segundo a regra

Dado A: replique com 2
Dado B: replique com 5
Dado C: replique com 3

Pode-se então propor ao paciente uma seqüência como A2, B5, C3, B5, C3, A2, A2, C3 e assim por diante.

Esta seqüência, como seqüência de vetores com suas componentes, apresenta coerção; se deve acontecer a aprendizagem a coerção será necessária, pois sem a coerção A seria igualmente seguido de 2, 3 ou 5 e o paciente seria incapaz de formar quaisquer associações específicas. Assim, *a aprendizagem é possível apenas na extensão em que a seqüência apresenta coerção.*

O mesmo é verdadeiro na aprendizagem de um labirinto. Para que tal ocorra, o labirinto deve conservar o mesmo padrão diàriamente, durante o período da aprendizagem. Se o labirinto não apresentasse coerção, o animal seria incapaz de desenvolver o modo particular (e apropriado) de comportamento. Assim, *a aprendizagem vale a pena apenas quando o meio ambiente exibe coerção.* (O assunto será retomado na S.13.7.)

VARIEDADE EM MÁQUINAS

7.22. Podemos agora considerar como a variedade é afetada pelas atividades da máquina, abrindo o nosso caminho para o entendimento do que acontece à informação, quando manipulada pela máquina. Em primeiro lugar, mencionemos uma peculiaridade fundamental de uma transformação univalente em sua relação com a variedade.

Consideremos, por exemplo, a transformação univalente

$$Z: \downarrow \begin{matrix} A & B & C \\ B & C & C \end{matrix}$$

e apliquemo-la a algum conjunto de operandos, e. g.

$$\begin{matrix} & B & B & A & C & C & C & A & A & B & A \\ \text{O resultado é} & C & C & B & C & C & C & B & B & C & B \end{matrix}$$

O importante aí é que a variedade no conjunto caiu de 3 para 2. Uma transformação ulterior por Z leva tudo para C, com uma variedade de 1.

O leitor verificará fàcilmente que um conjunto dêste tipo, operado por transformações univalentes, nunca pode aumentar em variedade, e comumente cai. A razão da queda é de imediato identificável. No gráfico, pode ocorrer uma confluência de setas , mas é impossível uma divergência . Sempre que a transformação muda dois estados em um, perde-se variedade, e não há processo contrário que substitua a perda.

Não é necessário que a transformação seja fechada. Assim, se o mesmo conjunto de dez letras é transformado por Y:

$$Y: \downarrow \begin{matrix} A & B & C \\ p & q & p \end{matrix}$$

dando $q\ q\ p\ p\ p\ p\ p\ p\ q\ p$, a variedade cai. É fácil ver que apenas quando a transformação é um-um (sôbre as letras que realmente ocorrem no conjunto a ser transformado) fica inalterada a variedade do conjunto; e êste é um tipo muito especial de transformação.

Ex. 1: Escreva as letras de A até Z numa linha; sob esta, letra por letra, escreva as primeiras 26 letras de alguma frase bem conhecida. A transição da linha de cima para a linha de baixo define uma transformação univalente (u). Escreva o leitor seu nome por completo, determine a variedade entre suas letras, transforme-as, mediante (u) (i. e., "codifique"-as) e determine a variedade do nôvo conjunto de letras. Como se modificou a variedade? Aplique u repetidamente; desenhe um gráfico de como a variedade se modifica passo a passo.

Ex. 2: Em certo gênero de parasita, cada espécie se alimenta apenas de uma espécie de hospedeiro. Se as variedades (no nosso sentido) de espécies de parasitas e de espécies de hospedeiro são desiguais, qual é a maior?

Ex. 3: "Uma multiplicidade de genótipos pode apresentar a mesma configuração fenotípica." Se a mudança de cada genótipo para o seu fenótipo correspondente é uma transformação V, que mudança na variedade V provoca?

Ex. 4: Quando um provador de chá experimenta uma xícara de chá, êle pode ser considerado como o responsável por uma transformação Y que converte a "amostra de fôlha" como operando em "opinião" como transformada. Se o provador fôr perfeito, Y será um-um. Como seria êle descrito se Y fôsse muitos-um?

Ex. 5: Quando lidas no grau mais próximo em cada uma de sete ocasiões, as temperaturas do quarto e de um banho-maria termostàticamente controlado deram os seguintes valores:

Quarto: 65, 62, 68, 63, 62, 59, 61.
Banho-maria: 97, 97, 98, 97, 97, 97, 97.

De quanto é a variedade apresentada (i) nas temperaturas do quarto, (ii) e nas do banho-maria? O que se diria se a variedade em (i) excedeu a de (ii)?

**Ex.* 6: Se a transformação foi constituída permitindo que cada estado vá para um estado selecionado ao acaso dentre todos os estados (independentemente e com probabilidades iguais), prove que, se o número de estados fôr grande, a variedade cairá no primeiro passo, na razão de 1 para 1-1/e, i.ie., de cêrca de dois terços. (Sugestão: O problema equivale (para um único passo) ao seguinte: *n* caçadores defrontam-se sùbitamente com um rebanho de *n* veados. Cada qual dá um tiro em um veado escolhido ao acaso. Cada bala acerta o alvo. Quantos veados em média serão atingidos? E para que valor tende a média quando *n* tende para o infinito?)

7.23. *Conjunto e máquina.* Cumpre agora tornar clara a noção de como um *conjunto* de estados pode estar associado a uma máquina, pois nenhuma máquina real pode ao mesmo tempo estar em mais de um estado. Por várias razões é possível considerar um conjunto de estados.

Podemos, de fato, não estar considerando uma única máquina, por mais que falemos no singular (S.7.3), mas, na realidade, um conjunto de réplicas, como alguém quando fala do "Modêlo T Ford", ou da "célula do tentáculo anterior" ou do "rato branco". Quando é assim, podemos considerar tôdas as réplicas em conjunto, uma em um estado e a outra no outro; dêste modo, obtemos um *conjunto* de estados onde atua uma transformação.

Um conjunto de estados pode também surgir mesmo quando a máquina é única. Pois talvez nos interessasse não apenas o que ela pode fazer em um dado instante a partir de um estado, mas também o que poderá fazer noutro instante a partir de outro estado. Assim, seus vários comportamentos possíveis em um *conjunto* de tempos estão naturalmente relacionados a um *conjunto* de estados como operandos.

Finalmente, um conjunto pode ser criado pelo *decreto* de um teórico que, não conhecendo em que estado particular a máquina se encontra, deseja investigar as conseqüências de *tôdas* as possibilidades. Agora o conjunto não é o conjunto do que *existe,* mas o conjunto do que *pode existir* (no que concerne ao teórico). Tal método é tìpicamente cibernético, pois considera o real em relação ao conjunto mais amplo do possível ou do concebível. (S. 1.3.)

7.24. *Decaimento de variedade.* Dados, por uma destas razões, um conjunto de estados e uma transformação univalente, podemos agora, usando o resultado da S.7.22, prever que, *à medida que o tempo progride, a variedade no conjunto não pode crescer e usualmente diminuirá.*

Tal fato pode ser examinado de muitos pontos de vista.

Em primeiro lugar, dá precisão à observação feita amiúde segundo a qual qualquer sistema, entregue a si próprio, caminha para algum equilíbrio. Usualmente a observação se baseia em um vago recurso à experiência, mas isto não é satisfatório, pois as condições não estão definidas de modo apropriado. Algumas vêzes a segunda lei da termodinâmica é invocada, o que é amiúde irrelevante para os sistemas aqui discutidos (S.1.2). A nova formulação apresenta apenas o que é essencial.

Em segundo lugar, mostra que, se um observador tem um sistema absoluto, cuja transformação êle conhece mas cujos estados não podem por alguma razão ser observados, então, à medida que o tempo avança, *sua incerteza sôbre o seu estado pode apenas diminuir.* Pois, de início, o sistema pode estar em qualquer de seus estados e com o passar do tempo o número de seus estados decresce do mesmo modo. Assim, no caso extremo em que possui apenas uma bacia e um estado de equilíbrio, pode, se inicialmente incerto, dizer afinal com certeza, sem fazer qualquer observação ulterior, em que estado o sistema se encontra.

A diminuição é visível ainda de outro ângulo. Se a variedade nos estados possíveis está associada com informação, de modo que o fato da máquina estar em algum estado particular veicule alguma mensagem particular, então à medida que o tempo avança a quantidade de informação que armazena pode apenas diminuir. Assim, uma de três mensagens pode ser levada a um prisioneiro numa xícara de café, dependendo a mensagem do café ser quente, mórno ou frio. Tal método funcionaria satisfatòriamente se o tempo entre o despacho e o recebimento fôr curto, e não longo; pois, quaisquer que fôssem os três estados selecionados originalmente, após um curto tempo estariam ou "tépidos" ou "frios", e após um longo tempo, apenas "frios". Assim, quanto mais longo o tempo entre o despacho e o recebimento, menor a capacidade do sistema de transportar informação, na medida em que esta dependa do fato de estar em um dado estado.

Ex. 1: Se uma bola permanecer em qualquer de três bacias de diferentes côres, quanta variedade poderá ser armazenada?

Ex. 2: (Continuação.) Se adicionarmos uma outra bola de outra côr, de quanto aumenta a variedade?

Ex. 3: O fato de uma transformação um-um não causar perda de variedade é utilizado algumas vêzes como um truque de salão. Um membro da platéia é solicitado a pensar em dois dígitos. A seguir, pede-se a êle que multiplique um dêles por 5, adicione 7, dobre o resultado, e adicione o outro número. O resultado é apresentado ao prestidigitador, que então nomeia os dígitos originais. Prove que esta transformação retém o primitivo montante de variedade. (Sugestão: Subtraia 14 da quantidade final.)

Ex. 4: (Continuação.) Qual é o conjunto para a primeira medida de variedade?

Ex. 5: (Outro truque.) Solicita-se a um membro da platéia que escreva um número de dois dígitos, que difiram no mínimo de 2. Pede-se a êle que faça a diferença entre êste número e o número formado pelos mesmos dígitos na ordem inversa. À diferença deve adicionar o número formado pela inversão dos dígitos da diferença. Quanto de variedade subsiste nesta transformação?

Ex. 6: Se um circuito de neurônios pode conduzir a memória pela existência ou não de reverberação, quanta variedade pode o circuito conduzir? Qual é o *conjunto* que tem a variedade?

Ex. 7: Dez máquinas de idêntica estrutura, ultrapassaram seus transientes e têm agora a variedade constante em zero. Estão elas necessàriamente em estado de equilíbrio?

7.25. *Lei de Experiência.* A seção anterior provou que a variedade de uma máquina (sendo um conjunto dado e reconhecido) nunca pode crescer e usualmente decresce. Admitiu-se lá que a máquina estava isolada, de modo que as mudanças de estado se deviam sòmente às atividades internas da máquina; queremos considerar agora o que ocorre à variedade quando o sistema é uma máquina com entrada.

Consideremos primeiro o caso mais simples, de uma máquina com um parâmetro *P* que varia apenas a intervalos longos. Suponhamos, para clareza, que a máquina possua muitas réplicas, idênticas em suas transformações mas diferindo em cada estado em que estejam; e que estejamos observando o conjunto de estados proporcionado a cada momento pelo conjunto das máquinas. Seja *P* mantido no mesmo valor em tôdas e conservado naquele valor enquanto as máquinas mudam passo a passo. As condições agora são análogas às da seção anterior, e se medirmos a variedade no estado sôbre o conjunto de réplicas, e observarmos como a variedade muda com o tempo, veremos que ela cai para algum mínimo. Quando a variedade alcançou o seu mínimo sob êste valor de entrada

(P_1), suponhamos que P seja mudado para um nôvo valor (P_2), ocorrendo a variação de modo uniforme e simultâneo sôbre todo o conjunto de réplicas. A mudança no valor mudará o gráfico da máquina de uma forma para outra, como, por exemplo, (se a máquina possui estados $A, B, \ldots, F$,)

$$\text{de}\quad \begin{tikzcd} A \arrow[d] & B \arrow[dl] & C \arrow[d] \\ D & E & F \arrow[l] \end{tikzcd} \quad (P_1) \qquad\qquad \text{para}\quad \begin{tikzcd} A \arrow[r] & B & C \\ D \arrow[r] & E \arrow[u] & F \arrow[u] \end{tikzcd} \quad (P_2)$$

Sob P_1, todos aquêles membros que começaram em A, B ou D iriam para D, e aquêles que começaram em C, E ou F iriam para E. A variedade, após algum tempo em P_1, cairia para dois estados. Quando P é mudado em P_2, todos aquêles sistemas em D irão no primeiro passo, para E (pois a transformação é univalente), e todos que estão em E irão para B. Portanto, é fácil ver que, efetuada a mesma mudança em tudo, *a mudança do valor paramétrico para o conjunto todo não pode aumentar a variedade do conjunto.* Isto é verdade, sem dúvida, sejam D e E estados de equilíbrio ou não. Deixemos agora que o sistema continue sob P_2. Os dois grupos, antes permanecendo separados em D e E, vão agora ambos para B; aqui tudo tem o mesmo estado, e a variedade cai para zero. Assim, *a mudança de valor paramétrico torna possível uma queda para um mínimo nôvo e mais baixo.*

A condição de que a mudança $P_1 \to P_2$ possa conduzir a uma queda ulterior na variedade significa de modo claro que dois ou mais estados P_1 de equilíbrio estão na mesma bacia P_2. Como isto ocorrerá amiúde, podemos declarar de um modo mais impreciso, porém mais vivo, que *uma variação uniforme nas entradas de um conjunto de transdutores tende a baixar a variedade do conjunto.*

À medida que a variedade cai, muda o conjunto, de modo que, a cada momento, todos os seus membros tendem a estar no mesmo estado. Em outros têrmos, as mudanças na entrada de um transdutor tendem a tornar o estado do sistema (em dado momento) menos dependente do estado inicial individual do transdutor e mais dependente da seqüência particular de valores paramétricos utilizados como entrada.

O mesmo fato pode ser encarado de outro ponto de vista. No argumento que acabamos de apresentar, "o conjunto", por motivo de clareza, foi tomado como sendo um conjunto de réplicas de um transdutor, tôdas funcionando simultâneamente. O teorema aplica-se igualmente a um transdutor em uma série de ocasiões, desde que os vários tempos iniciais sejam colocados em devida correspondência. Tal ponto de vista seria mais apropriado se estivéssemos estudando algum transdutor muito complexo, e realizando nêle novas experiências todos os dias. Se contivesse grande número de partes um tanto inacessíveis, poderia ser difícil reconduzi-lo cada manhã a algum estado padronizado pronto para a próxima experiência. O teorema afirma que, se as suas entradas forem tomadas de manhã cedo, através de uma rotina *padronizada*, então, quanto mais longa a rotina, mais certamente a máquina será conduzida a algum estado-padrão, pronta para o experimentador. Talvez o experimentador não seja capaz de nomear o estado, mas pode confiar que o estado tende a ser reprodutível.

Cumpriria notar que a mera igualdade do parâmetro do conjunto a cada passo da seqüência não é suficiente; se o efeito tiver de ser mais que simplesmente nominal (i. e., nulo) os parâmetros devem sofrer uma mudança efetiva não-nula.

O teorema de modo nenhum, para a sua veracidade, depende do tamanho do sistema. Sistemas muito grandes são sujeitos a êle exatamente como os pequenos, e cabe muitas vêzes esperar que apresentem o efeito de modo mais suave e regular (pelo efeito estatístico da grandeza). Pode portanto ser aplicado com utilidade ao cérebro e aos sistemas sociais e econômicos.

São comuns os exemplos passíveis de corresponder a êsse processo. Algo desta natureza talvez ocorra quando se verifica que um certo número de rapazes de individualidade marcante, tendo passado todos pela mesma escola, desenvolvem maneiras mais características da escola que freqüentaram do que de suas individualidades originais. Em que medida essa tendência para a uniformidade no comportamento se deve à mencionada propriedade dos transdutores é um assunto a ser deixado para outras pesquisas.

Será necessário algum nome pelo qual se possa referir a fenômeno. Chamá-lo-ei de **lei da Experiência**. É possível descrevê-lo de modo mais vivo pela afirmação de que a informação que entra por mudança em um parâmetro tende a destruir e substituir a informação sôbre o estado inicial do sistema.

8 Transmissão de Variedade

8.1. O capítulo anterior introduziu o conceito de "variedade", conceito inseparável do de "informação", e vimos o quão importante é, em alguns problemas, reconhecer que estamos lidando com um *conjunto* de possibilidades.

No presente capítulo estudaremos como tais possibilidades são transmitidas através de uma certa máquina, no sentido de estudar a relação existente entre o conjunto que ocorre na entrada e o conjunto conseqüente que ocorre, usualmente em alguma forma codificada, na saída. Veremos que a transmissão é, se a máquina fôr determinada, perfeitamente ordenada e passível de rigoroso tratamento. Nosso objetivo será buscar um entendimento bastante satisfatório a fim de servir de base para considerar as codificações extremamente complexas utilizadas pelo cérebro.

8.2. *Ubiqüidade da codificação.* Para obter um quadro da quantidade de codificação envolvida durante a interação ordinária entre organismo e meio, consideremos, com algum pormenor, a seqüência comparativamente simples de eventos que ocorrem quando é rádio-difundido um "Aviso de Temporal". Começa como algum processo padronizado nas células nervosas do meteorologista, e depois se torna um padrão de movimentos musculares enquanto êle o escreve ou datilografa, convertendo-o destarte em um padrão de sinais de tinta sôbre o papel. A partir daí torna-se um padrão de claro e escuro sôbre a retina do locutor: depois um padrão de excitação retiniana, a seguir um padrão de impulsos nervosos no nervo óptico, e assim por diante através de seu sistema nervoso. Emerge, enquanto está lendo o aviso, como um padrão dos movimento dos lábios e da língua, e depois viaja como um padrão de ondas no ar. Alcançando o microfone, torna-se um padrão de variações de potencial elétrico, sofrendo mudanças ulteriores enquanto é amplificado, modulado e transmitido. Agora é um padrão de ondas no éter, e finalmente um padrão no aparelho receptor. Voltando de nôvo ao padrão de ondas no ar, torna-se então um padrão de vibrações que atravessa o ouvido médio, os ossículos e o caracol do ouvinte, tornando-se depois um padrão de impulsos nervosos que impressionam o nervo auditivo. A esta altura podemos abandoná-lo com o menor reparo de que êsse brevíssimo apanhado menciona nada menos do que dezesseis transformações maiores, através de tôdas as quais algo foi preservado, embora as aparências superficiais tenham mudado de um modo quase irreconhecível.

8.3. *Complexidade de codificação.* Quando considera tais codificações repetidas, o observador pode fàcilmente superestimar o montante de complexidade introduzida. Não raro acontece que êste montante não é, de modo algum, tão grande como poderia sugerir a primeira impressão.

Um simples exemplo, mostrando como um código complexo pode ocultar simplicidades, sucede quando uma simples codificação um-um do alfabeto é primeiro aplicada à mensagem, depois à primeira forma codificada, para fornecer uma segunda (duplamente) codificada, depois à segunda forma codificada, e assim por diante para muitas codificações. Pode-se julgar que a forma final seja extremamente misturada, e que necessite para a sua decodificação de tantas operações para trás quantas foram utilizadas para frente; de fato, como se pode fàcilmente constatar, difere da mensagem original sòmente na medida em que é produzido por uma *única* aplicação de alguma codificação um-um. A mensagem final pode assim retornar à original por uma única operação.

Ex.: Arrume as cartas de um baralho em ordem, e disponha-as sôbre a mesa com as faces para baixo. Corte o maço. Corte-o de nôvo. Corte-o repetidamente até que você esteja certo de que a ordem original se perdeu totalmente; agora, recolha o baralho e examine a sua ordem. O quanto de ordem foi perdido?

8.4. *De-codificação.* A melhor introdução ao estudo geral das codificações se faz pela observação dos aspectos das codificações militares.

Devemos ser cautelosos desde o início a fim de não interpretar o "código" muito estritamente. A princípio tendemos a pensar apenas naqueles métodos que convertem cada letra da mensagem em alguma outra letra, mas esta classe é demasiado restrita, pois há muitos outros métodos. Assim, o código "Playfair" opera sôbre as letras aos pares, convertendo cada par (um vetor com duas componentes) em algum outro par. Outros códigos dispõem as letras em algum nôvo arranjo, enquanto outros ainda são totalmente arbitrários, convertendo por exemplo, "duas divisões vão chegar" em "Arthur". Tais considerações tornam claro que, se o código fôr a transformação, o operando será antes a mensagem tôda do que uma letra (embora a última possibilidade não esteja excluída). A transformação é, portanto, essencialmente da forma

$$U: \downarrow \begin{matrix} M_1 & M_2 & M_3 & \ldots \\ C_1 & C_2 & C_3 & \ldots \end{matrix}$$

onde M_1, M_2, ... são as várias mensagens e C_1, C_2 ... são as suas formas codificadas. Uma codificação, neste caso, é especificada por uma transformação.

Amiúde os métodos usam uma "palavra-chave" ou algum outro fator capaz de mudar o código de uma forma para outra. Um fator dêste tipo corresponde, sem dúvida, a um parâmetro, fornecendo tantos códigos particulares (ou transformações) U_1, U_2, ... quantos forem os valores para o fator.

"Decodificar" significa aplicar uma tal transformação à transformação C que restaure a mensagem original M_i:

$$V: \downarrow \begin{matrix} C_1 & C_2 & C_3 & \ldots \\ M_1 & M_2 & M_3 & \ldots \end{matrix}$$

Dizemos que uma transformação V é a inversa de U; pode-se pois escrevê-la como U^{-1}. Em geral, apenas transformações um-um possuem inversas univalentes.

Se a mensagem original M_i há de ser recuperável a partir da forma codificada C_i, qualquer que seja o valor de i, então tanto U como U^{-1} devem ser um-um, pois, se tanto M_i quanto M_j devessem ser transformados em uma forma C_k não poderia dizer qual dos M foi originalmente enviado, e C_k não poderia ser decodificado com certeza.

A seguir, suponhamos que um conjunto de mensagens, tendo variedade v, é enviado em código por uma transformação um-um, U. A variedade no conjunto das formas codificadas será também v. *A variedade não é alterada depois de codificada por uma transformação um-um.*

Segue-se que, se as mensagens da variedade v devem atravessar vários códigos em sucessão e serem unìvocamente restauráveis às suas formas originais, *o processo precisa ser aquêle que preserva a variedade no conjunto, a cada estágio.*

Ex. 1: A transformação $x' = \log_{10}x$, aplicada a números positivos, é uma codificação um-um? O que é em geral chamado de "decodificação"?

Ex. 2: A transformação $x' = \text{sen } x$, aplicada aos números positivos, é uma codificação um-um?

Ex. 3: Que transformação resulta da aplicação, em primeiro lugar, de uma transformação um-um e a seguir de sua inversa?

Ex. 4: Qual é a transformação inversa de $n' = n + 7$?

Ex. 5: Qual é a transformação inversa de $x' = 2x + y$, $y' = x + y$?

Ex. 6: Se a forma codificada consiste de três letras, por exemplo, *JNB*, qual será a variedade das possíveis formas codificadas (medidas logarìtmicamente)?

Ex. 7: (Continuação.) Quantas mensagens distintas podem ser enviadas por um tal código, usado uma só vez?

Ex. 8: Oito cavalos estão disputando uma corrida, e um telegrama avisa ao sr. A. qual chegou em primeiro e qual em segundo. Que variedade existe no conjunto das mensagens possíveis?

Ex. 9: (Continuação.) Poderia o conjunto ser codificado numa única letra, impressa quer em maiúscula ou em minúscula?

Ex. 10: As concentrações "alta" ou "baixa" de hormônio sexual no sangue de um certo animal determinam se êle passará ou não por um ritual de côrte. Se o hormônio sexual é muito complicado quìmicamente e o ritual muito complicado etològicamente, e se a variável "comportamento" é tida como uma forma codificada da variável "concentração", quanto de variedade há no conjunto das mensagens?

8.5. *Codificação por máquina.* A seguir podemos considerar o que sucede quando uma mensagem se torna codificada ao passar por uma máquina.

Que tais questões são importantes no estudo do cérebro dispensa maior elaboração. Entre as suas demais aplicações figuram as pertinentes à "instrumentação" — a ciência de obter informação de alguma variável ou lugar mais ou menos inacessível ao observador, tal como o interior de uma fornalha ou de um coração em funcionamento. A transmissão de tal informação envolve quase sempre algum estado intermediário de codificação, e êste deve ser selecionado de modo adequado. Até há pouco, cada instrumento dêste tipo era concebido simplesmente segundo os princípios peculiares ao ramo particular da ciência; hoje, entretanto, sabe-se, após o trabalho pioneiro de Shannon e Wiener, que certas leis gerais são válidas para todos êsses instrumentos. Abaixo será descrito o que êles são.

Uma "máquina" foi definida na S.3.4 como um conjunto de estados cujas variações no tempo correspondem a uma transformação fechada univalente. Tal definição se aplica à máquina que é totalmente isolada, i. e., em condições constantes; é idêntica ao sistema absoluto definido no *Design*... Na S.4.1 a máquina com entrada foi definida como um sistema que *tem* uma transformação fechada univalente para cada um dos possíveis estados de um conjunto de parâmetros. Isto é idêntico ao "transdutor" de Shannon, definido como um sistema cujo estado seguinte é determinado pelo seu estado presente e pelos valores presentes de seus parâmetros. (Shannon também admite que o transdutor pode ter uma memória interna infinita, mas ignoraremos isto por hora, retornando ao fato na S.9.8.)

Admitamos então que temos diante de nós um transdutor M, que pode estar em algum dos estados S_1, S_2, ... S_n, que serão considerados finitos em número. O transdutor apresenta um ou mais parâmetros que podem assumir, a cada momento, algum dos valores P_1, P_2, ..., P_k. Cada um dêsses valores definirá uma transformação dos S. Veremos agora que um tal sistema pode aceitar uma mensagem, codificá-la e emitir a forma codificada. Por "mensagem" compreendo apenas alguma sucessão de estados que é, devido ao acoplamento entre dois sistemas, ao mesmo tempo a saída de um sistema e a entrada de outro. Amiúde o estado será um vetor. Omitirei a consideração de qualquer "significado" a ser atribuído à mensagem e considerarei apenas o que sucede nestes sistemas determinados.

Por razões de simplicidade no exemplo, suponhamos que M possa assumir qualquer dos quatro estados: A, B, C e D; que os parâmetros proporcionem três estados Q, R e S. Tais suposições podem ser apresentadas em forma tabular, que mostre os elementos essenciais do "transdutor" (como na S.4.1):

$\downarrow$	A	B	C	D
Q	C	C	A	B
R	A	C	B	B
S	B	D	C	D

Dados o seu estado inicial e a seqüência de valores ao parâmetro, poder-se-á determinar a sua saída sem dificuldade, como na S.4.1. Assim, suponhamos que parta de B e que a entrada esteja em R; mudará para C. Se a entrada vai a seguir para Q, irá de C para A. Os resultados seguintes podem ser apresentados na forma tabular:

Estado-entrada : $R\ Q$

Estado-transdutor : $B\ C\ A$

Pode-se verificar agora fàcilmente que, se o estado inicial fôr B e a entrada seguir a seqüência $R\ Q\ R\ S\ S\ Q\ R\ R\ Q\ S\ R$, a saída obedecerá à seqüência $B\ C\ A\ A\ B\ D\ B\ C\ B\ C\ C\ B$.

Não há assim dificuldade, dados o transdutor, seu estado inicial e a seqüência de entrada, em deduzir sua trajetória: Embora o exemplo possa parecer não-natural, com seus saltos arbitrários, é, na realidade, inteiramente representativo, requerendo apenas mais estados e talvez a passagem ao limite de continuidade para tornar-se uma representação completamente natural. Na forma dada, entretanto, várias propriedades quantitativas são apresentadas de maneira óbvia e fàcilmente calculáveis, onde na forma contínua é preciso usar a difícil técnica da teoria da medida.

Ex. 1: Passe a mesma mensagem ($R\ Q\ S\ S\ Q\ R\ R\ Q\ S\ R$) através do mesmo transdutor, começando desta vez em A.

Ex. 2: Passe a mensagem "$R_1, R_2, R_3, R_1, R_2, R_3$" através do transdutor de S.4.1, começando-a em a.

Ex. 3: (Continuação.) Codifique a mesma mensagem através do mesmo transdutor, começando-a em b.

Ex. 4: (Continuação.) Depende a saída de um transdutor, para uma dada entrada, de seu estado inicial?

Ex. 5: Se o transdutor é $n' = n - a$, onde a é um parâmetro, qual será sua trajetória se ela começar em $n = 10$ e receber a seqüência de entrada 2, 1, — 3, —1, 2, 1?

Ex. 6: Passe a mensagem "314159..." (os dígitos de π) através do transdutor $n' = n + a - 5$, partindo o transdutor de $= 10$.

Ex. 7: Se a e b são parâmetros, de tal modo que o vetor (a,b) defina um estado paramétrico, e se o transdutor possui estados definidos pelo vetor (x,y) e pela transformação

$$\begin{cases} y' = x + (a - b)y, \\ x' = ax + by \end{cases}$$

complete a trajetória na tabela:

a	1	−2	0	−1	2	5	−2
b	−1	1	1	0	1	−2	0
x	2	1	2	?	?	?	?
y	1	4	−11	?	?	?	?

Ex. 8: Um transdutor, com parâmetro u, possui a transformação $dx/dt = -(u + 4)x$; é dada, a partir do estado $x = 1$, a entrada $u = \cos t$; determine os valores de x como saída.

Ex. 9: Se a fôr uma entrada para o transdutor,

$$\begin{aligned} dx/dt &= y \\ dy/dt &= -x - 2y + a, \end{aligned}$$

com o seguinte diagrama dos efeitos imediatos

$$a \rightarrow y \rightleftarrows x,$$

qual é a saída a partir de x se começou em (0,0) com entrada $a = \operatorname{sen} t$? (Sugestão: Use a transformada de Laplace.)

**Ex.* 10: Se a fôr entrada e o transdutor fôr

$$dx/dt = k(a - x)$$

o que caracteriza o comportamento de x quando se faz k positivo e numèricamente muito grande?

INVERSÃO DE UMA MENSAGEM CODIFICADA

8.6. Na S.8.4 enfatizamos o seguinte: para que um código seja útil como portador de mensagem, deve existir a possibilidade de sua inversão. Tentemos aplicar êste teste ao transdutor da S.8.5, considerando-o como um codificador.

Duas transformações são usadas, e é preciso distingui-las cuidadosamente. A primeira é a que corresponde a U da S.8.4, e cujos operandos são as mensagens individuais; a segunda é a do transdutor. Suponha que o transdutor da S.8.5 deva receber uma "mensagem" que consiste de duas letras, cada qual podendo ser uma das seguintes: Q, R, S. Nove mensagens são possíveis:

$$QQ, QR, QS, RQ, RR, RS, SQ, SR, SS$$

e estas correspondem a $M_1, M_2, \ldots, M_9$ de U. Suponha que o transdutor sempre começa em A; é fácil verificar que as correspondentes nove saídas serão (se ignorarmos o A inicial e invariável):

$$CA, CB, CC, AC, AA, AB, BC, BC, BB$$

Tais são os $C_1, C_2, \ldots, C_9$ de U. Agora, o código executado pelo transdutor não é um-um, e houve alguma perda de variedade, pois existem presentemente apenas oito elementos distinguíveis, sendo BC duplicado. Êste transdutor deixa de proporcionar a possibilidade de uma decodificação completa e exata; pois se BC chega, não há meio de dizer se a mensagem original era SQ ou SR.

Nesta conexão devemos reconhecer que incapacidade para decodificar pode dever-se a uma dentre duas razões muito diferentes. Pode simplesmente dever-se ao fato do decodificador, *que existe*, não estar à mão. Isto ocorre quando uma mensagem militar encontra um sinaleiro sem o livro de código, ou quando o ouvinte possui um disco (como uma forma codificada da voz) mas não a vitrola para tocá-lo. Completamente distinta é a incapacidade que se deve ao fato de duas mensagens distintas poderem resultar na mesma saída, como quando a saída BC provém do transdutor acima. Tudo o que o fato indica é que a mensagem original pode ter sido SQ ou SR, e que o decodificador capaz de distingui-las *não existe*.

É fácil ver que, se em cada coluna da tabela, todo estado fôsse diferente, então tôda transição indicaria um único valor do parâmetro; assim, estaríamos aptos a decodificar qualquer seqüência de estados emitidos pelo transdutor. O inverso é também verdadeiro; pois se pudermos decodificar *qualquer* seqüência de estados, cada transição deverá determinar um valor único do parâmetro, e assim os estados situados em uma coluna têm de ser todos diferentes. Acabamos então de identificar *a característica no transdutor que o faz corresponder a um codificador perfeito.*

Ex. 1: Em certo transdutor, com 100 estados, os parâmetros podem possuir 108 combinações de valores; poderão suas saídas ser sempre decodificadas? (Sugestão: Tente exemplos simples nos quais o número de transformações exceda o de estados.)

Ex. 2: (A fim de sublinhar a distinção entre as duas transformações.) Se a entrada de um transdutor tem 5 estados, sua saída 7, e a mensagem consista de alguma seqüência de 12, (i) quantos operandos possui a transformação do transdutor e (ii) quantos operandos possui a transformação de código *U*?

Ex. 3: Se uma máquina fôr contínua, a que corresponde "observar uma transição" em têrmos de instrumentação real?

**Ex.* 4: Se um transdutor tem a transformação $dx/dt = ax$, onde a é a entrada, será sempre possível decodificar a sua saída. (Sugestão: Resolva para a.)

8.7. *Projetando um inversor.* Vimos na seção anterior que, desde que um transdutor não perca distinções na transmissão a partir da entrada até a saída, a mensagem codificada fornecida como saída poderá sempre ser decodificada. Nesta seção provaremos que o mesmo processo pode ser feito automàticamente, i. e., dada uma máquina que não perca distinções, será sempre possível construir outra que, recebendo a primeira saída como entrada, *emitirá a mensagem original como sua própria saída.*

Adotaremos agora um ponto de vista algo diferente do da seção anterior. Então estávamos interessados na possibilidade de decodificar uma mensagem e em saber se a decodificação poderia ou não ser feita — por não importa quem. Voltamo-nos agora para a questão de como podemos construir um mecanismo de tal modo que êle efetue *automàticamente* a decodificação. Procuramos não uma mensagem restaurada, porém uma máquina. Como se deve construí-la? O que se requer para a sua especificação, sem dúvida, é o conjunto usual de transformações (S.4.1).

Um método possível, aquêle aqui utilizado, é simplesmente converter o processo que seguimos na seção anterior em forma mecânica, usando o fato de que *cada transição fornece informação sôbre o valor paramétrico sob o qual ocorre.* Queremos uma máquina, portanto, que aceite uma transição como entrada e que dê como saída o valor original do parâmetro. Saber agora que transição ocorreu, i. e., quais são os valores de i e de j em "$X_i \rightarrow X_j$", equivale claramente a saber qual é o valor do vetor (i, j); pois uma transição pode também ser concebida como um vetor de duas componentes. Podemos, portanto, alimentar as transições em um inversor se êste possuir uma entrada com dois parâmetros, um para assumir o valor do estado anterior e o outro para assumir o valor do posterior.

Resta apenas uma dificuldade: a transição envolve dois estados que não existem no mesmo instante de tempo, de modo que uma das entradas do inversor deve comportar-se *agora* segundo o que *era* a saída do transformador. Um artifício simples, todavia, superará tal dificuldade. Considere o transdutor.

↓	*q*	*r*	*s*
Q	*q*	*q*	*q*
R	*r*	*r*	*r*
S	*s*	*s*	*s*

Suponhamos que parta do estado *e* e que se lhe tenha fornecido a entrada *Q S S R Q S R R Q;* sua saída será *r q s s r q s r r q*, i. e., após a primeira letra, ela apenas repete a entrada, porém um passo depois. Dois transdutores dêste tipo, em série, repetirão a mensagem dois passos depois, e assim por diante. Claramente não há, em princípio, dificuldade de se obter atraso.

Suponhamos que o primeiro transdutor, o codificador, seja:

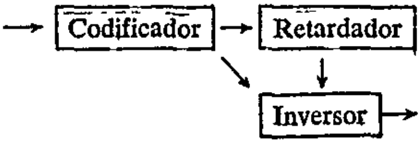
↓	*A*	*B*	*C*	*D*
Q	*D*	*A*	*D*	*B*
R	*B*	*B*	*B*	*C*
S	*A*	*C*	*A*	*D*

O que precisamos é de uma máquina que, por exemplo,

dada a entrada *A, A* emitirá *S*
" " " *A, B* " *R*
" " " *A, D* " *Q*
" " " *B, A* " *Q*.

(A entrada *A, C* nunca será alcançada realmente, pois a transição não pode ser emitida a partir do codificador.)

As três máquinas são assim acopladas:



O retardador apresenta a simples forma:

↓	a	b	c	d
A	a	a	a	a
B	b	b	b	b
C	c	c	c	c
D	d	d	d	d

e o inversor a forma:

	Q	R	S
(a,A)	S	S	S
(a,B)	R	R	R
(a,C)	(não ocorrerá)		
(a,D)	Q	Q	Q
(b,A)	Q	Q	Q
etc.	etc.		

para o qual a entrada é o vetor

(estado do retardador, estado do codificador).

O inversor emitirá agora a mesma seqüência que foi posta no codificador. Tal pressupõe que Q foi introduzido e provocou a transição $A \rightarrow D$ no codificador. Isso implica que o inversor receberá, neste passo, D diretamente do codificador (pois o codificador *está* em D), e a do retardator (pois o codificador *estava* em A no passo precedente). Com entrada (a,D) o inversor vai para o estado Q, que é o estado que supusemos antes. E similarmente, para os outros estados possíveis introduzidos.

Assim, dado um transdutor que não perca distinções, é *sempre possível construir um inversor automático.* A importância da demonstração é que não faz referência ao material efetivo do transdutor — não importa se é mecânico, eletrônico, neurônico ou hidráulico — a possibilidade de inversão subsiste. O que *é* necessário é a determinitude das ações do codificador e a manutenção, por êle, de tôdas as distinções.

Ex. 1: Por que não se pode usar como exemplo o Codificador da S.8.5?

Ex. 2: Complete a especificação do inversor que acabamos de dar.

Ex. 3: Especifique o retardador de dois passos em forma tabular.

8.8. (Esta seção pode ser omitida em primeira leitura.) Agora que identificamos a construção do inversor na forma mais geral, podemos examinar sua construção quando o transdutor é menos geral e mais parecido com as máquinas da vida cotidiana. O próximo passo é examinar a construção do inversor quando as transformações, do transdutor e do inversor, são dadas, não na forma abstrata de uma tabela mas por alguma função matemática.

Preliminarmente, consideremos a construção de um inversor para o transdutor com entrada a, variável n, e transformação $n' = n + a$. Um dispositivo adequado para o retardamento seria o transdutor com parâmetro n, variável p, e transformação $p' = n$. Agora é fácil verificar que, dada a entrada a como se mostrou, n (se se parte de 3) e p (se se parte de 1) se transformarão como:

a :	4	-2	-1	0	2	-1	-1	3
n :	3	7	5	4	4	6	5	4
p :	1	3	7	5	4	4	6	5

É óbvio agora que se o inversor, de variável m, deve receber n e p como entrada, na forma de vetor (n,p), e devolver a como saída, então M, como transformação, deve incluir transições tais como:

$$M: \downarrow \begin{matrix} (7,3) & (5,7) & (4,5) & (4,4) & \ldots \\ 4 & -2 & -1 & 0 & \ldots \end{matrix}$$

Um exame pormenorizado delas, a fim de determinar como o transformado segue do operando, prova que em todos os casos

$$m' = n - p$$

É fácil verificar que todo o sistema emitirá agora valores que a entrada original possuía dois passos atrás.

(O leitor poderá ser tentado a afirmar que, como $n' = n + a$, logo, $a = n' - n$, e o código está solucionado. Tal proposição é verdadeira, mas não vem de encontro ao nosso objetivo, que é construir uma máquina (veja § 2 da S.8.7). Isto *nos* capacita a decodificar a mensagem, mas não constitui a especificação da máquina.. A construção ou especificação exige as complicações do parágrafo anterior, que termina com $m' = n - p$, uma especificação para a máquina com entrada.)

A regra geral está agora clara. Partimos com a equação do transdutor, $n' = n + a$, e resolvemo-la para o parâmetro $a = n' - n$. O dispositivo de retardamento tinha a transformação $p' = n$. A transformação para o inversor é formada pelas regras, aplicadas à equação $a = n' - n$:

1: substitua a pelo nôvo símbolo do transdutor m';

2: substitua n' pelo parâmetro c;

3: substitua n pelo parâmetro d.

Então, se êsse inversor fôr ligado ao transdutor original, fazendo $d = n$, e ao retardador, fazendo $c = p$, terá as propriedades exigidas.

Se o transdutor original possuir mais de uma variável, o processo necessita apenas expansão adequada. Um exemplo, sem explicação, será suficiente. Suponhamos que o transdutor original tenha parâmetros a_1 e a_2, variáveis x_1 e x_2, e transformação

$$\begin{aligned} x'_1 &= 2x_1 + a_1x_2 \\ x'_2 &= 2x_2 + a_1a_2 \end{aligned}$$

Resolvendo para os parâmetros dados

$$\begin{aligned} a_1 &= (x'_1 - 2x_1)/x_2 \\ a_2 &= x_2(x'_2 - 2x_2)/(x'_1 - 2x_1) \end{aligned}$$

Um retardador para x_1 é $p_1 = x_1$, e para x_2 é p_2. As equações do inversor são formadas a partir das equações para a_1 e a_2, aplicando as regras

1: substitua cada a_i por um nôvo símbolo: $a_1 = m'_1$, $a_2 = m_2$;

2: substitua cada x'_i por um parâmetro c_i: $x'_1 = c_1$, $x_2 = c_2$;

3: substitua cada x_i por um parâmetro d_i: $x_1 = d_1$, $x_2 = d_2$.

Daí resulta o transdutor

$$\begin{aligned} m'_1 &= (c_1 - 2d_1)/d_2 \\ m'_2 &= d_2(c_2 - 2d_2)/(c_1 - 2d_1). \end{aligned}$$

Se agora êsse transdutor fôr ligado ao transdutor original por $d_1 = x_1$, $d_2 = x_2$, e aos retardadores por $c_1 = p_1$, $c_2 = p_2$, então m_1 e m_2 darão, respectivamente, os valores que a_1 e a_2 tinham há dois passos.

Ex. 1: Construa um inversor para o transdutor $n' = an$.

Ex. 2: Similarmente para $n' = n - 2a + 4$.

Ex. 3: Similarmente para $x' = ax - by$, $y' = ax + by$.

Ex. 4: Tente construir um inversor para o transdutor $n' = n + a + b$; por que não pode ser feito?

**Ex.* 5: Construa um inversor para o transdutor

$$dx_1/dt = a_1 x_1 x_2 a_2$$
$$dx_2/dt = (a_1 - 1)x_1 + a_2 x_2.$$

Ex. 6: Por que, nesta seção, M tem de transformar (7,3) em 4, e não em —2, como a tabela acima poderia sugerir?

8.9. *Tamanho do inversor.* Com os fatos das seções anteriores, é possível agora fazer alguma estimativa de quanto mecanismo é necessário para inverter a saída de um dado transdutor. A S.8.7 esclarece que, se o transdutor original não deve perder distinções, precisa, no mínimo, ter tantos valores distintos de saídas quantos são os de entrada. Similarmente, o inversor tem de possuir, no mínimo, número igual, mas não necessàriamente mais. Os retardadores exigirão menos, porque são simples. Parece, portanto, que se o inversor fôr feito de componentes similares aos do transdutor original, então qualquer que seja a complexidade ou o tamanho do transdutor original *o inversor terá a mesma ordem de complexidade e tamanho.*

A importância desta observação é que a gente sente, às vêzes, quando pensa nas complexidades do córtex cerebral ou de um sistema ecológico, que todo efeito transmitido através do sistema tem de tornar-se quase de pronto tão enredado a ponto de estar além de qualquer desemaranhamento possível. Evidentemente, isso não é assim; as complicações do codificamento acrescentadas por um transdutor encontram-se amiúde ou costumeiramente dentro dos podêres decodificadores de outro transdutor de tamanho similar.

TRANSMISSÃO DE SISTEMA PARA SISTEMA

8.10. *Variedade "transmissora".* Cabe perfeitamente esclarecer neste ponto um assunto sôbre o qual reina certa confusão. Embora seja tentador conceber a variedade (ou informação) atravessando um transdutor, ou a variedade passando de um transdutor a outro, a frase, no entanto, é perigosamente enganosa. Embora um envelope possa conter uma mensagem, a mensagem singular, sendo única, não pode apresentar variedade; assim, um envelope, embora possa conter mensagem, não pode conter variedade: sòmente um *conjunto* de envelopes pode apresentá-la. Similarmente, não pode haver variedade em um transdutor (em dado momento qualquer), pois um transdutor particular, em um momento particular, está em um e apenas em um estado. Um transdutor, portanto, não pode "conter" variedade. O que *pode* acontecer é que o número de transdutores (possìvelmente de construção idêntica), em algum dado momento, pode apresentar variedade nos estados ocupados; e anàlogamente um transdutor, em certo número de ocasiões, pode apresentar variedade nos estados que ocupa nas várias ocasiões.

(O que foi dito aqui repete algo já mencionado na S.7.5, mas nunca é demais acentuar o assunto.)

Cumpre lembrar sempre que o conceito de "variedade", como usado neste livro, e o de "informação", como usado na teoria da comunicação, implica referência a algum *conjunto,* não a um indivíduo. Qualquer tentativa de abordar a variedade e a informação como uma coisa passível de existir em outra coisa conduzirá provàvelmente a "problemas" difíceis que nunca deveriam surgir.

8.11. *Transmissão em um passo.* Depois de considerar como as variedades se modificam em um único transdutor, cabe agora estudar como ela passa de um sistema a outro, de T a U digamos, onde T é um sistema absoluto e U, um transdutor.

$$\boxed{T} \rightarrow \boxed{U}$$

Como acabamos de afirmar, assumimos que existem muitas réplicas, idênticas em construção (i. e., na transformação) mas capazes de estar em vários estados independentemente umas das outras. Se, em dado momento, os T possuem certa variedade, queremos determinar quão depressa a variedade se espalha aos U. Suponhamos que, no dado momento, os T estejam ocupando n estados distintos e os U, n_U. (O argumento seguinte será acompanhado com maior facilidade se o leitor construir um exemplo simples e manejável para T e U sôbre o qual o argumento pode ser aplicado.)

T atua como parâmetro para U, e para cada estado de T corresponderá um gráfico de U. O conjunto dos U terá portanto tantos gráficos quantos são os T dotados de valor, i. e., n_T gráficos. Isto significa que de cada estado U podem sobrevir n_T transições diferentes (proporcionadas pelos n_T

gráficos diferentes), i. e., a partir do estado U um ponto representativo pode passar por qualquer dos, no máximo, · estados U. Um conjunto de U que possui todos os seus pontos representativos no mesmo estado pode assim, sob o efeito da variedade de T, mudar para um conjunto com seus pontos espalhados sôbre não mais do que n_T estados. Há n_U estados tais dos U, cada qual capaz de ser espalhado sôbre não mais do que n_T estados, de modo que o espalhamento total não pode, após um passo, ser maior do que $n_T n_U$ estados. Se a variedade fôr medida logarìtmicamente, então a variedade em U após um passo não pode exceder a soma das variedades iniciais em U e em T. Em outros têrmos, *os U não podem ganhar em variedade em um passo mais do que a variedade presente nos T.*

Esta é a lei fundamental da transmissão de variedade de um sistema a outro sistema. Será utilizada freqüentemente no restante do livro.

Ex. 1: Um sistema tem estados (t,u) e transformação $t' = 2t$, $u' = u + t$, de modo que t domina u. Oito dêstes sistemas iniciaram-se nos estados (0,9), (2,5), (0,5), (1,9), (1,5), (2,5) (0,9), (1,9), respectivamente. Quanto de variedade há nos t? Quanto há nos u?

Ex. 2: (Continuação.) Determine os estados no próximo passo. Quanta variedade possui t agora? Preveja qual o limite superior para a variedade dos u. Quanto tem os u agora?

Ex. 3: Noutro sistema, T tem duas variáveis, t_1 e t_2, e U tem duas, u_1 e u_2. O todo tem estados (t_1, t_2, u_1, u_2), e transformação $t'_1 = t_1 t_2$, $t'_2 = t_1$, $u_1 = u_1 = t_2 u_2$, $u'_2 = t_1 u_2$, de modo que T domina U. Três réplicas partiram dos estados iniciais (0,0,0,1), (0,,0,1,1) e (1, 0, 0,1). Qual é a variedade dos T? Qual a dos U?

Ex. 4: (Continuação.) Determine os três estados um passo depois. Qual a variedade de U, agora?

8.12. *Transmissão no segundo passo.* Acabamos de ver que, no primeiro passo, U pode ganhar em variedade de um montante até alcançar o montante de variedade em T; o que sucederá no segundo passo? T pode ainda ter alguma variedade: isso também passará para U, aumentando ainda mais a sua variedade?

Tomemos um simples exemplo. Suponhamos que cada membro de todo o conjunto de réplicas esteja em um dos seis estados (T_i,U_k), (T_i,U_l), (T_i,U_m), (T_j,U_k), (T_j,U_l), (T_j,U_m), de modo que os T estejam todos quer em T_i ou T_j e os

U estejam todos em U_k, U_l ou U_m. Agora o sistema, como um todo, é absoluto; assim, todos aquêles em, digamos, (T_i, U_k), embora possam mudar de estado para estado, mudarão todos de modo similar, visitando os vários estados juntos. Vale o mesmo argumento para aquêles que estão em cada um dos outros cinco estados. Segue-se que a variedade do conjunto no estado não pode exceder a seis, não importa quantas réplicas possa haver no conjunto, ou quantos estados possa haver em T e U, ou por quanto tempo as mudanças continuem. Disso se segue que os U não podem apresentar mais variedade que seis estados U. Destarte, uma vez que U tenha aumentado em variedade pela quantidade em T, deve cessar todo aumento ulterior. Se U recebe todo o aumento em um passo (como acima), então U não receberá aumento ulterior no segundo passo, mesmo que T ainda possua alguma variedade.

Note-se quão importante no argumento são os *pareamentos* entre os estados de T e os estados de U, i. e., que valor de T e de U ocorrem na mesma máquina. Evidentemente o simples conhecimento de quantidades de variedade em T e em U (sôbre o conjunto das réplicas) não basta para a previsão de como elas variarão.

8.13. *Transmissão através de um canal.* Podemos agora considerar como a variedade, ou informação, é transmitida através de um pequeno transdutor intermediário — um "canal" — onde "pequeno" se refere ao seu número de estados possíveis. Suponhamos que dois grandes transdutores Q e S estejam conectados por um pequeno transdutor R, de modo que Q domina R e R domina S.

$$\boxed{Q} \rightarrow \boxed{R} \rightarrow \boxed{S}$$

Como de costume, suponhamos que haja um grande número de réplicas de todo sistema triplo. Seja r o número de estados possíveis dos R. Coloquemos $\log_2 r$ igual a ρ. Admitamos que, no estado inicial, os Q possuam uma variedade muito maior do que r estados, e que os R e os S, por razões de simplicidade, não possuam nenhuma. (Se tivessem alguma variedade, a S.8.11 prova que a nova variedade, obtida de Q, apenas se adicionaria, logarìtmicamente, àquela que já possuía.)

A aplicação de S.8.11 a *R* e *S* mostra que, no primeiro passo, a variedade dos *S* não cresce absolutamente. Assim, se as três variedades iniciais, medidas logarìtmicamente são respectivamente *N*, 0 e 0, então, após o primeiro passo, podem ser tão grandes quanto *N*, ρ e 0, porém não maiores.

No próximo passo, *R* não pode ganhar mais em variedade (por S.8.12), mas *S* pode fazê-lo a partir de *R* (como é fácil verificar quando se considera um exemplo real como o Ex. 2). Destarte, após o segundo passo, as variedades podem ser tão grandes quanto *N*, ρ e ρ. Do mesmo modo, após o terceiro passo, podem ser tão grandes quanto *N*, ρ e 2ρ; e assim por diante. A variedade dos *S* pode, assim, crescer com o tempo tão depressa como os têrmos da série 0, ρ, 2ρ, 3ρ, . . ., porém não mais depressa. A regra é agora óbvia: *um transdutor que não pode assumir mais do que* r *estados não pode transmitir variedade em mais do que* $\log_2$ r *bits por passo.* Eis o que se entende, em essência, por diferentes transdutores dotados de diferentes "capacidades" de transmissão.

À medida que a variedade dos *S* sobe, passo a passo, podemos ver *que o montante de variedade que um transdutor* (como *R*) *pode transmitir é proporcional ao produto de sua capacidade, em bits, e ao número de passos dados.* Daí provém o importante corolário, que será usado repetidamente depois: *dado bastante tempo, qualquer transdutor pode transmitir qualquer quantidade de variedade.*

Um aspecto importante dêste teorema é sua extrema generalidade. Que espécie de máquina é essa que atua como transdutor intermediário, como canal, é de todo irrelevante: pode ser uma máquina de atarraxar que possui apenas dois estados "aberto" e "fechado", ou um potencial elétrico que pode assumir muitos valores, ou um gânglio neural completo, ou um jornal — todos são dirigidos pelo teorema. Graças a êles, pode-se dar uma precisão quantitativa à sensação intuitiva de que alguma restrição fica envolvida na taxa de comunicação se a comunicação tem de ocorrer através de um pequeno transdutor intermediário, tal como se verifica quando a informação da retina ao córtex visual tem de atravessar o corpo geniculado lateral, ou quando a informação acêrca dos movimentos de um predador tem de ser passada ao rebanho por um batedor solitário.

Ex. 1: Um sistema absoluto, de três partes *Q*, *R* e *S*, tem estados (q, r, s) e transformação

$$\begin{array}{l} q: \\ q': \end{array} \downarrow \begin{array}{ccccccccc} 4 & 6 & 6 & 5 & 6 & 5 & 8 & 8 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{array}$$

$$r' = \begin{cases} 0, \text{ se } q + r \text{ fôr par} \\ 1, \text{ se } q + r \text{ fôr ímpar.} \end{cases}$$

$$s' = 2s - r.$$

Assim *Q* domina *R*, e *R* domina *S*. Qual é a capacidade de *R* como canal?

Ex. 2: (Continuação.) Nove réplicas começaram nos estados iniciais (1,0,0), (2,0,0), ..., (9,0,0), de modo que apenas *Q* possui alguma variedade inicial. (i) Como mudou a variedade dos *Q* nos primeiros cinco passos? (ii) Como mudou a dos *R*? (iii) E a dos *S*?

Ex. 3: (Continuação.) Se a resposta ao Ex. 2 (iii) fôsse dada como "S:1,1,4,5,5", por que ela seria òbviamente errada, sem o cálculo das trajetórias reais?

8.14. O exercício que demos deve ter mostrado que, quando *Q*, *R* e *S* formam uma cadeia, *S* pode ganhar variedade passo a passo a partir de *R*, mesmo quando *R* não mais pode ganhar variedade após o primeiro passo (S.8.12). A razão é que a saída de *R*, tomada passo a passo como uma seqüência, forma um vetor (S.9.9), e a variedade em um vetor pode exceder a de uma componente. E se o número de componentes de um vetor pode ser aumentado sem limite, então a variedade em vetor pode também ser aumentada ilimitadamente, ainda que cada componente permaneça limitada a dois. Assim, a *seqüência* de dez moedas em giro pode atingir uma variedade até 1024 valores, embora cada componente esteja restrita a apenas dois. Similarmente, os valores dos *R*, embora restritos no exercício a dois, podem proporcionar uma seqüência que possui variedade maior do que dois. À medida que prossegue o processo de transmissão, *S* é afetado por tôda a seqüência (e a sua variedade aumenta), *pelo vetor todo*, e assim uma variedade de mais de dois pode passar através de *R*. O encolhimento na capacidade de um canal é assim compensável (para manter constante a variedade total transmitida) por um aumento no comprimento da seqüência — fato já indicado na seção anterior, e a ser usado mais tarde com freqüência.

Ex. 1: Um sistema absoluto T domina uma cadeia de transdutores $A_1, A_2, A_3, A_4, \ldots$: $\boxed{T} \to \boxed{A_1} \to \boxed{A_2} \to \boxed{A_3} \to \boxed{A_4} \to \ldots$ Um conjunto de réplicas começa com variedade em T mas sem variedade alguma em A_1, nem em A_2 etc. Prove que, após k passos, as variedades em $A_1, A_2, \ldots, A_k$, podem ser não-zero, mas as em $A_{k+1}, A_{k+2}, \ldots$ devem ainda ser zero (i. e., que a variedade dos T "não pode ter-se expandido além de A_k".)

Ex. 2: Dê 27 moedas, idênticas na aparência, sabe-se que uma é falsificada e mais leve em pêso. Há uma balança disponível e a moeda falsificada deve ser identificada por uma série de pesagens, no menor número possível. *Sem descobrir o método* — encarando a balança como um transdutor que veicula informação das moedas para o observador —, de um número abaixo do qual o total de pesagens não pode cair. (Sugestão: Qual é a variedade em uma única pesagem, se os resultados podem ser apenas igualdade, prato esquerdo mais leve, prato direito mais pesado?)

8.15. *Retardo.* O arranjo do sistema da S.8.13:

$$\boxed{Q} \to \boxed{R} \to \boxed{S}$$

pode também ser visto como

$$\boxed{T} \to \boxed{S}$$

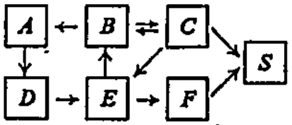
onde Q e R foram considerados como se formassem um único sistema T que, sem dúvida, é absoluto. Se agora um observador estuda a transferência de variedade de T para S, com exatamente os mesmos eventos que os da S.8.13 ocorrendo efetivamente, verificará que a variedade se transfere em pequenas quantidades, passo a passo, ao contrário da transferência da S.8.11, que era completa em um passo.

O motivo da distinção reside simplesmente em que, na S.8.11, o conjunto do sistema dominante (T) exercia efeito imediato sôbre o dominado (U), enquanto, na S.8.13, T contém uma parte Q que não exerce efeito imediato sôbre o receptor S. O efeito dos Q devia exercer-se através de R, e foi por isso retardado.

Esta transferência mais demorada é comum nos sistemas reais apenas porque muitos dêles são constituídos de partes as quais não têm tôdas efeito imediato no sistema receptor. Assim, se o córtex cerebral, como receptor, é afetado pelo ambiente (o qual não tem efeito imediato sôbre o córtex), a ação precisa ocorrer através de uma cadeia de sistemas: os órgãos dos sentidos, os nervos sensoriais, os núcleos sensoriais, e assim por diante; e por esta razão um certo retardo se impõe. Mesmo dentro de uma parte assim alguma transferência tem de processar-se de ponto a ponto, retardando dêsse modo sua transferência à parte seguinte.

Inversamente, se se verifica em prova que um sistema tal como T transmite sua variedade a outro sistema apenas durante um certo número de passos, então se poderá prever que T, se examinado em detalhe, consiste de subsistemas acoplados de modo que nem tôdas as variáveis de T exercem efeito imediato sôbre S.

Ex. 1: Se T consiste dos subsistemas A, ..., F unidos entre si e a S, como mostra o diagrama dos efeitos imediatos:



quantos passos serão necessários para que tôda a variedade em T seja transferida para S?

Ex. 2: (Continuação.) Quanto tempo demora a transmissão de uma mensagem que informe dos estados dos T, apenas de T para S?

Ex. 3: Se J, com as variáveis w, x, y, z, domina K, com a variável k, pela transformação $w' = w - y$, $x' = w + xz$, $y' = 2wy - z$, $z' = yz^2$, $k' = x - 3k$, quantos passos serão necessários para que tôda a variedade em J seja transferida para K?

Ex. 4: (Continuação.) No mesmo sistema, quanto tempo levaria enviar uma mensagem de w para z?

8.16. Para aperfeiçoar a nossa compreensão dêsses assuntos, consideremos agora dois sistemas unidos de modo que haja realimentação:

$$\boxed{T} \rightleftarrows \boxed{U}$$

A S.8.11 mostrou que T passará variedade para U; não possuindo esta variedade, poderá U passá-la de volta para T e, por esta razão, aumentar ainda mais a variedade de T?

De nôvo a resposta é dada diretamente quando consideramos um conjunto de réplicas. Suponhamos de início que a variedade existia apenas entre os T, estando todos os U no mesmo estado. Dividamos o conjunto todo em subconjuntos, consistindo cada subconjunto daqueles com T em um estado particular, de modo que o conjunto i, digamos, consista dos sistemas com T no estado T_i. Dentro de tal subconjunto não há agora variedade em estado, e variedade alguma pode desenvolver-se, pois o sistema todo (T, U) é absoluto. A variedade inicial dos T, portanto, não aumentará, quer no primeiro passo ou subseqüentemente. Em um sistema determinado, *a realimentação não conduz a um aumento regenerativo na variedade.*

O importante no argumento acêrca da realimentação de T pelos U é que aquilo com que U retroalimenta T, se correlaciona altamente com aquilo que está em T, pois cada U retroalimenta o T particular que atuou sôbre êle no passo anterior, e não o outro. O argumento exige destarte um tratamento acurado das correspondências entre os vários T e U.

Os argumentos das seções prévias provaram que, embora o assunto seja tratável em palavras nos casos simples (os que acabamos de considerar), a tentativa de manipular casos complexos na forma verbal conduzirá provàvelmente a complexidades intoleráveis. O que se quer é um maquinismo simbólico, uma álgebra, que nos permita manejar as relações mais ou menos mecânicamente, ficando as complexidades a cargo das regras da manipulação simbólica. Parece provável que a teoria dos conjuntos, especialmente como foi desenvolvida por Bourbaki e Riguet, proporcione a técnica. Mas se fazem necessárias pesquisas ulteriores nestas questões.

8.17. *Interferência.* Se um ácido e uma base atravessam o mesmo tubo, cada um destrói o outro; o que sucederá se duas mensagens atravessam o mesmo canal? — interferirão entre si, e destruirão uma a outra?

Exemplos simples bastam para estabelecer que o mesmo canal físico pode muito bem veicular mais de uma mensagem sem interferência, transitando cada mensagem como se as outras não existissem. Suponhamos, por exemplo, que um emitente desejasse informar um receptor, diàriamente, por meio de um breve anúncio de caráter pessoal, na respectiva seção de um jornal, a qual dentre 26 eventos diferentes êle alude, e suponhamos que tenha mandado imprimir uma única letra como a forma codificada. O mesmo canal de "uma letra impressa" poderia *simultâneamente* ser utilizado para veicular outras mensagens, de variedade dois, mediante a impressão da letra em minúscula ou maiúscula. As duas mensagens seriam então transmitidas com interferência tão diminuta como se estivessem em páginas separadas. Assim, se dez mensagens sucessivas fôssem enviadas, N K e S z t y Z w m transmitiria tanto n k e s z t y z w m quanto 1 1 0 1 0 0 0 1 0 0 por inteiro. É assim possível que duas mensagens passem através do mesmo objeto físico sem destruição mútua.

Como exemplo de tipo bastante diferente, consideremos a transformação do Ex. 2.14.11, e a posição de, digamos, A''' como uma forma codificada da de A (com B''' similarmente como a forma codificada de B). Assim um tesouro poderia estar enterrado em A e um arsenal em B, com marcas indicativas em A''' e B'''. Ora, uma mudança na posição de B leva a uma alteração de A''', de modo que o valor dos B desempenha um papel essencial na codificação de A para A''' (e, inversamente, de A para B'''); assim, as duas mensagens interagem. Não obstante, a interação não é destrutiva para a informação sôbre os pontos em que se encontram o tesouro e o arsenal, pois, dadas as posições de A''' e B''', as de A e B podem sempre ser reconstruídas, isto é, as mensagens continuam ainda em condições de serem exatamente decodificadas.

As condições necessárias para que duas mensagens não interfiram destrutivamente podem ser encontradas considerando-se o fato básico da codificação — um *conjunto* de mensagens é convertido em um conjunto de transformadas (S.8.4) — e utilizando-se o fato de que duas mensagens quaisquer de diferentes tipos podem ser colocadas lado a lado e consideradas como componentes de um "vetor" mensagem, do mesmo modo que duas variáveis quaisquer podem sempre ser consideradas como componentes de um vetor. Assim se, no exemplo da letra impressa, x representa a variável "qual mensagem dentre as 26" e y a variável "qual das duas", o símbolo impresso será uma codificação da mensagem única (x, y).

Suponhamos que as duas mensagens dadas x e y não interfiram destrutivamente. Isto implica que tanto os valores de x quanto os de y são reconstrutíveis a partir da forma recebida. Segue-se que, se duas mensagens primárias são distintas, então as suas formas codificadas têm de ser distintas (pois de outro modo a decodificação única não seria possível). Segue-se daí que, se as interações devem ser não-destrutivas, *a variedade nas formas recebidas precisa ser não menor do que nas originais.* Esta condição vale para o exemplo da letra impressa, pois tanto as mensagens originais quanto a forma impressa têm a variedade de 26×2.

O fato do caos não ocorrer necessàriamente quando duas mensagens se encontram no mesmo canal é de grande importància na neurofisiologia, especialmente na do córtex cerebral. No caso, a riqueza de conexão é tão grande que muita mistura de mensagens deve ocorrer inevitàvelmente, seja apenas devido à falta de qualquer método para mantê-las separadas. Assim, uma corrente de impulsos provenientes do córtex auditivo e que veicule informação relevante para uma reação pode encontrar uma corrente de impulsos proveniente do córtex visual que veicule informação relevante a alguma outra reação. Tem sido um problema importante na neurofisiologia saber como a interação destrutiva e o caos são evitados.

O debate desta seção provou, todavia, que o problema está mal enunciado. O caos não ocorre necessàriamente quando duas mensagens se encontram, ainda quando cada uma delas afeta o mesmo conjunto físico de variáveis. Através de tôdas as mudanças, desde que não se perca variedade e que o mècanismo seja determinado nos pormenores, as duas mensagens podem continuar a existir, passando simplesmente de uma codificação a outra. Tudo o que é necessário para a sua recuperação é um inversor adequado, e, como mostrou a S.8.7, sua construção é sempre possível.

Ex. 1: (Veja Ex. 2.14.11.) Se A''' está no ponto (0,0) e B''' em (0,1), reconstrua a posição de A.

Ex. 2: Um transdutor possui dois parâmetros: α (que pode assumir os valores a ou A) e β (que pode assumir os valores b ou B). Seus estados — W, X, Y, Z — são transformados segundo o quadro:

↓	W	X	Y	Z
(a,b)	W	Y	Y	Y
(a,B)	X	X	W	W
(A,b)	Z	W	X	X
(A,B)	Y	Z	Z	Z

Duas mensagens, uma a série dos valores α e a outra a série dos valores β, são transmitidas simultâneamente, iniciando-se juntas. Se o receptor estiver interessado apenas na mensagem α, poderá êle sempre reconstruí-la, não importa o que seja enviado por β? (Sugestão: S.8.6.)

Ex. 3: Junte barras por meio de machos-fêmeas, como indica a Figura 8.17.1:

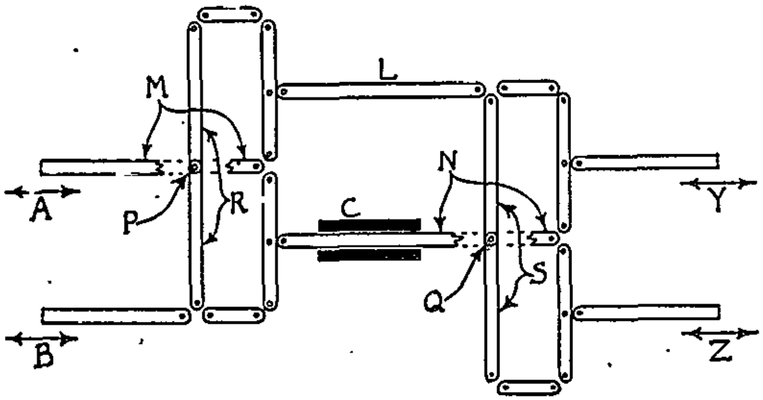


Fig. 8.17.1

(Separam-se aqui as junções de machos-fêmeas para mostrar a construção.) *P* é um pivô fixo à base, sôbre o qual a barra *R* pode girar; similarmente para *Q* e *S*. A barra *M* passa sôbre *P* sem conexão; similarmente para *N* e *Q*. Uma coerção tubular *C* assegura que todos os movimentos, para pequenos arcos, terão de ser para a direita ou para a esquerda apenas (como a figura indica).

Os movimentos em *A* e *B* provocarão movimentos em *L* e *N*, e assim em *Y* e *Z*, e pode-se considerar o todo como um dispositivo para enviar as mensagens "posição de *A*" e "posição de *B*", via *L* e *N*, para as saídas *Y* e *Z*. Verificar-se-á que, com *B* fixo, movimentos em *A* provocam movimentos *tanto* em *L quanto* em *N*; similarmente, com *A* fixo, movimentos *B* também afetam tanto *L* quanto *N*. Mensagens simultâneas de *A* e *B* passam assim ao mesmo tempo por *L* e *N*, e evidentemente aí se encontram. Interagem as mensagens de modo destrutivo? (Sugestão: Como *Y* se move se *A* se move sòzinho?)

Ex. 4: (Continuação.) Determine a relação algébrica entre as posições em *A*, *B*, *Y* e *Z*. O que se entende por "decodificação" nesta forma algébrica?

Transmissão Incessante

9

9.1. O presente capítulo continua o tema do anterior, e estudará a variedade e a sua transmissão, mas se aterá, de preferência, ao caso especial da transmissão mantida por um tempo indefinidamente longo. É o caso do nervo ciático, ou do cabo telefônico, que veicula incessantemente mensagens, ao contrário das transmissões do capítulo anterior que foram estudadas para apenas alguns passos no tempo.

Foi Shannon quem se dedicou em especial ao estudo das transmissões incessantes, e o presente capítulo, principalmente, introduzirá sua *Teoria Matemática da Comunicação*, com especial ênfase em sua relação com outros tópicos desenvolvidos nesta *Introdução*.

Todavia, daremos neste capítulo uma série de apontamentos, visando a suplementar a obra-prima de Shannon, mais do que uma descrição completa em si própria. Cumpre encarar o livro de Shannon como a fonte primordial, e consultá-lo em primeiro lugar. Admitirei que o leitor o tenha à disposição.

9.2. *A transformação não-determinada.* Se a transmissão deve continuar por um tempo indefinidamente longo, a variedade precisa ser sustentada, e não como no caso estudado na S.8.11, onde a transmissão de variedade dos *T* parou após o primeiro passo. Agora, qualquer sistema determinado de tamanho finito não pode ter uma trajetória que seja infinitamente longa (S.4.5). Devemos pois considerar agora uma forma mais compreensiva de máquina e transformação — a não-determinada.

Até aqui tôdas as nossas transformações foram univalentes, representando, assim, a máquina determinada. Uma extensão foi sugerida na S.2.10, e podemos agora explorar a possibilidade de um operando com mais de um transformado. É necessário, todavia, alguma restrição suplementar, de modo a manter as possibilidades dentro de limites e sujeitas a alguma lei. Elas não podem tornar-se completamente caóticas. Um caso de muitas aplicações, como se verificou, é aquêle em que cada estado operando, em vez de transformar-se em um nôvo estado particular, pode passar a algum dos possíveis estados, sendo a seleção do estado particular efetuada por algum método ou processo que dá a cáda estado uma *probabilidade constante* de ser o transformado. É a invariância da probabilidade que proporciona a lei ou ordenação sôbre a qual é possível basear proposições definidas.

Uma tal transformação seria a seguinte: $x' = x + a$, onde o valor de a é dado pelo giro de uma moeda e pelo emprêgo da regra: Cara: $a = 1$; Coroa: $a = 0$. Assim, se o valor inicial de x for 4, e se a moeda fornecer a seqüência K K C C C K C K K C, a trajetória será 4, 4, 4, 5, 6, 7, 7, 8, 8, 8, 9.. Se a moeda fornecer C K C C K K K C K K, a trajetória será 4, 5, 5, 6, 7, 7, 7, 7, 8, 8, 8. Assim, a transformação e o estado inicial não bastam para definir uma trajetória única, como ocorria no caso em S.2.17; definem apenas um *conjunto* de trajetórias. A definição acima é *suplementada* por instruções a partir da moeda (compare S.4.19), de modo que obtemos uma trajetória *única*.

Poder-se-ia representar a transformação (de modo uniforme com respeito às representações usadas prèviamente) como:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & 3 \arrow[dl, "\frac{1}{2}"'] \arrow[dr, "\frac{1}{2}"] & \\ 3 & & 4 \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd}[column sep=small] & 4 \arrow[dl, "\frac{1}{2}"'] \arrow[dr, "\frac{1}{2}"] & \\ 4 & & 5 \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd}[column sep=small] & 5 \arrow[dl, "\frac{1}{2}"'] \arrow[dr, "\frac{1}{2}"] & \\ 5 & & 6 \end{tikzcd} \quad \text{etc.}$$

onde o $\frac{1}{2}$ indica que o sistema se modificará a partir do estado 3

com probabilidade $\frac{1}{2}$ para o estado 3,

e com probabilidade $\frac{1}{2}$ para o estado 4.

Semelhante transformação, e sobretudo o conjunto de trajetórias que ela pode conduzir, chama-se "estocástica", a fim de distingui-la da univalente e determinada.

Uma representação dêste tipo logo se torna de difícil manejo se muitas transições são possíveis para cada estado. Um método mais conveniente e fundamentalmente adequado é o das matrizes, análogo ao da S.2.10. Constrói-se uma matriz escrevendo os possíveis operandos numa linha no tôpo, e as possíveis transformadas numa coluna abaixo, à esquerda; então, na interseção da coluna *i* com a linha *j*, põe-se a probabilidade de que o sistema passe ao estado *j*, se estiver em um estado *i*.

Como exemplo, consideremos a transformação que acabamos de descrever. Se o sistema estava no estado 4, e se a moeda possui uma probabilidade $\frac{1}{2}$ de dar cara, então a probabilidade dela passar ao estado 5 é $\frac{1}{2}$; e assim seria a sua probabilidade de permanecer no 4.

$\downarrow$	...	3	4	5	6	...
...	...	...	...	...	...	...
3	...	$\frac{1}{2}$	0	0	0	...
4	...	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0	...
5	...	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	...
6	...	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	...
...	...	...	...	...	...	...

Tôdas as outras transições possuem probabilidades zero. Dêsse modo a matriz pode ser construída célula por célula.

Esta é a **matriz de probabilidades de transição.** (O leitor deve ser prevenido de que a forma transposta, com linhas e colunas trocadas, é mais comum na literatura; mas a forma dada apresenta vantagens substanciais, e.g., Ex. 12.8.4, além de estar em uniformidade com a notação utilizada em todo êste livro.)

A esta altura, devemos ficar perfeitamente esclarecidos quanto ao que entendemos por "probabilidade". (Veja também S.7.4.) Não só devemos ser claro sôbre o significado, como êste tem, por sua vez, de ser enunciado na forma de um teste operacional, *prático.* (Sentimentos subjetivos de "grau de confiança" tornam-se aqui inaplicáveis.) Assim, se dois observadores divergem na questão de saber se algo possui uma "probabilidade constante", por meio de que teste poderão êles resolver esta diferença?

Probabilidades são freqüências. "Um evento 'provável' é um evento freqüente." (Fisher.) A chuva é "provável" em Manchester porque é freqüente em Manchester, e dez Vermelhos em sucessão na roleta são "improváveis" porque não são freqüentes. (O leitor prudente apegar-se-á a esta definição, recusando-se a ser atraído para indagações meramente especulativas, como quanto ao valor numérico a ser atribuído à "probabilidade" de vida em Marte, para a qual não pode haver freqüência.) O que foi dito na S.7.4 é relevante aqui, pois o conceito de probabilidade, nos seus aspectos práticos, tem sentido apenas sôbre algum conjunto no qual os vários eventos ou possibilidades ocorrem com suas freqüências características.

O teste da probabilidade constante torna-se assim um teste da freqüência constante. O experimentador permite que o processo continue por algum tempo até que se declare alguma freqüência para o evento. Assim, se desejasse ver se Manchester tem uma probabilidade constante, i. e., invariante, de chuva (em condições adequadamente definidas), registraria as chuvas até que tivesse firmado uma primeira estimativa da freqüência. Então, começaria de nôvo, coligiria novos registros e formaria uma segunda estimativa. Poderia continuar coletando terceiras e quartas estimativas. Se estas várias estimativas se mostrassem sèriamente discrepantes, diria que a chuva em Manchester não apresenta probabilidade constante. Caso, entretanto, concordassem, poderia, se lhe aprouvesse, dizer que a fração em que elas concordaram era *a* probabilidade constante. Assim, um evento, em *uma seqüência muito longa,* tem uma probabilidade "constante" de ocorrer a cada passo, se cada porção longa da seqüência apresenta a sua ocorrência com aproximadamente a mesma freqüência relativa.

Tais palavras podem ser enunciadas de modo mais exato em têrmos matemáticos. O que importa aqui é que, através de todo êste livro, quaisquer frases sôbre "probabilidade" têm significados objetivos, de validade comprovável experimentalmente. Não dependem de qualquer estimativa subjetiva.

Ex. 1: Tome cinco cartas de um baralho, Ás, 2, 3, 4, 5. Embaralhe-as e disponha-as numa fila para substituir os asteriscos na transformação T:

$$T: \downarrow \begin{matrix} \text{Ás} & 2 & 3 & 4 & 5 \\ * & * & * & * & * \end{matrix}$$

A transformação particular assim obtida é determinada ou não? (Sugestão: É univalente ou não?)

Ex. 2: Que regra deve valer para os números que aparecem em cada coluna de uma matriz de probabilidades de transição?

Ex. 3: Uma regra como a do Ex. 2 vale para os números em cada linha?

Ex. 4: Se a transformação definida nesta seção começar no 4 e continuar mais 10 passos, quantas trajetórias ocorrerão no *conjunto* assim definido?

Ex. 5: Qual a diferença entre o gráfico cinemático da transformação estocástica e o da transformação determinada?

9.3. A transformação estocástica é simplesmente uma extensão da determinada (ou univalente). Assim, suponhamos que a matriz de probabilidades de transição de um sistema de três estados seja:

primeiro	↓	*A*	*B*	*C*
	A	0	0·9	0·1
	B	0·9	0	0
	C	0·1	0·1	0·9

e depois	↓	*A*	*B*	*C*
	A	0	1	0
	B	1	0	0
	C	0	0	1

A mudança da primeira matriz para a segunda, embora pequena (e pode tornar-se tão pequena quanto queiramos), levou o sistema do tipo òbviamente estocástico àquele dotado de transformação univalente:

$$\downarrow \begin{matrix} A & B & C \\ B & A & C \end{matrix}$$

do tipo considerado até agora no curso dêste livro. *A transformação determinada, univalente, é destarte simplesmente um caso estocástico especial e extremo.* É o estocástico em que tôdas as probabilidades se tornaram 0 ou 1. Esta unidade essencial não deve ser obscurecida pelo fato de ser conveniente falar algumas vêzes do tipo determinado e outras dos tipos nos quais o aspecto importante é a fracionalidade das probabilidades. Na terceira parte a unidade essencial dos dois tipos desempenhará papel importante na unificação dos vários tipos de regulagem.

Pode-se usar o têrmo "estocástico" em dois sentidos. Pode significar "todos os tipos (com matriz constante de probabilidades de transição), incluindo a determinada como um caso especial", ou "todos os outros tipos diferentes da determinada". Ambos os sentidos são utilizáveis, mas, como são incompatíveis, devemos cuidar para que o contexto apresente qual está implícito.

A CADEIA DE MARKOV

9.4. Após oito capítulos, sabemos agora alguma coisa sôbre a maneira como um sistema se modifica se suas transições correspondem às de uma transformação univalente. E acêrca do comportamento de um sistema cujas transições correspondem às de uma transformação estocástica? Como pareceria semelhante sistema se encontrássemos um em funcionamento efetivo?

Suponhamos que um inseto viva dentro e em volta de uma lagoa rasa — às vêzes na água (A), outras vêzes sob seixos (S), e outras vêzes na beira (B). Suponhamos que, a cada unidade de intervalo de tempo, haja uma probabilidade constante de que, estando sob um seixo, o inseto suba para a beira; e, similarmente, para as outras transições possíveis. (Podemos admitir, se quisermos, que seu comportamento efetivo, a qualquer instante, é determinado por pormenores e eventos em seu ambiente.) Assim, um protocolo de suas posições poderia rezar: A B A B A S A B A B A B A S A B B A B A S A B A S A B A B A B B A B A B A B A S S A S A B A B B B A.

Suponhamos, por razões de definição, que as probabilidades de transição sejam

↓	B	A	S
B	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{8}$
A	$\frac{3}{4}$	0	$\frac{3}{4}$
S	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$

Essas probabilidades seriam encontradas (S.9.2) se se observasse o seu comportamento em longos intervalos de tempo, determinando a freqüência de, digamos, $B \rightarrow A$, e depois as freqüências relativas, que são as probabilidades. Uma tabela dêste tipo seria, em essência, *um sumário do comportamento passado efetivo,* extraído do protocolo.

Semelhante seqüência de estados, em que, para vários intervalos longos, a probabilidade de cada transição é a mesma, é conhecida como **cadeia de Markov**, nome do matemático que foi o primeiro a efetuar um estudo extensivo de suas propriedades. (Apenas durante a última década, mais ou menos, é que foi reconhecida a grande importância desta série. Os livros de matemática fornecem diferentes tipos de cadeias de

Markov e aditam várias qualificações. O tipo acima definido nos dará tudo o que necessitamos e não colidirá com outras definições, mas uma qualificação importante é mencionada na S.9.7.)

O têrmo "cadeia de Markov" aplica-se algumas vêzes a uma trajetória particular produzida por um sistema (e. g., a trajetória dada no Ex. 1) e outras vêzes ao sistema (definido por sua matriz) capaz de produzir muitas trajetórias. A referência ao contexto deve mostrar o que está implícito.

Ex. 1: Um sistema de dois estados fornece o seguinte protocolo (de 50 transições):

A B A B B B A B A A B A B A B A B B B B A B A A
B A B B A A B A B B A B A A A B A B B A A B B
A B B A.

Tire uma estimativa de sua matriz de probabilidades de transição.

Ex. 2: Use o método da S.9.2 (com a moeda) para construir diversas trajetórias, de modo a estabelecer que *uma* matriz pode dar origem a *muitas* trajetórias diferentes.

Ex. 3: Use uma tabela de números aleatórios para gerar uma cadeia de Markov sôbre dois estados *A* e *B* pela regra:

Se		Então
Estado presente	Número aleatório	próximo estado
A	0 ou 1	*A*
A	2,3,...,9	*B*
B	0,1,2,3,4	*A*
B	5,6,7,8,9	*B*

Ex. 4: (continuação.) Qual é sua matriz de probabilidades de transição?

9.5. O Ex. 9.4.1 mostra como o comportamento de um sistema especifica a sua matriz. Inversamente, a matriz transmitirá informação acêrca das tendências do sistema, embora não o faça sôbre os pormenores particulares. Assim, suponhamos que um cientista, não o observador original, veja a matriz de probabilidades de transição do inseto:

$$\begin{array}{c|ccc} \downarrow & B & A & S \\ \hline B & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & \frac{1}{8} \\ A & \frac{3}{4} & 0 & \frac{3}{4} \\ S & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \end{array}$$

Êle pode deduzir que, se o inseto estiver na água, não permanecerá ali, pois $A \to A$ tem probabilidade zero, mas irá habitualmente para a beira, pois $A \to B$ apresenta a mais alta probabilidade na coluna. Da beira irá provàvelmente para a água, e de nôvo voltará para a beira. Se estiver debaixo de um seixo tenderá também a se dirigir para a água. Assim, gasta sem dúvida muito de seu tempo oscilando entre a beira e a água. O tempo gasto sob os seixos será pequeno. O protocolo dado, construído com um quadro de números ao acaso, apresenta essas propriedades.

Assim, a matriz contém informações sôbre qualquer comportamento provável do sistema.

Ex. 1: Se a coluna S da matriz tivesse um 1 na célula mais baixa e zero nas outras, o que se poderia deduzir com respeito ao modo de vida do inseto?

Ex. 2: Uma môsca voa por um quarto entre as posições A, B, C e D com probabilidades de transição:

$\downarrow$	A	B	C	D
A	$\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{1}{3}$
B	$\frac{1}{4}$	1	0	$\frac{1}{3}$
C	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$
D	0	0	$\frac{1}{2}$	0

Uma das posições é um forno desagradàvelmente aquecido e a outra, um pega-môsca. Quais são as posições A, B, C e D?

Ex. 3: Se o protocolo e a matriz do Ex. 9.4.1 forem considerados como códigos um do outro, qual a direção de codificação que perde informação?

9.6. *Equilíbrio numa cadeia de Markov.* Suponhamos agora que grande número de tais insetos vivam no mesmo tanque, e que cada um se comporte independentemente dos outros. À medida que nos afastamos do tanque, os insetos individuais desaparecerão gradualmente de vista, e tudo o que veremos serão três nuvens cinzentas, três populações, uma na beira, uma na água, e outras sob os seixos. Essas três *populações* tornam-se agora três quantidades mutáveis com o tempo. Se forem d_B, d_W, e d_P respectivamente em algum instante, então os seus valores em um intervalo posterior, d_B' etc., podem ser determinados considerando-se o que farão seus constituintes individuais. Assim, dos insetos na água, três quartos mudar-se-ão para B, e adicionarão seu número a d enquanto um quarto se adicionará a d_p. Assim, após a mudança a nova população na beira, d_B', será $\frac{1}{4}d_B + \frac{3}{4}d_W + \frac{1}{8}d_P$. Portanto, em geral, as três *populações* mudarão conforme a transformação (sôbre o vetor com três componentes)

$$\begin{aligned} d_B' &= \tfrac{1}{4}d_B + \tfrac{3}{4}d_W + \tfrac{1}{8}d_P \\ d_W' &= \tfrac{3}{4}d_B \qquad\quad\;\; + \tfrac{3}{4}d_P \\ d_P' &= \qquad\quad\;\; \tfrac{1}{4}d_W + \tfrac{1}{8}d_P \end{aligned}$$

Devemos lembrar, como fundamentalmente importante, que o sistema composto de três populações (se suficientemente grande para estar livre de irregularidades de amostragem) é *determinado,* embora os insetos individuais se comportem apenas com certas probabilidades.

A fim de seguirmos o processo em detalhe, suponhamos que iniciamos uma experiência forçando 100 dos insetos a ficar sob os seixos e depois vendo o que sucede. O vetor inicial das três populações d_B, d_W, d_P será, assim, 0, 0, 100). O que serão os números no próximo passo, isto estará sujeito aos caprichos da amostragem aleatória; pois não é *impossível* que todos os cem possam permanecer sob os seixos. Em média, entretanto, (i. e., a média se todos os 100 fôssem testados repetidas vêzes), apenas cêrca de 12,5 aproximadamente ficariam lá, indo o restante para a beira (12,5 também) e para a água (75). Assim, após o primeiro passo, a população apresentará a mudança (0, 0, 100) → (12,5; 75; 12,5).

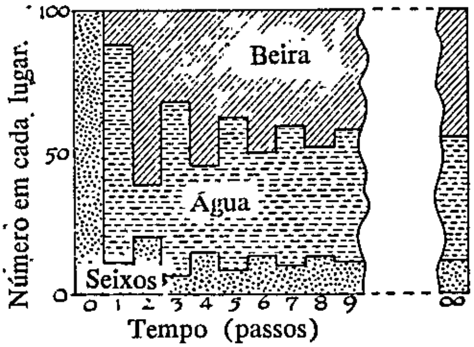


Fig. 9.6.1

Neste sentido os números médios nas três populações podem ser determinados, passo a passo, mediante o processo de S.3.6. Assim, verifica-se que o próximo estado é (60,9; 18,8; 20,3), e a trajetória dêste sistema (de três graus de liberdade — não uma centena) aparece na Fig. 9.6.1.

Veremos que as populações tendem, por oscilações amortecidas, a um estado de equilíbrio, em (44,9; 42,9; 12,2), onde o sistema permanecerá indefinidamente. No caso, "o sistema" significa, com certeza, estas três variáveis.

Vale notar que, quando um sistema se assentou, e se encontra pràticamente em suas populações terminais, haverá um agudo contraste entre as populações, que não mudam, e os insetos, que se movem incessantemente. O mesmo tanque pode assim conferir dois significados muito diferentes à única e mesma palavra "sistema". (No caso "equilíbrio" corresponde ao que o físico denomina "estado estacionário".)

Os valores de equilíbrio de uma cadeia de Markov são ràpidamente calculados. Em equilíbrio os valores não sofrem alteração, de modo que d_B', digamos, é igual a d_B. Assim, a primeira linha da equação se torna

$$\begin{aligned} d_B &= \tfrac{1}{4}d_B + \tfrac{3}{4}d_W + \tfrac{1}{8}d_P \\ 0 &= -\tfrac{3}{4}d_B + \tfrac{3}{4}d_W + \tfrac{1}{8}d_P \end{aligned}$$

As outras linhas são tratadas de modo similar. As linhas não são, entretanto, tôdas independentes, pois as três populações precisam, neste exemplo, somar 100; uma linha (qualquer) é pois eliminada e substituída por

$$d_B + d_W + d_P = 100.$$

As equações tornam-se então, e.g.,

$$\begin{aligned} -\tfrac{3}{4}d_B + \tfrac{3}{4}d_W + \tfrac{1}{8}d_P &= 0 \\ d_B + d_W + d_P &= 100 \\ \tfrac{1}{4}d_W - \tfrac{7}{8}d_P &= 0 \end{aligned}$$

que podem ser resolvidas de forma usual. Nesse exemplo os valores para o equilíbrio são (44,9; 42,9; 12,2); como já se previa na S.9.5, nenhum inseto individualmente passa muito tempo sob as pedras.

Ex. 1: Determine as populações que se seguiriam ao estado inicial em que se colocassem todos os insetos na beira.

Ex. 2: Verifique os valores de equilíbrio.

Ex. 3: Um dado de seis faces foi fortemente inclinado por um pêso oculto em uma face x. Se o tivéssemos pôsto em uma caixa com a face f voltada para cima e a tivéssemos agitado, verificar-se-ia, após prolongados testes, que a probabilidade do cubo mudar para a face g seria:

	↓	1	2	3	4	5	6
				f			
	1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1
	2	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1
	3	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5
g	4	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1
	5	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1
	6	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1

Qual é a face x? (Sugestão: Cuidado!)

Ex. 4: Um composto AB é dissolvido na água. Em cada pequeno intervalo de tempo cada molécula possui 1% de probabilidade de dissociação, e cada A dissociado possui 0,1% de probabilidade de vir a se combinar de nôvo. Qual a matriz de probabilidades de transição de uma molécula, sendo os dois estados "dissociado" e "não-dissociado"? (Sugestão: Podemos ignorar o número dos B dissociados?)

Ex. 5: (Continuação.) Qual o valor de equilíbrio da porcentagem dissociada?

Ex. 6: Escreva as transformações (*i*) das transições dos insetos individuais e (ii) das transições de população. Como se relacionam?

Ex. 7: Quantos estados aparecem nas transições dos insetos? Quantos no sistema de populações?

**Ex.* 8: Se D é o vetor coluna das populações nos vários estados, D' é o vetor um passo adiante, e M é a matriz das probabilidades de transição, prove que, na álgebra matricial comum,

$$D' = MD, \qquad D'' = M^2D \text{ e } D^{(n)} = M^nD.$$

(Esta relação natural e simples fica perdida se a matriz fôr escrita na forma transposta. Compare *Ex.* 2.16.3 e 12.8.4.)

9.7. *Dependência de valores anteriores.* A definição de uma cadeia de Markov, dada na S.9.4, omitia importante qualificação: *as probabilidades de transição não devem depender de estados anteriores ao operando.* Assim, se o inseto se comporta como uma cadeia de Markov, verificar-se-á que, quando êle está na margem, irá para a água em 75% dos casos, não importando se antes de estar sôbre a margem estêve na margem, na água ou nos seixos. Poder-se-ia testar o fato experimentalmente coletando as três percentagens correspondentes e depois vendo se tôdas elas são iguais a 75%.

Eis um protocolo no qual a independência não vale:

AABBABBAABBABBABBABBAABBABBABABA

As transições, em contagem direta, são

	A	*B*
A	3	10
B	10	8

Notamos em particular que *B* é seguido por *A* e *B*, quase igualmente. Se agora reclassificarmos estas 18 transições a partir de *B* segundo a letra que precede *B* teremos

$$\ldots AB \text{ foi seguido por} \begin{cases} A\text{: 2 vêzes} \\ B\text{: 8 vêzes} \end{cases}$$

$$\ldots BB \text{ foi seguido por} \begin{cases} A\text{: 8 vêzes} \\ B\text{: 0 vêzes} \end{cases}$$

Portanto o estado que segue *B* depende acentuadamente do estado que precede *B*. Assim, esta seqüência não é uma cadeia de Markov. Algumas vêzes o fato pode ser descrito metafòricamente, dizendo-se que a memória do sistema estende-se para trás por mais de um estado (compare S.6.21).

Tal dependência da probabilidade em relação ao que vem antes é uma característica marcante das seqüências de letras dada por uma língua como o inglês. Assim, qual é a probabilidade de que *s* seja seguido por *t*? Depende muito da letra que precede o *s*; assim, *es* seguido de *t* é comum, mas *ds* seguido de *t* é raro. Fôssem as letras uma cadeia de Markov, então *s* seria seguido de *t* com a mesma freqüencia nos dois casos.

Essas dependências são características na linguagem, que contém muitas delas. Variam de ligações simples do tipo acima mencionado a ligações de longo alcance que tornam o final "... do transcendentalismo Kantiano" mais provável num livro que começa por "A Universidade no século dezoito ..." do que num que comece por "A moderna corrida de cavalos...".

Ex. De que modo são afetadas as quatro transições *C* — *C*, — *D*, *D* — *C* e *D* — *D*, na freqüência de ocorrência pelo estado que precede imediatamente cada operando, no protocolo:

estado que precede imediatamente cada operando, no protocolo:

D D C C D C C D D C C D C C D D C C D C C D D
C C D D D D C C D D D D C C D D D C C D C C DC?

(Sugestão: Classifique as transições observadas.)

9. 8. *Recodificação na forma de Markov.* Quando se descobre que um sistema produz trajetórias nas quais as probabilidades de transição dependem de modo *constante* dos estados que precedem cada operando, o sistema, embora não seja markoviano, pode tornar-se markoviano por meio de um método que é mais importante do que pode parecer à primeira vista — redefine-se o sistema.

Assim, suponhamos que o sistema seja como o do Ex. 9.7.1 (o anterior), e também que as transições sejam tais que, após a seqüência de dois estados ... *CC* o sistema vá sempre para *D*, não importando o que ocorreu antes, que depois de ... *DC* vá sempre para *C*, que após ... *CD* vá com igual freqüência, no final de contas, para *C* e *D* e similarmente após ... *DD*. Definimos agora simplesmente novos estados que são vetores, com duas componentes — o estado anterior como primeira componente e o posterior como segunda. Assim, se o estado original acabou de produzir uma trajetória que termina ... *DC*, dizemos que o nôvo sistema está *no* estado (*D*,*C*). Se o original se move então para o estado *C*, de modo que sua trajetória seja agora ... *DCC*, diremos que o nôvo sistema passou para o estado (*C*,*C*). Portanto o nôvo sistema sofreu a transição (*D*,*C*) → (*C*.*C*). Êstes novos estados realmente formam uma cadeia de Markov, pois as suas probabilidades (como admitimos aqui) não dependem de estados anteriores: e de fato a matriz é

↓	(*C*,*C*)	(*C*,*D*)	(*D*,*C*)	(*D*,*D*)
(*C*,*C*)	0	0	1	0
(*C*,*D*)	1	0	0	0
(*D*,*C*)	0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$
(*D*,*D*)	0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$

(Observe que a transição (*C*,*D*) → (*C*,*D*) é impossível; pois qualquer estado que termine (—,*D*) pode apenas ir para um que comece (*D*,—). Outras transições são similarmente impossíveis no nôvo sistema.)

Se, em outro sistema, as probabilidades de transição dependem dos valores que ocorreram n passos atrás, então os novos estados precisam ser definidos como vetores sôbre n estados consecutivos.

O método de redefinir pode parecer artificial e fora de propósito. Na realidade é de importância fundamental, pois desloca a nossa atenção de um sistema que não é determinado do ponto de vista do estado para um que o é. O nôvo sistema é mais bem previsível, pois seu "estado" explica a história pregressa do sistema original. Assim, com a forma original, saber que o sistema estava no estado C não permite a ninguém afirmar nada mais, senão que o sistema poderia ir para C ou D. Com a segunda forma, saber que êle estava no estado (D, C) capacita-nos a prever seu comportamento com certeza, do mesmo modo que com a forma original se podia prever com certeza quando se sabia o que acontecera antes. O que importa é que o método prova que os dois métodos de "conhecer" um sistema — pelo seu estado presente ou pela sua história passada — têm uma relação exata. A teoria do sistema que não é completamente observável (S.6.21) utiliza tal fato essencialmente do mesmo modo. Assim, somos mais uma vez levados a concluir que existência de "memória" em um sistema real não constitui propriedade intrínseca do sistema — assumimos, por hipótese, sua existência quando nossos podêres de observação são limitados. Destarte, afirmar "êste sistema me parece ter memória" equivale a dizer "meus podêres de observação não me permitem efetuar uma previsão válida com base em uma observação, mas posso fazer uma previsão válida após uma seqüência de observações".

9.9. *Seqüência como vetor.* Nos capítulos anteriores usamos amiúde vetores, e até agora êles sempre possuíram um número finito e definido de componentes. É possível, entretanto, que um vetor tenha um número infinito ou indefinidamente grande de componentes. Desde que haja cautela, é pequeno o risco que a complicação precisa acarretar.

Assim, uma seqüência pode ser encarada como um vetor cuja primeira componente é o primeiro valor da seqüência, e assim por diante até a n-ésima componente, que será o n-ésimo valor. Portanto, se girarmos uma moeda cinco vêzes, o resultado, tomado como um todo, pode ser o vetor com cinco componentes (C,K,K,C,K). Tais vetores são comuns na teoria da probabilidade, onde podem ser gerados por amostragem repetida.

Se um vetor dêste tipo é formado por amostragem com substituição, terá apenas a tênue peculiaridade de que cada valor provirá do mesmo conjunto de componentes, enquanto que um tipo mais geral, o da S.3.5, por exemplo, pode ter um conjunto diferente para cada componente.

9. 10. *Coerção num conjunto de seqüências.* Um conjunto de semelhantes seqüências pode apresentar coerção, exatamente do mesmo modo como um conjunto de vetores (S.7.11), por não possuir o âmbito total que o âmbito das componentes, fôssem elas independentes, possibilitaria. Se a seqüência fôr de comprimento finito, e.g., cinco giros de uma moeda, como no parágrafo anterior, a coerção poderá ser identificada e abordada exatamente como na S.7.11. Contudo, quando é indefinidamente longa, como sucede amiúde com as seqüências (cuja terminação é freqüentemente arbitrária e irrelevante), devemos utilizar algum outro método, sem, entretanto, mudar o que é essencial.

Pode-se determinar o que vem a ser o método quando se considera como é possível especificar um vetor infinitamente longo. É claro que um vetor dêste tipo não pode ser completamente arbitrário, em componentes e valores, como era o vetor na S.3.5, pois seria necessária uma quantidade infinita de tempo e de papel para escrevê-lo. Usualmente tais vetores indefinidamente longos são especificados por algum processo. Em primeiro lugar é dado o valor da primeira componente e, após, é aplicado um processo especificado (uma transformação) para gerar as outras componentes em sucessão (como a "integração" da S.3.9).

Podemos agora deduzir o que é necessário para que um conjunto de tais vetores não apresente coerção. Suponhamos que se construa um conjunto "sem coerção" e que se proceda assim componente por componente. De acôrdo com a S.7.12, a primeira componente deve assumir todo o seu intervalo de valores; então, *cada um* dêsses valores tem de combinar-se com cada um dos possíveis valores da segunda componente; e cada um dêsses pares tem de combinar-se com cada um dos possíveis valores das terceiras componentes; e assim por diante. A regra é que, à medida que se adita uma nova componente, *todos* os seus possíveis valores devem ocorrer.

Ver-se-á agora que *o conjunto de vetores sem coerção corresponde àquela cadeia de Markov que, a cada transição,* *tem tôdas as transições igualmente prováveis.* (Quando a probabilidade se torna uma freqüência real, ocorrerão quantidades de cadeias, proporcionando destarte o *conjunto* de seqüências.) Assim, se houver três estados possíveis para cada componente, a seqüência sem coerção será o conjunto gerado pela matriz

↓	A	B	C
A	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
B	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
C	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

Ex. 1: A série exponencial definida como um vetor indefinidamente longo com componentes: $\left(1,\ x,\ \frac{x^2}{2},\ \frac{x^3}{2.3},\ \frac{x^4}{2.3.4},\ldots\right)$ Qual é a transformação que gera a série obtendo-se cada componente a partir da componente da esquerda? (Sugestão: Denominie as componentes por t_1, t_2, ..., etc.; t'_i é o mesmo que $t_i + 1$.)

Ex. 2: Apresenta coerção uma série produzida por um dado de verdade?

Ex. 3: (Continuação.) E a série do Ex. 9.4.3?

ENTROPIA

9.11. Vimos, na S.7.5 e no Capítulo 8, por que a informação não pode ser transmitida numa quantidade maior do que a permissível pela variedade. Vimos como a coerção pode diminuir alguma quantidade potencial de variedade. E acabamos de examinar, na seção anterior, como uma fonte de variedade, tal como uma cadeia de Markov, tem coerção zero quando tôdas as suas transições são igualmente prováveis. Segue-se que esta condição (de coerção zero) é a que permite que a fonte de informação, se ela se comporta como uma cadeia de Markov, transmita a máxima quantidade de informação (em dado tempo).

Shannon concebeu uma medida para a quantidade de variedade que uma cadeia de Markov apresenta a cada passo — a entropia — que se mostrou de importância fundamental em inúmeras questões relativas à transmissão incessante. Tal medida se desenvolve da seguinte maneira.

Se um conjunto tem variedade, e tomamos uma amostra de um item do conjunto, por algum processo definido de amostragem, então os resultados possíveis da extração estarão associados às várias probabilidades correspondentes. Assim, se as luzes de tráfego possuem variedade quatro, exibindo as combinações

1. Vermelho
2. Vermelho e Amarelo
3. Verde
4. Amarelo,

e se estão acesas durante intervalos de 25, 5, 25 e 5 segundos respectivamente, então, se um motorista surge repentinamente em tempos irregulares encontraria as luzes nos vários estados com freqüências aproximadas de 42, 8, 42 e 8% respectivamente. Como probabilidades, estas se tornam 0,42, 0,08, 0,42 e 0,08. Assim, o estado "Verde" possui (se usado êste método particular de amostragem) uma probabilidade de 0,42; e similarmente para os outros.

Inversamente, qualquer conjunto de probabilidades — qualquer conjunto de frações positivas cuja soma alcança 1 — pode ser considerado como correspondente a algum conjunto cujos membros apresentam variedade. O cálculo de Shannon parte das probabilidades pelo cálculo, se as probabilidades forem $p_1, p_2, \ldots, p_n$, de

$$-p_1 \log p_1 - p_2 \log p_2 - \ldots - p_n \log p_n,$$

uma quantidade que êle denomina de **entropia** do conjunto de probabilidades e que denota por H. Assim, se tomarmos logaritmos na base 10, a entropia do conjunto associado com as luzes de tráfego é

$$-0{,}42 \log_{10} 0{,}42 - 0{,}08 \log_{10} 0{,}08 - 0{,}42 \log_{10} 0{,}42 - 0{,}08 \log_{10} 0{,}08,$$

que é igual a 0,492. (Observe-se que $\log_{10} 0{,}42 = \bar{1}{,}6232 = -1{,}0000 + 0{,}6232 = -0{,}3768$; de modo que o primeiro têrmo é $(-0{,}42)(-0{,}3768)$, o qual vale $+0{,}158$; e anàlogamente para os outros têrmos.) Fôssem os logaritmos tomados na base 2 (S.7.7.), o resultado seria de 1,63 bits.

A palavra "entropia" será utilizada neste livro apenas na acepção usada por Shannon, sendo qualquer sentido mais amplo designado "variedade" ou de algum outro modo.

Ex. 1: Das 80 ocasiões em que eu cheguei a uma certa passagem de nível, em 14 ela estava fechada. Qual é a entropia do conjunto de probabilidades?

Ex. 2: De um maço de cartas embaralhado é retirada uma carta. Três acontecimentos são distinguidos:
E_1: a retirada de um Rei de Paus,
E_2: a retirada de qualquer Espada,
E_3: a retirada de qualquer outra carta.
Qual é a entropia da variedade dos eventos distinguíveis?

Ex. 3: Qual é a entropia da variedade no lançamento de um dado não-viciado?

Ex. 4: Qual é a entropia na variedade de um conjunto de possibilidades dos resultados (preservada a sua ordem) de dois sucessivos lançamentos de um dado não-viciado?

Ex. 5: (Continuação.) Qual é a entropia de n lançamentos sucessivos?

Ex. 6: Qual é o limite de $-p \log p$ quando p tende para zero?

9.12. A entropia assim calculada apresenta muitas propriedades importantes. Em primeiro lugar, é máxima, para um dado número (n) de probabilidades, quando estas são tôdas iguais. H será então igual a $\log n$, exatamente a medida da variedade definida na S.7.7. (A igualdade de probabilidades, em cada coluna, foi indicada na S.9.10 como necessária para que a coerção seja mínima, i. e., para que a variedade seja máxima.) Em segundo lugar, diferentes H derivados de diferentes conjuntos podem, com qualificações adequadas, ser combinados de modo a produzir uma entropia média.

Uma combinação dêste tipo é usada para determinar a entropia apropriada a uma cadeia de Markov. Cada coluna (ou linha, se escrita na forma transposta) possui um conjunto de probabilidades que somam 1. Cada qual pode, portanto, proporcionar uma entropia. Shannon define a entropia (de um passo da cadeia) como a média destas entropias, sendo cada qual pesada pela proporção na qual cada estado, correspondendo à coluna, ocorre *quando a seqüência se estabeleceu em seu equilíbrio* (S.9.6). Assim, as probabilidades de transição desta seção, com entropias e proporções de equilíbrio correspondentes apresentadas abaixo, são

$\downarrow$	B	A	S
B	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{8}$
A	$\frac{3}{4}$	0	$\frac{3}{4}$
S	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$
Entropia :	0,811	0,811	1,061
Proporção de equilíbrio :	0,449	0,429	0,122

Então a entropia média (por passo na seqüência) é

$$0{,}449 \times 0{,}811 + 0{,}429 \times 0{,}811 + 0{,}122 \times 1{,}061 = 0{,}842 \text{ bits}$$

Uma moeda, girada repetidamente, produz uma série com entropia, a cada giro, de um bit. Assim a série de localizações assumidas pelos insetos à medida que o tempo passa não é tão variável quanto a série produzida por uma moeda girada, pois 0,842 é menor do que 1,00. Dêste modo, a medida de Shannon permite comparar diferentes graus de variedade.

A razão pela qual tomamos uma média ponderada é que partimos da determinação de três entropias: 0,811, 0,811 e 1,061; e delas queremos uma. Se fôssem tôdas iguais, limitar-nos-íamos òbviamente a usar êste valor, mas elas não o são. Podemos, todavia, argumentar assim: Quando o sistema atingir o equilíbrio, 45% dos insetos estarão no estado *B*; 43%, no *A*; e 12%, no *S*. Como os insetos circulam entre todos os estados, isto equivale a dizer que cada inseto gasta 45% de seu tempo em *B*, 43% em *A* e 12% em *S*. Em outros têrmos, 45% de suas transições serão a partir de *B*, 43% a partir de *A*, e 12% a partir de *S*. Assim, 45% de suas transições serão com entropia, ou variedade, de 0,811, 43% também com 0,811, e 12% com 1,061. Da mesma maneira, serão freqüentes transições com uma entropia de 0,811 (e o valor "0,811" deveria influir pesadamente) e um tanto raras aquelas com uma entropia de 1,061 (e o valor "1,061" deveria influir pouco). Assim a média é ponderada: 88% em favor de 0,811 e 12% em favor de 1,061, i. e.,

$$\text{média ponderada} = \frac{45 \times 0{,}811 + 43 \times 0{,}811 + 12 \times 1{,}061}{45 + 43 + 12}$$

que é, de fato, o que foi acima usado.

Ex. 1: Prove que a série dos *C* e dos *K* produzida pelo giro de uma moeda tem uma entropia média de 1 bit por giro. (Sugestão: Construa a matriz das probabilidades de transição.)

Ex. 2: (Continuação.) O que sucede com a entropia se a moeda é viciada? (Sugestão: Tente o efeito de mudar as probabilidades.)

9.13. Antes de desenvolver o assunto seguinte, cabe notar que a medida de Shannon e os vários teoremas importantes que a utilizam, fazem certas suposições. Estas são comumente satisfeitas na telefonia e bem menos na pesquisa biológica, assim como nos tópicos discutidos neste livro. Sua medida e teoremas devem, pois, ser aplicados com cautela. Suas suposições principais são as seguintes:

(1) Se aplicada a um conjunto de probabilidades, a soma das várias frações *precisa perfazer* 1; a entropia não é calculável sôbre um conjunto incompleto de possibilidades.

(2) Se aplicada a uma fonte de informação, com vários conjuntos de probabilidades, a matriz das probabilidades de transição *tem de ser markoviana;* o que vale dizer que a probabilidade de cada transição tem de depender apenas do estado em que se encontra o sistema (o operando) e não do estado em que antes se encontrava (S.9.7). Se necessário, os estados da fonte devem ser primeiro redefinidos, como na S.9.8, de modo a tornar a matriz markoviana.

(3) Fazem-se as médias das várias entropias das várias colunas (S.9.12) usando as proporções do *equilíbrio terminal* (S.9.6). Segue-se que os teoremas admitem que o sistema, não importa como começou, pôde prosseguir por longo tempo, de modo que os estados atingiram suas densidades de equilíbrio.

Os resultados de Shannon precisam pois ser aplicados ao material biológico sòmente após uma pormenorizada verificação de sua aplicabilidade.

Advertência similar cabe em face de qualquer tentativa de jogar sem rigidez, e no nível meramente verbal, com as duas entropias, a de Shannon e a da mecânica estatística. Os argumentos nestes assuntos exigem grande cuidado, pois a mais tênue mudança nas condições ou suposições pode levar uma proposição do rigorosamente verdadeiro ao ridìculamente falso. Mover-se nestas regiões é como se mover em uma selva cheia de armadilhas. Aquêles que mais sabem a respeito da matéria são em geral os mais cautelosos em falar a seu respeito.

Ex. 1: Calcule mentalmente a entropia da matriz com probabilidades de transição

↓	*A*	*B*	*C*
A	0,2	0	0,3
B	0,7	1,0	0,3
C	0,1	0	0,4

(Sugestão: Não se trata de uma façanha de cálculo, mas de encontrar uma simplicidade peculiar. O que significa o 1 no meio da diagonal principal (Ex. 9.5.1)? Assim, qual é o equilíbrio final do sistema? Importam as entropias das colunas *A* e *C*? E qual é a entropia da coluna *B* (Ex. 9.11.6)?)

Ex. 2: (Continuação.) Explique o paradoxo: "Quando o sistema está em *A* há variedade ou incerteza no próximo estado, de modo que a entropia não pode ser zero".

9.14. Surge algumas vêzes uma pequena confusão porque a medida da "entropia" de Shannon, dada sôbre um conjunto de probabilidades p_1, p_2, ..., é a soma de $p_i \log p_i$ multiplicada por — 1, enquanto a definição dada por Wiener em *Cibernética* para "quantidade de informação" é a mesma soma de $p_i \log p_i$ inalterada (i. e., multiplicada por +1). (O leitor deverá notar que $p \log p$ é necessàriamente negativo, de modo que o multiplicador "—1" torna-o positivo.)

Não é preciso, contudo, fazer confusão, pois as idéias básicas são idênticas. Ambas consideram a informação como "aquilo que remove a incerteza", e ambas medem-na pela quantidade de incerteza que remove. Ambas, além disso, se preocupam bàsicamente com o *ganho* ou aumento de informação que ocorre quando uma mensagem chega — sendo as quantidades absolutas presentes antes ou depois de interêsse secundário.

Agora fica claro que, quando as probabilidades estão bem espalhadas, como em *A* da Fig. 9.14.1, a incerteza é maior do que quando são compactas, como em *B*.

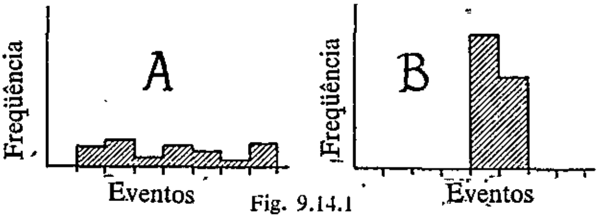


Fig. 9.14.1

Portanto, a recepção de uma mensagem que leva o receptor a rever sua estimativa daquilo que ocorrerá a partir da distribuição *A* para a distribuição *B*, contém uma quantidade *positiva* de informação. Agora, (onde de significa "a soma de"), se aplicada a *A*, fornecerá um número mais negativo do que se aplicada a B; ambos serão negativos, mas o de A será maior em valor absoluto. Assim, A poderia dar —20 para a soma e B, —3. Se usarmos multiplicado por *mais* 1, como quantidade de informação associada a cada distribuição, i. e., a cada conjunto de probabilidades, então como, em geral,

Ganho (de algo) = **Quantidade final** menos **quantidade inicial,**

de modo que o ganho de informação será

$$(-3) - (-20)$$

que é + 17, quantidade positiva, que é o que queremos. Assim, examinando dêste ponto de vista, que é o de Wiener, $\Sigma p \log p$ deveria ser multiplicado por mais 1, i. e., permanecer inalterado; então calculamos o *ganho*.

Shannon, todavia, se preocupa em todo seu livro com o caso especial em que a mensagem recebida é conhecida com certeza. Assim, as probabilidades são tôdas zero, exceto para um único 1. Sôbre um conjunto dêste tipo $p \log p$ é exatamente zero; portanto a quantidade final é zero, e o *ganho* de informação é

$$0 - (\text{quantidade inicial}).$$

Em outras palavras, a informação na mensagem, que é igual ao ganho em informação, é $\Sigma p \log p$ calculada sôbre a distribuição inicial, multiplicada por *menos* 1, o que fornece a medida de Shannon.

Destarte as duas medidas não são mais discrepantes do que os dois modos de medir "qual a distância do ponto Q à direita do ponto P", apresentados na Fig. 9.14.2

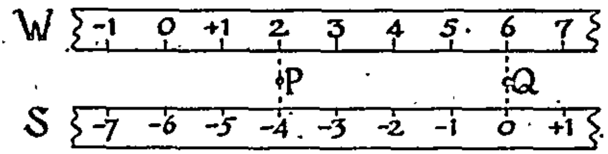


Fig. 9.14.2

No caso, podemos considerar P e Q como correspondentes a dois graus de incerteza, com *mais* certeza à *direita,* e com uma mensagem que muda de receptor de P para Q.

A distância de P a Q é mensurável de duas maneiras, claramente equivalentes. O modo de Wiener consiste em apoiar a régua em *P* e *Q* (como *W* na Fig.); então a distância de *Q* à *direita* de *P* é dada por

(leitura de *Q*) menos (leitura de *P*).

O modo de Shannon (*S*, na Fig.) consiste em apoiar o zero em frente a *Q*, sendo então a distância de *Q* à *direita* de *P* dada por

menos (leitura de *P*)

Não há, òbviamente, discrepância efetiva entre os dois métodos.

9.15. *Capacidade de canal.* É necessário distinguir duas maneiras de computar a "entropia" em relação a uma cadeia de Markov, mesmo depois de decidida a unidade (base do logaritmo). A cifra calculada em S.9.12, a partir das probabilidades de transição, fornece a entropia, ou a variedade a ser esperada, no próximo e único passo da cadeia. Assim, se uma moeda não-viciada já deu K K C C K C C C C, a incerteza do que virá em seguida monta a 1 bit. O símbolo subseqüente tem também uma incerteza de um bit e assim por diante. De modo que a cadeia como um todo tem uma incerteza, ou entropia, de 1 bit *por passo*.

Dois passos teriam então uma incerteza, ou variedade, de 2 bits, e é assim mesmo; pois os dois passos seguintes podem ser quaisquer dos CC, CK, KC ou KK, com probabilidades 1/4, 1/4, 1/4 e 1/4, o que dá C = 2 bits. Em suma, podemos afirmar que *a entropia de um comprimento de cadeia de Markov é proporcional ao seu comprimento* (sempre desde que a cadeia tenha atingido o equilíbrio).

Um modo inteiramente diferente de efetuar a medida de uma cadeia é introduzido quando se considera quão depressa, *no tempo,* a cadeia é produzida por algum processo físico real. Até agora, tal aspecto foi ignorado, a ùnica graduação efetuando-se em têrmos dos próprios passos da cadeia. A nova escala exige apenas uma simples regra de proporção para a sua introdução. Assim, se (como na S.9.12) a "unidade de tempo" dos insetos para um passo é de vinte segundos, então, como cada vinte segundos produz 0,84 bits, 60 segundos produzirão $(60/20) \times 0{,}84$ bits; de modo que cada inseto está produzindo variedade de localização numa taxa de 2,53 bits *por minuto.*

Uma taxa assim é o modo mais natural de medir a capacidade de um canal, que é simplesmente algo que pode ser impelido, pela sua entrada, a assumir, a cada momento, um dentre uma variedade de estados, e que pode transmitir êste estado a algum receptor. A taxa segundo a qual pode transmitir depende de quão depressa os passos se sucedem uns aos outros e da variedade disponível a cada passo.

Cabe dizer que, em cibernética, um "canal" é definido puramente em têrmos de certas relações *comportamentais* entre dois pontos; se dois pontos estão assim relacionados, então existe entre êles um "canal", independentemente, por completo, de fato de poder ou não ser vista qualquer conexão material entre êles. (Consideremos, por exemplo, Exs. 4.15.2. 6.7.1.) Por êsse fato, os canais que o ciberneticista vê podem diferir muito dos vistos por um observador treinado em outra ciência. Em casos elementares isso é suficientemente óbvio. Ninguém nega a realidade de uma conexão funcional de magneto a magneto, embora nenhuma experiência tenha até agora demonstrado qualquer estrutura intermediária.

Algumas vêzes o canal pode seguir um curso inusitado. Assim, o cérebro exige informação sôbre o que acontece depois de ter emitido "ordens" a um órgão, e em geral há um nervo sensorial do órgão ao cérebro que transporta a informação "controladora". O contrôle das cordas vocais, portanto, pode ser efetuado por um nervo sensorial das cordas ao cérebro. Pode-se também conseguir, entretanto, um contrôle efetivo sem o concurso de qualquer nervo do pescoço, com ondas sonoras que viajam pelo ar ligando cordas vocais e cérebro, através do ouvido. Para o anatomista, isto não constitui um canal, mas o é para um engenheiro de comunicação. No caso, precisámos simplesmente constatar que cada qual está certo no seu próprio ramo de ciência.

Existem aplicações mais complexas dêste princípio. Suponhamos que se pergunte a alguém se 287 vêzes 419 é 118213; êle provàvelmente responderá "não posso efetuar a conta de cabeça, dê-me lápis e papel". Tomando os números 287 e 419, juntamente com a operação "multiplicação", como parâmetros, êle gerará um processo (um transiente, na terminologia de S.4.5) que desencadeará uma série de impulsos que atravessam os nervos de seu braço, gerando por sua vez uma série de sinais de lápis sôbre o papel, depois do que os sinais afetarão sua retina e assim por diante, até o seu cérebro, onde ocorrerá uma interação com o traço (qualquer que êle seja) de "118213"; êle dará então a resposta final. O que devemos notar aqui é que êste processo, do cérebro, através do córtex motor, braço, lápis, sinais, raios luminosos, retina e do córtex visual de volta para o cérebro, é, para o engenheiro de comunicação, um "canal" típico, ligando "transmissor" a "receptor". Para o ciberneticista, portanto, a matéria branca e fibras similares não constituem os únicos canais de comunicação disponíveis para o cérebro: *algo da comunicação entre partes pode ocorrer através do ambiente.*

9.16. *Redundância.* Na S.7.14 foi afirmado que a existência de uma coerção pode redundar usualmente em vantagem. Ilustração desta tese ocorre quando a transmissão é incessante.

Por razões de simplicidade, reexaminemos as luzes dos semáforos — Vermelho, Amarelo e Verde — que apresentam apenas as combinações

(1) Vermelho
(2) Vermelho e Amarelo
(3) Verde
(4) Amarelo

Cada componente (cada lâmpada ou côr) pode estar acesa ou apagada, de modo que a variedade total possível, se as componentes forem independentes, seria de 8 estados. De fato, apenas 4 combinações são utilizadas, de modo que o conjunto apresenta coerção.

Reconsideremos agora tais fatos após reconhecer que é necessária uma variedade de quatro sinais:

(i) Parar
(ii) Preparar para partir
(iii) Partir
(iv) Preparar para parar

Se temos componentes, cada qual podendo assumir dois valores, + ou —, podemos perguntar *quantas* componentes serão necessárias para fornecer esta variedade. A resposta é òbviamente duas; e por uma recodificação adequada, tal como

++ = Partir
+ — = Preparar para parar
— — = Parar
— + = Preparar para partir

a mesma variedade pode ser alcançada por um vetor de apenas duas componentes. O fato do número de componentes poder ser reduzido (de três para dois) sem perda de variedade pode expressar-se na afirmação de que o primeiro conjunto de vetores apresenta **redundância,** no caso de uma lâmpada.

Pode-se claramente tirar proveito da coerção. Assim, se as luzes elétricas fôssem demasiado caras, o custo dos sinais, após recodificados na nova forma, seria reduzido a dois terços.

Exatamente as mesmas luzes podem também apresentar uma redundância complemente diversa, se encaradas como os geradores de um conjunto diferente de vetores. Suponhamos que as luzes, em vez de serem operadas pelo tráfego, o sejam por um relógio, de modo que passem pelo ciclo regular de estados (como os enumerados acima)

$$\ldots 3, 4, 1, 2, 3, 4, 1, 2, 3, \ldots$$

A seqüência que produzirá (vista como um vetor, S.9.9) só poderá ser uma dentre os quatro vetores:

(i) (1, 2, 3, 4, 1, 2, ...)
(ii) (2, 3, 4, 1, 2, 3, ...)
(iii) (3, 4, 1, 2, 3, 4, ...)
(iv) (4, 1, 2, 3, 4, 1, ...)

Havendo independência a cada passo, como se poderia obter de um dado de quatro faces e n componentes, a variedade seria 4^n; na realidade é apenas 4. Para esclarecer inteiramente o assunto, observemos que a mesma variedade poderia ser obtida por vetores com apenas uma componente

(i) (1)
(ii) (2)
(iii) (3)
(iv) (4)

sendo omitidas tôdas as componentes após a primeira; portanto tôdas as componentes posteriores são redundantes.

Assim, a seqüência pode apresentar redundância se, a cada passo, o valor seguinte não tem completa independência em relação aos passos anteriores. (Compare S.9.10.) Se a seqüência fôr uma cadeia de Markov, a redundância será mostrada pelo fato de sua entropia ser dotada de um valor menor do que o máximo.

O fato de um conjunto de luzes de tráfego proporcionar dois conjuntos de vetores inteiramente diversos ilustra mais uma vez o grande cuidado necessário quando se aplica êsses conceitos a algum *objeto*, pois o objeto fornece amiúde grande riqueza de conjuntos para a discussão. Assim, a questão "As luzes de tráfego apresentam redundância?" não é admissível, pois deixa de indicar qual dos conjuntos de vetores está em exame; e a resposta pode variar totalmente de conjunto para conjunto.

Tal injunção é particularmente necessária em um livro destinado a pesquisadores no campo biológico, pois no caso os conjuntos de vetores são muitas vêzes definíveis apenas com alguma dificuldade, com o auxílio talvez de alguma arbitrariedade. (Compare S.6.14.) Grande é pois a tentação de permitir que a compreensão do conjunto em discussão seja antes intuitiva e vaga que explícita e exata. O leitor pode amiúde achar que alguma contradição insuperável entre dois argumentos será resolvido se fôr obtida uma definição mais acurada do conjunto em discussão; pois, às vêzes, a contradição se deve ao fato de que dois argumentos se referem efetivamente a dois conjuntos distintos, ambos intimamente associados ao mesmo objeto ou organismo.

Ex. 1: Numa tabela para a identificação de bactéria por seu poder de fermentar açúcares, distinguem-se 62 espécies como produtoras de "ácido", "ácido e gás" ou "nada" para cada um dentre 14 açúcares. Cada espécie corresponde assim a um vetor de 14 componentes, cada qual podendo assumir um dentre três valores. Será o conjunto redundante? A quantas componentes poderá o vetor ser reduzido?

Ex. 2: Se uma cadeia de Markov não apresenta redundância, como a sua matriz pode ser reconhecida num relance?

9.17. É possível enunciar agora o que é talvez o mais fundamental dos teoremas introduzidos por Shannon. Suponhamos que se queira transmitir uma mensagem com *H* bits por passo, como poderíamos desejar para informar sôbre os movimentos de um único inseto num tanque. No caso, *H* vale 0,84 bits por passo (S.9.12), ou como diria o telegrafista, por símbolo, pensando em uma série tal como... S A B A B B B A S S S A B A SA ... Suponhamos, por razões de definição, que decorram 20 segundos entre cada passo.

Como já demos agora a taxa de tempo dêstes eventos, *H* pode também ser afirmado como 2,53 bits por minuto. O teorema de Shannon diz que qualquer canal com esta capacidade pode transportar o informe, e que êste não pode ser transportado por nenhum canal de capacidade menor. Diz-se também que existe sempre uma codificação por meio da qual o canal pode ser assim utilizado.

Talvez seja suficientemente óbvio que canais de alta velocidade possam informar mais do que os lentos; o importante acêrca dêste teorema é, primeiramente, sua grande generalidade (pois não faz referência a qualquer maquinaria específica, aplicando-se, portanto, igualmente a telégrafos, fibras nervosas e conversação) e, em segundo lugar, o seu rigor quantitativo. Assim, se o tanque estivesse localizado entre colinas distantes poderia surgir a questão de saber se sinais de fumaça poderiam transmitir o informe. Suponhamos que cada sinal distinto de fumaça pudesse ser enviado ou não a cada quarto de minuto, porém não mais depressa. No caso, a entropia por símbolo é de 1 bit, e a capacidade do canal é pois de 4 bits por minuto. Como 4 é maior do que 2,53, o canal *pode* efetuar o relato, e é possível encontrar um código, convertendo posições em sinais de fumaça, que veiculará a informação.

O próprio Shannon construiu um exemplo que prova admiràvelmente a exatidão desta lei quantitativa. Suponhamos que uma fonte esteja produzindo letras *A, B, C, D* com freqüências na razão de 4, 2, 1, 1, respectivamente, sendo os símbolos sucessivos independentes. Uma porção típica desta seqüência seria ... B A A B D A A A A B C A B A A D A ... Em equilíbrio as freqüências relativas de *A, B, C, D* seriam 1/2, 1/4, 1/8, 1/8 respectivamente, e a entropia valeria 1 bits por passo (i. e., por letra).

Então um canal que pudesse produzir, a cada passo, qualquer dos quatro estados sem coerção teria uma capacidade de 2 bits por passo. O teorema de Shannon afirma que deve haver um código que permitirá ao último canal (de capacidade igual a 2 bits por passo) transmitir uma tal seqüência (com entropia igual a 1 3/4 bits por passo) de modo que qualquer mensagem maior requeira menos passos na razão de 2 para 1 3/4, i. e., de 8 para 7. A codificação que consegue isto, concebida por Shannon, é a seguinte. Em primeiro lugar, codifique a mensagem por

$$\downarrow \begin{matrix} A & B & C & D \\ 0 & 10 & 110 & 111 \end{matrix}$$

e. g., a mensagem abaixo,

↓ *B . A A B . D . . A A A A B . C . . A B . A A D . . A*
1 0 0 0 1 0 1 1 1 0 0 0 0 1 0 1 1 0 0 1 0 0 0 1 1 1 0

Divida agora a linha inferior em partes e recodifique em nôvo conjunto de letras por

↓ 00 01 10 11
E F G H

Tais códigos convertem qualquer mensagem em "*A* a *D*" nas letras "*E* a *H*", e inversamente, sem ambigüidade. O notável é que, se tomarmos um conjunto típico de oito das letras originais (cada qual representada pela sua freqüência típica), verificaremos que é possível transmiti-las como sete das novas:

↓ *A A A A B . B . C . . D . .*
0 0 0 0 1 0 1 0 1 1 0 1 1 1
. E . E . G . G . H . F . H

demonstrando, asim, a possibilidade da compressão, compressão prevista quantitativamente pela entropia da mensagem original!

Ex. 1: Prove que o código fornece uma correspondência um-um entre mensagem enviada e mensagem recebida (exceto para uma possível ambigüidade na primeira letra.)

Ex. 2: O inglês impresso tem uma entropia de cêrca de 10 bits por palavra. Podemos ler aproximadamente 200 palavras por minuto. Dê um limite inferior para a capacidade do canal do nervo óptico.

Ex. 3: Se um pianista pode colocar cada um de seus dez dedos em qualquer uma de três notas, e pode fazê-lo 300 vêzes por minuto, determine um limite inferior para a capacidade de canal dos nervos até os membros superiores.

Ex. 4: Os registros de um banco, que consistem de uma seqüência infindável de dígitos aparentemente ao acaso, de 0 até 9, precisam ser codificados em Braille para o armazenamento. Se cumpre armazenar 10.000 dígitos por hora, com que velocidade é preciso imprimir o Braille, se se utilizar codificação ótima? (Sugestão: Há 64 símbolos no "alfabeto" Braille.)

9.18. Daremos mais um exemplo do surpreendente poder do método de Shannon para apreender os elementos essenciais em comunicação. Consideremos o sistema de estados *a, b, c, d,* com probabilidades de transição

↓	*a*	*b*	*c*	*d*
a	0	0	0,3	0,3
b	0,6	0,6	0	0
c	0,4	0,4	0	0
d	0	0	0,7	0,7

Uma seqüência típica seria

. b b b c a b c a b b c d d a c d a b c a c d d d d d d a b b . . .

As probabilidades de equilíbrio são 6/35, 9/35, 6/35, 14/35 respectivamente. Verifica-se logo que a entropia é igual a 0,92 bits por letra. Suponhamos, agora, que se perca a distinção entre *a* e *d*, i. e., codifiquemos por

$$\downarrow \begin{matrix} a & b & c & d \\ X & b & c & X \end{matrix}$$

É certo que se deverá perder alguma informação? Vejamos. Há agora apenas três estados *X, b, c,* onde *X* significa "ou *a* ou *d*". Assim, a mensagem prévia começaria agora por . . . b b b c X b c X b b c X X X c . . . Encontraremos como probabilidades de transição

↓	*X*	*b*	*c*
X	0,70	0	1
b	0,18	0,6	0
c	0,12	0,4	0

(Assim $c \to X$ deve ser 1, pois *c* vai sempre ou para *a* ou para *d;* as transições de *a* e de *d* exigem ponderação pelas probabilidades (de equilíbrio) de estarem em *a* ou em *d*.) Os novos estados possuem probabilidades de equilíbrio *X*, 20/35; *b*, 9/35; *c*, 6/35 e entropias de H_x, 1,173; H_b, 0,971; H_c, 0. De modo que a entropia da nova série é 0,92 bits por letra — exatamente a mesma que antes.

Tal fato afirma, sem compromisso, que nenhuma informação foi perdida quando os *d* e os *a* se dissolveram nos *X*. Afirma, portanto, que *deve haver algum modo de restaurar a mensagem original de quatro letras a partir das três*, de dizer quais dos *X* eram os *a* e quais eram os *d*. Um exame mais cuidadoso mostra que é possível fazê-lo, comprovando notàvelmente a previsão bastante surpreendente.

Ex.: Como deve ser modificada na sua forma original a série

b b b b X b c X b b c X X X c X X cc X X X X X X X X b b ?

RUIDO

9. 19. Pode acontecer que tôda a entrada de um transdutor seja divisível em duas ou mais componentes e que desejemos examiná-las individualmente. Isto ocorreu no Ex. 8.17.3; onde as duas mensagens foram enviadas simultâneamente pelo mesmo transdutor e recuperadas em separado na saída. Algumas vêzes, contudo, as duas entradas não são ambas completamente dedutíveis a partir da saída. Se estamos interessados apenas em uma das componentes da entrada como fonte de variedade, tomando a outra meramente como um transtôrno inevitável, então a situação é descrita em geral como a de uma "mensagem corrompida por ruído".

Cabe lembrar que o *ruído não é distinguível de modo intrínseco de qualquer outra forma de variedade*. Apenas quando é dado algum receptor, que estabelecerá qual dos dois é importante para êle, será possível a distinção entre mensagem e ruído. Suponhamos, assim, que um fio transmita ao mesmo tempo alguma conversação e alguns efeitos de um cátodo que emite irregularmente. Para alguém que deseja ouvir a conversação, as variações no cátodo constituem "ruído"; mas para o engenheiro que está tentando efetuar medidas acuradas do que ocorre no cátodo, a conversação é "ruído". O "ruído" é assim puramente relativo a um dado receptor, que deve dizer qual a informação que deseja ignorar.

O ponto merece ênfase porque, sendo uma das fontes mais comuns de variedade desinteressante nos sistemas eletrônicos a dança térmica (movimento browniano) das moléculas e elétrons, os engenheiros eletrônicos tendem a usar o têrmo "ruído", sem qualificação para indicar esta fonte particular. Dentro de sua especialidade, êles provàvelmente continuarão a utilizar a palavra neste sentido, mas pesquisadores de outras ciências não precisam acompanhá-los. Especialmente na biologia, raramente "ruído" se referirá a esta fonte particular; mais comumente, o "ruído" em um sistema dever-se-á a algum outro sistema macroscópico do qual não se pode isolar inteiramente o sistema em estudo.

Se duas ou mais mensagens forem completa e simultâneamente recuperáveis, por decodificação da saída, o conceito de ruído é de pouca serventia. Será requisitado principalmente quando as duas mensagens (uma desejada e outra não) interagem com alguma destruição mútua, tornando o código não de todo reversível. Para ver isto acontecer, voltemos aos processos fundamentais. A irreversibilidade tem de significar que a variedade não é mantida (S.8.6), e que elementos distintos nas entradas são representados na saída por um único elemento. Consideremos o caso em que a entrada é um vetor com duas componentes.

o primeiro tendo valores possíveis de *A*, *B* ou *C*
o segundo " " " " *E*, *F* ou *G*.

Suponhamos que a saída seja uma variável capaz de assumir valores 1, 2, ... 9, e que o código seja

↓	*AE*	*AF*	*AG*	*BE*	*BF*	*BG*	*CE*	*CF*	*CG*
	6	4	2	2	9	1	3	7	5

Se agora a mensagem de entrada fôsse a seqüência *B A C B A C A A B B*, enquanto o "ruído" fornecesse simultâneamente a seqüência *G F F E E E G F G E*, então a saída seria

1, 4, 7, 2, 6, 3, 2, 4, 1, 2

e a decodificação poderia fornecer, para a primeira componente, apenas a aproximação

B, *A*, *C*, *A* ou *B*, *A*, *C*, *A* ou *B*, *A*, *B*, *A* ou *B*

Assim, a mensagem original para está entrada foi "corrompida" pelo "ruído" na outra entrada.

No exemplo acima, o canal é inteiramente capaz de transportar a mensagem sem ambigüidade se o ruído fôr eliminado pela manutenção da segunda entrada constante, em *E*, digamos. Pois então o código é um-um:

↓	*A*	*B*	*C*
	6	2	3

e reversível.

Cabe notar que a interação ocorreu porque foram utilizados apenas oito dos nove possíveis estados de saída. Com esta restrição permanente, a capacidade do canal foi reduzida.

Ex. 1: Qual é o código, da primeira entrada para a saída, se a segunda saída fôr mantida constante (i) em *F;* (ii) em *G?*

Ex. 2: Um sistema de três estados — *P, Q, R* — deve transmitir mudanças em duas entradas, α e β, cada qual podendo assumir dois estados. Os estados das entradas e do sistema variam em passo. Será possível transmissão isenta de ruído?

9.20. *Distorção.* Caberia dizer que a falsificação de uma mensagem *não* é necessàriamente idêntica ao efeito do ruído. "Se um sinal particular transmitido sempre produz o mesmo sinal recebido, i. e., o sinal recebido é uma função definida do sinal transmitido, então o efeito poderá ser chamado distorção. Se uma função possuir uma inversa — não há dois sinais transmitidos que produzam o mesmo sinal recebido — a distorção poderá ser corrigida, ao menos em princípio, pela mera realização da operação funcional inversa sôbre o sinal recebido". (Shannon.)

Ex. 1: A mudança que em objeto ereto sofre ao cair na retina é uma distorção ou uma corrupção?

Ex. 2: Uma tensão aplicada a um músculo suscita uma corrente estacionária de impulsos cuja freqüência não é proporcional à tensão. Tal desvio da proporcionalidade é uma distorção ou uma corrupção?

Ex. 3: (Continuação.) Se o nervo que transporta os impulsos está sujeito a vapor de álcool de fôrça suficiente, cessará de conduzir para tôdas as tensões. Trata-se de uma distorção ou de uma corrupção?

9.21. *Equívoco.* Que eu saiba, não foi desenvolvida uma medida adequada para o *grau* de corrupção, para uso em casos básicos. Para um canal que transmite incessantemente, contudo, Shannon desenvolveu medida apropriada. Admitiu, em primeiro lugar, que tanto os sinais originais quanto os recebidos formam cadeias de Markov do tipo definido na S.9.4. Os dados das mensagens podem então apresentar-se numa forma que exibe as freqüências (ou probabilidades) com as quais ocorrem tôdas as possíveis combinações do vetor (símbolo emitido, símbolo recebido). Destarte, usando um exemplo de Shannon, suponhamos que os 0 e os 1 estejam sendo emitidos e que as probabilidades (no caso, freqüências relativas) dos símbolos recebidos sejam:

Símbolo emitido	0	0	1	1
Símbolo recebido	0	1	0	1
Probabilidade	0,495	0,005	0,005	0,495

Para cada milhar de símbolos emitidos, dez chegam em forma errada, um êrro de um por cento.

À primeira vista, êste "êrro de um por cento" pode parecer a medida natural para a quantidade de informação perdida, mas semelhante interpretação leva ao disparate. Assim se, na mesma transmissão, a linha fôsse efetivamente cortada e o receptor simplesmente jogasse uma moeda a fim de conseguir uma "mensagem", obteria cêrca da metade dos símbolos corretamente; no entanto, nenhuma informação, de qualquer natureza, teria sido transmitida. Shannon provocou concludentemente que a medida natural é o equívoco calculado como se segue.

Determine primeiro a entropia sôbre tôdas as classes possíveis:

$$—0{,}495 \log 0{,}495 — 0{,}005 \log 0{,}005$$
$$—0{,}005 \log 0{,}005 — 0{,}495 \log 0{,}495$$

Dê a isto o nome de H_1; trata-se de 1,081 bits por símbolo. Colete a seguir todos os sinais recebidos, e suas probabilidades; isto fornece a tabela

Símbolo recebido	0	1
Probabilidade	0,5	0,5

Determine sua entropia:

$$—0{,}5 \log 0{,}5 — 0{,}5 \log 0{,}5$$

Chame a isto H_2. Trata-se de 1,000 bits por símbolo. Então o equívoco vale $H_1 — H_2$: 0,081 bits por símbolo.

A taxa efetiva segundo a qual a informação está sendo transmitida, levando em conta o efeito do ruído, é a entropia da fonte menos o equívoco. A fonte, no caso, apresenta entropia de 1,000 bits por símbolo, como se segue de

Símbolo enviado	0	1
Probabilidade	0,5	0,5

Portanto, a quantidade original fornecida é de 1,000 bits por símbolo. Disto, 0,919 consegue chegar ao destino e 0,081 é destruído pelo ruído.

Ex. 1: Qual é o equívoco da transmissão da S.9.19, se ocorrerem tôdas as nove combinações de letras, a longo têrmo, com igual freqüência?

Ex. 2: (Continuação.) O que sucede ao equívoco se a primeira entrada utiliza apenas os símbolos *B* e *C*, de modo que as combinações *BE*, *BF*, *BG*, *CE*, *CF*, *CG* ocorram com freqüências iguais? Será razoável a resposta?

**Ex.* 3: Prove as seguintes regras, úteis na determinação do valor da expressão — p log p, quando p é ou muito pequeno ou muito próximo de 1:

(i) Se $p = xy$, $-p \log_a p = -xy(\log_a x + \log_a y)$;

(ii) Se $p = 10^{-z}$, $-p \log_a p = \dfrac{z \times 10^{-z}}{\log_{10} a}$;

(iii) Se p estiver bastante próximo de 1, ponha $1-p = q$, e

$$-p \log_a p = \frac{1}{\log_e a}\left(q - \frac{q^2}{2} \ldots\right).$$

Ex. 4: Determine — $p \log_2 p$ quando p vale 0,00025. (Sugestão: Escreva p como $2{,}5 \times 10^{-4}$ e use (i).)

Ex. 5: Durante uma contagem sangüínea, os linfócitos e os monócitos são examinados sob um microscópio e discriminados pelo hematologista. Caso êle errôneamente tome um em cada cem linfócitos por um monócito, e um em cada duzentos monócitos por linfócito, e se tais células aparecerem no sangue à razão de 19 linfócitos para 1 monócito, qual será seu equívoco? (Sugestão: Utilize os resultados dos dois exercícios anteriores.)

9.22. *Transmissão isenta de êrro.* Chegamos agora ao teorema fundamental de Shannon acêrca da transmissão de informação na presença de ruído (i. e., quando outras e irrelevantes entradas são ativas). Poder-se-ia pensar que, quando mensagens são enviadas através de um canal que submete cada mensagem a uma probabilidade definida de ser alterada ao acaso, então, a possibilidade de receber uma mensagem correta com certeza seria impossível. Shannon, contudo, provou concludentemente que esta concepção, embora plausível, é errônea. Mensagens fidedignas são transmissíveis por um canal não fidedigno. O leitor que julgar isto incrível poderá recorrer ao livro de Shannon para a demonstração; apresento aqui apenas o resultado.

Seja a informação a ser transmitida de quantidade *H*, e suponhamos que o equívoco seja *E*, de modo que seja recebida a informação de quantidade igual a *H* — *E*. (Como no livro todo de Shannon, admitimos que a transmissão é incessante.) O que o teorema afirma é que, se a capacidade do canal aumenta de uma quantidade não menor do que E — devido ao provimento, talvez, de outro canal em paralelo —, é possível então codificar as mensagens de tal maneira que a fração de erros ainda persistentes possa ser *tão aproximada de zero quanto o queiramos.* (O preço de uma pequeníssima fração de erros é retardo na transmissão; pois é preciso acumular suficientes símbolos-mensagens para fazer com que a média do material acumulado se aproxime do valor da média durante o tempo todo.)

Inversamente, com menos retardo, é possível ainda tornar os erros tão poucos quanto nos aprouver pelo aumento da capacidade do canal, além da quantidade mínima E.

Será difícil superestimar a importância dêste teorema em sua contribuição ao nosso entendimento de como um sistema intrincadamente conectado como o nosso córtex cerebral pode conduzir mensagens sem que cada mensagem venha a ser gradualmente tão corrompida por êrro e interferência que se torne inútil. O que o teorema afirma é que, se houver bastante capacidade de canal disponível, então os erros poderão ser mantidos em nível tão baixo quanto se deseja. Ora, no cérebro, e especialmente no córtex, há pouca restrição na capacidade do canal, pois é possível obter-se mais, comumente, pelo simples emprêgo de mais fibras, quer pelo crescimento em embriogenia, quer por alguma substituição funcional na aprendizagem.

O pleno impacto dêste teorema na neuropsicologia está ainda por ser sentido. Seu poder não reside tanto na capacidade de resolver o problema "Como o cérebro supera a sempre crescente corrupção de suas mensagens internas?" quanto em mostrar que êle dificilmente aparece, ou que é mais um problema secundário que de importância fundamental.

O teorema ilustra outro modo em que a cibernética pode ser útil à biologia. Os métodos cibernéticos podem tornar-se decisivos no tratamento de certos problemas árduos, não pela obtenção direta da solução mas por uma demonstração de que o problema foi erradamente concebido ou foi baseado em uma hipótese errônea.

Alguns dos problemas mais relevantes da atualidade sôbre o cérebro e o comportamento nos chegam dos tempos medievais e antigos, quando as hipóteses básicas eram muito diferentes e, amiúde, pelos padrões de hoje, ridìculamente falsas.

Alguns dêles foram, é provável, colocados de forma enganosa e equivalem à questão, clássica na medicina medieval: quais são as relações entre os quatro elementos e os quatro humores? Tal questão, note-se, nunca foi *resolvida* — o que aconteceu foi que, quando os químicos e os patologistas passaram a conhecer mais acêrca do corpo, compreenderam que deveriam ignorá-la.

Certos de nossos problemas clássicos a respeito do cérebro — talvez alguns daqueles relacionados com localização, causação e aprendizagem — podem muito bem ser dêste tipo. Parece provável que a nova visão proporcionada pela cibernética nos capacite a conseguir uma melhor discriminação; se isto acontecer, liquidará algumas questões mediante uma clara demonstração de que não deveriam ser propostas.

Terceira parte

REGULAÇÃO E CONTRÔLE

O fundamento de töda a fisiologia deve ser a fisiologia da permanência

(Darlington)

Regulação em Sistemas Biológicos

10

10.1 As duas partes anteriores abordaram o Mecanismo (e os processos dentro do sistema) e a Variedade (e os processos de comunicação entre sistema e sistema). Era preciso estudar êstes dois assuntos primeiro, pois são fundamentais. Utilizar-nos-emos dêles agora e, na Terceira Parte, estudaremos o que é o tema central da cibernética — regulação e contrôle.

O primeiro capítulo examina o lugar que a regulação ocupa na biologia, e mostra sumàriamente por que ela é de importância básica. Mostra como a regulação se encontra essencialmente relacionada ao fluxo de variedade. O próximo capítulo (11) analisa essa relação com mais detalhe, desenvolvendo uma lei quantitativa — que a quantidade de regulação que pode ser conseguida é limitada pela quantidade de informação que pode ser transmitida em um certo canal. O Capítulo 12 retoma a questão de como os princípios abstratos do Capítulo 11 devem ser concretizados — que tipo de mecanismo pode realizar o que é pedido. Êste capítulo introduz uma nova espécie de máquina, a Markoviana, que amplia as possibilidades consideradas na Primeira Parte. Os capítulos restantes consideram a realização da regulação e contrôle à medida que aumentam as dificuldades, particularmente aquelas que surgem quando o sistema se torna muito grande.

Admitiremos, em primeiro lugar, na Terceira Parte, que o regulador já fôra provido, quer por ser congênito, quer por ser especialmente feito por um fabricante, ou por alguns outros meios. A questão sôbre o que fêz o regulador, de como o regulador, que faz coisas úteis, chegou êle próprio a ser feito será retomada na S.13.10.

10.2. O presente capítulo visa, primàriamente, a motivar o leitor, mostrando que os assuntos discutidos nos capítulos ulteriores (do 11 em diante) são de fundamental importância na biologia. O tema da regulação na biologia é tão vasto que um só capítulo não lhe fará justiça. Cannon, em seu livro *Sabedoria do Corpo,* aborda-o de modo adequado no que diz respeito às atividades vegetais internas, mas está ainda por escrever o livro, bem mais vasto em tamanho, que mostrará como tôdas as atividades exteriormente dirigidas do organismo — suas atividades "superiores" — são similarmente reguladoras, i. e., homeostáticas. Neste capítulo inicial tive de deixar muita coisa do problema por conta da imaginação do leitor, confiando que, como biólogo, êle já estará provàvelmente familiarizado bastante com a tese. A tese, de qualquer modo, foi discutida com certa amplitude no *Design for a Brain.*

O propósito fundamental dêste capítulo é unir os conceitos de regulação, informação e sobrevivência, mostrar quão intimamente se relacionam e como é possível tratar os três por um método inteiramente uniforme com o utilizado antes neste livro, e que pode tornar-se tão rigoroso, objetivo e sem ambigüidade quanto o desejarmos.

10.3. *O fundamento.* Comecemos pelo princípio. Os fatos mais básicos da biologia são que a terra tem agora dois bilhões de anos, e que o biólogo estuda principalmente o que existe hoje. Dêstes dois fatos segue-se uma conhecida dedução, que eu gostaria de reformular em nossos têrmos.

Vimos na S.4.23 que, se um sistema dinâmico fôr grande e composto de partes com muita repetição, e se contiver qualquer propriedade que seja autocatalítica, i. e., cuja ocorrência em um ponto aumente a probabilidade de que venha a ocorrer de nôvo em outro ponto, então o sistema é, no que diz respeito a esta propriedade, essencialmente instável em sua ausência. A terra contém carbono e outros elementos necessários e é um fato que muitas combinações de carbono, nitrogênio e alguns outros elementos são auto-reprodutoras. Segue-se que, embora o estado de "ser sem vida" seja quase um estado de equilíbrio, ainda assim êste equilíbrio é instável (S.5.6), sendo suficiente um simples desvio para iniciar uma trajetória que se afasta cada vez mais do estado "sem vida". O que presenciamos hoje no mundo biológico são êstes processos "autocatalíticos" apresentando tôdas as peculiaridades que lhe impuseram dois bilhões de anos de eliminação daquelas formas que não podem sobreviver.

Os organismos que vemos hoje estão profundamente marcados pela ação seletiva de dois bilhões de anos de desgaste. Qualquer forma de algum modo defeituosa no seu poder de sobrevivência foi eliminada; e hoje os traços de quase tôda forma trazem as marcas de um processo de adaptação para assegurar *sobrevivência* mais do que qualquer outro resultado possível. Olhos, raízes, cílios, conchas e garras apresentam-se moldados de maneira a tornar máxima a probabilidade de sobrevivência. E quando estudamos o cérebro estamos de nôvo estudando um meio para sobreviver.

SOBREVIVÊNCIA

10.4. O que acabamos de dizer é bastante conhecido. Permite-nos, contudo, juntar tais fatos às idéias desenvolvidas neste livro e indicar exatamente a conexão.

Para tanto, consideremos o que se entende em geral por "sobrevivência". Suponhamos que um camundongo está tentando escapar de um gato, de modo que está em pauta a sobrevivência do camundongo. Como sistema dinâmico, o camundongo pode encontrar-se em uma variedade de estados; assim, pode estar em várias posturas, sua cabeça voltada para êste ou aquêle lado, sua temperatura ter vários valores, e ter dois ouvidos ou um. Êstes diferentes estados podem ocorrer durante sua tentativa de escapar podendo-se ainda dizer que êle sobreviveu. Por outro lado, se o camundongo passa para o estado no qual fique dividido em quatro partes separadas, ou perdeu a cabeça, ou se tornou uma solução de aminoácidos circulando no sangue do gato, então não consideramos sua chegada a um dêstes estados como correspondente a "sobrevivência".

O conceito de "sobrevivência" pode assim traduzir-se em têrmos perfeitamente rigorosos, similares aos empregados no decorrer dêste livro. Os vários estados (C para camundongo) em que o camundongo pode encontrar-se de início e aos quais pode passar depois do caso com o gato são um conjunto $C_1, C_2, \ldots, C_k, \ldots, C_n$. Decidimos que, por diversas razões de ordem práticas e de conviniência, devemos restringir as palavras "camundongo *vivo*" para significar que o camundongo está em um dos estados de algum subconjunto destas possibilidades, digamos, de C_1 a C_n. Se agora alguma operação G (para Gato) atua sôbre o camundongo no estado C_i, e $G(C_2)$ dá, digamos, C_2, então podemos afirmar que C "sobreviveu" à operação de G, pois C_2 está no conjunto $C_1, \ldots, C_k$.

Se um dado camundongo fôr muito esperto e sempre sobreviver à operação G, neste caso todos os estados $G(C_1)$, $G(C_2)$, estarão contidos no conjunto $C_1, \ldots, C_k$. Vemos pois que essa representação de sobrevivência é *idêntica* à da "estabilidade" de um conjunto (S.5.5). Destarte os conceitos de "sobrevivência" e "estabilidade" podem ser colocados em uma relação exata; e fatos e teoremas concernentes a cada um são utilizáveis no outro, desde que se mantenha a exatidão.

Os estados C são freqüentemente definidos em têrmos de variáveis. Os estados $C_1, \ldots, C_k$, que correspondem aos organismos vivos, constituem então aquêles estados em que certas **variáveis essenciais** são conservadas dentro de limites ("fisiológicos") consignados.

Ex. 1: Se n valer 10 e k, 5, a que corresponderia a operação $G(C_7) = C_8$?

Ex. 2: (Continuação.) A que corresponderia a operação $G(C_8) = C_4$?

Ex. 3: Qual seria uma definição apropriada para "letal" se o ataque de G fôsse invariàvelmente fatal para C?

10.5. O que significa: êle sobrevive no curso das eras? Não o organismo individual, mas certos padrões genéticos peculiarmente bem compostos, em especial os que conduzem à produção de um indivíduo que transporta o padrão genético bem protegido dentro de si mesmo, e que, na extensão de uma geração, pode cuidar de si próprio.

Isto quer dizer que têm uma especial probabilidade de sobrevivência (e, portanto, de existir hoje) aquêles padrões genéticos que desenvolvem entre êles próprios e o mundo perigoso algum mecanismo de defesa mais ou menos elaborado. Assim, os genes no *Testudo* provocam o crescimento de uma concha; e o genes no *Homo* provocam o crescimento de um cérebro. (Os genes que não produzem tais desenvolvimentos foram de há muito eliminados.)

Consideremos agora o sistema como constituído de partes em comunicação. Na seção anterior o diagrama dos efeitos imediatos (do gato e do camundongo) era (ou poderia ser tomado como)

$$\boxed{C} \rightarrow \boxed{M}$$

O caso ora em exame é aquêle no qual o diagrama é

$$\boxed{D} \rightarrow \boxed{F} \rightarrow \boxed{E}$$

onde E é o conjunto das variáveis essenciais, D, a fonte de perturbação e perigos (tais como G) do restante do mundo e F, a parte interpolada (concha, cérebro etc.) formada pelo padrão genético para a proteção de E. (F pode também incluir determinadas partes do ambiente que possam ser similarmente usadas para a proteção de E — toca para o coelho, concha para o caranguejo ermitão, alvião para o mineiro e espada (como defesa) para o esgrimista.)

Por conveniência quanto à Terceira Parte, sejam os estados das variáveis essenciais E divididos em um conjunto η — aquêles que correspondem ao "organismo vivo" ou "bom" — e não η — aquêles que correspondem ao "organismo não-vivo" ou "mau". (A classificação amiúde não pode ser tão simples, mas, em princípio, não ocorre dificuldade; nada a ser dito exclui a possibilidade de uma classificação mais precisa.)

Para tornar as hipóteses claras, eis aqui alguns casos simples, à guisa de ilustração. (Por razões de simplicidade damos primeiro sistemas reguladores inanimados.)

(1) *O banho-maria termostàticamente controlado.* E é a sua temperatura, e o que se deseja (η) é o intervalo de temperatura entre, digamos, 36º e 37º. D é o conjunto de todos os distúrbios que podem conduzir a temperatura para fora dêste intervalo — adição de água fria, sopros de correntes de ar frio, imersão de objetos frios etc. F é o conjunto da máquina de regulação. F, pela sua ação, tende a diminuir o efeito de D sôbre E.

(2) *O pilôto automático.* E é um vetor de três componentes — guinada, arfagem e rotação — e η é o conjunto de posições onde estas três estão dentro de certos limites. D é o conjunto das perturbações que podem afetar as variáveis, tais como rajadas de vento, movimento de passageiros no ae-

roplano e irregularidades de propulsão das máquinas. *F* é tôda a maquinaria — pilôto, aleta, leme etc. — cuja ação determina como *D* afetará *E*.

(3) *O ciclista.* *E* é sobretudo seu ângulo com a vertical, η é o conjunto dos pequenos desvios permissíveis. *D* é o conjunto daqueles distúrbios que ameaçam aumentar o desvio. *F* é tôda a maquinaria — mecânica, anatômica, neurônica — que determina qual o efeito de *D* sôbre *E*.

Muitos outros exemplos ocorrerão mais tarde. Por ora, resumindo, podemos dizer que a seleção natural favorece aquêles padrões genéticos que introduzem, de alguma maneira, um regulador *F* entre as perturbações *D* e as variáveis essenciais *E*. Sendo as outras coisas iguais, quanto melhor fôr o regulador *F*, maior a possibilidade de sobrevivência do organismo.

Ex.: Que variáveis os seguintes mecanismos reguladores mantêm dentro de limites: (i) o condicionador de ar; (ii) o suprimento de oxigênio do alpinista; (iii) o limpador de pára-brisa; (iv) os faróis de um carro; (v) a geladeira; (vi) a planta fototáxica; (vii) óculos de sol; (viii) o reflexo de flexão (a rápida suspensão do pé quando se pisa em uma pedra pontuda); (ix) o piscar quando um objeto se aproxima ràpidamente do ôlho; (x) previsor para artilharia antiaérea.

10.6. *A regulação bloqueia o fluxo de variedade.* Em que escala é possível medir qualquer mecanismo particular *F* no tocante ao seu valor ou êxito como regulador? O termostato perfeito seria aquêle que, a despeito do distúrbio, mantivesse a temperatura constante ao nível desejado. Em geral, requerem-se duas características: a manutenção da temperatura em limites fechados e a correspondência dêste intervalo com o pretendido. Cabe notar em especial que o conjunto dos valores permissíveis, η , possui menos variedade do que o conjunto de todos os valores possíveis em *E;* pois η é algum conjunto escolhido entre os estados de *E*. Se *F* fôr um regulador, a inserção de *F* entre *D* e *E* diminuirá a variedade transmitida de *D* para *E*. Assim, uma função essencial de *F* como regulador é que deverá bloquear a transmissão de variedade do distúrbio para a variável essencial.

Como esta característica implica também que a função do regulador é a de bloquear o fluxo de informação, examinemos mais de perto a tese para verificarmos sua razoabilidade.

Suponhamos que me ofereçam dois banhos-maria e que eu deva decidir qual comprar. Testarei cada um dêles por um dia com respeito a perturbações análogas e observarei os registros de temperatura; apresentam-se como na Fig. 10.6.1:

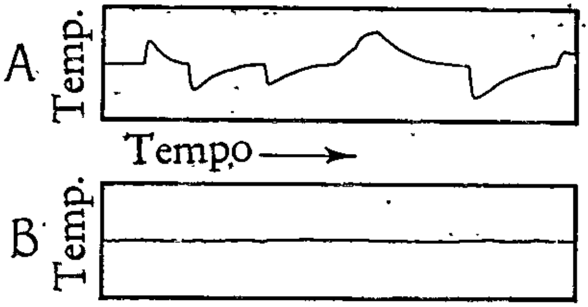


Fig. 10.6.1

Não há dúvida de que o Modêlo *B* é o melhor; e decido-me por êste precisamente porque o seu registro não me fornece informações, como o faz o de *A*, sôbre as perturbações que lhes sobrevêm, de calor ou frio. O termômetro e a água no banho *B* foram incapazes, por assim dizer, de constatar algo dos distúrbios *D*.

O mesmo argumento se aplicará, com modificações óbvias, ao pilôto automático. Se fôr um bom regulador, os passageiros farão um vôo suave, qualquer que seja a tempestuosidade reinante lá fora. Em suma, ser-lhes-á *evitado saber* se o tempo lá fora é ou não tempestuoso. Destarte, um bom pilôto atua como uma barreira contra a transmissão desta informação.

O argumento acima também é válido para um condicionador de ar. Se moro em um aposento dotado de ar condicionado, e posso dizer, pelo aquecimento do quarto, que na rua está ficando quente, então o condicionador é falho como regulador. Se fôr de fato bom, e as venezianas estiverem fechadas, serei incapaz de ter a menor idéia de como se apresenta o tempo na rua. O bom condicionador bloqueia o influxo de informação sôbre o tempo.

A mesma tese se aplica a regulações superiores realizadas por atividades tais como caça de alimento e ganho do pão de cada dia. Assim, enquanto o caçador ou o trabalhador inabilitados, em tempos difíceis, passarão fome e forçarão o fígado e os tecidos (as variáveis essenciais) a estados extremos e quiçá não-fisiológicos, o caçador ou o trabalhador hábeis atravessarão os mesmos tempos difíceis sem que seu fígado ou tecidos cheguem jamais a extremos. Em outros têrmos, sua perícia como regulador manifesta-se no fato, dentre outros, de evitar informações sôbre os tempos que atinjam as variáveis essenciais. Do mesmo modo, o provedor habilitado de uma família pode vencer tempos difíceis sem que sua família se aperceba da ocorrência de algo fora do comum. A família de um provedor não habilitado tê-lo-ia descoberto.

Em geral, portanto, uma feição essencial do bom regulador consiste em *bloquear o fluxo de variedade das perturbações para as variáveis essenciais.*

10.7. O bloqueio pode suceder em variados modos, os quais vêm a ser, contudo, num exame mais detido, fundamentalmente os mesmos. Duas formas extremas ilustrarão o intervalo.

Um modo de bloquear o fluxo (da fonte de distúrbio *D* até a variável essencial *E*) é interpor algo que atue como um simples bloco passivo para as perturbações. É o caso do casco da tartaruga, que reduz a variedade de impactos, golpes, mordidas etc., a uma perturbação desprezível dos tecidos sensitivos interiores. Na mesma classe situam-se a casca da árvore, a capa de gordura da foca e o crânio do homem.

No outro extremo desta defesa estática encontra-se a defesa pela contra-ação habilitada — a defesa que obtém informação sôbre a perturbação por vir, que se prepara para a sua chegada, e então vai de encontro à perturbação, que pode ser complexa e móvel, com uma defesa que é igualmente complexa e móvel. Esta é a defesa do esgrimista, em algum duelo mortal, que não usa armadura e confia na sua perícia nas paradas. Tal é a defesa utilizada principalmente pelos organismos superiores, que desenvolveram um sistema nervoso precisamente para levar a cabo êste método.

Ao considerar esta segunda forma deveremos ter o cuidado de notar a parte desempenhada pela informação e variedade no processo. O esgrimista precisa observar o seu oponente de perto e colhêr informação de todos os modos possíveis, para sobreviver. Por êste motivo nasceu com olhos, e por esta razão aprendeu como usá-los. Não obstante, o resultado final desta perícia, se bem sucedida, será exibido pela manutenção de suas variáveis essenciais, tal como o seu volume sangüíneo, dentro dos limites normais, como se o duelo não tivesse ocorrido. A informação flui livremente para as variáveis não-essenciais, mas a variedade na distinção "duelo ou não-duelo" foi impedida de alcançar as variáveis essenciais.

Através dos capítulos restantes consideraremos êste tipo de defesa ativa, propondo questões como: que princípios devem regê-lo? Que mecanismos podem levá-lo a cabo? E o que deve ser feito quando a regulação é muito difícil?

Variedade Requerida

11

11.1 No capítulo anterior consideramos a regulação do ponto de vista biológico, tomando-a como algo suficientemente bem conhecido. Neste capítulo examinaremos o processo da regulação em si mesmo, com o objetivo de descobrir o que, exatamente, êle envolve e implica. Desenvolveremos, em particular, meios de *mensuração* da quantidade ou grau de regulação alcançado, e mostraremos que esta quantidade tem um limite superior.

11.2. O tema da regulação é muito amplo em suas aplicações, abrangendo, como o faz, a maior parte das atividades na fisiologia, sociologia, ecologia, economia e muitas das atividades em quase todos os ramos da ciência e da vida. Ademais, os tipos de reguladores existentes são quase desconcertantes em sua variedade. Um dos modos de abordar o tema seria lidar um a um com os vários tipos; e o Capítulo 12, na verdade, indicá-los-á. Neste, contudo, tentaremos atingir o núcleo do tema — encontrar o que é comum a todos.

O que é comum a todos os reguladores, contudo, não é, à primeira vista, muito semelhante a qualquer forma particular. Por isso, começaremos tudo de nôvo na seção seguinte, sem fazer referência explícita ao que já passou. Sòmente depois de têrmos desenvolvido suficientemente o nôvo tema, começaremos a considerar qualquer relação que possa ter com a regulação.

11.3. *Jôgo e resultado.* Esqueçamos portanto tudo acêrca da regulação e suponhamos simplesmente que estamos observando dois jogadores, *R* e *D*, empenhados em uma partida. Seguiremos a sorte de *R*, que está tentando marcar um *a*. As regras são as seguintes: Os jogadores têm diante de si a Tabela 11.3.1, visível a ambos:

Tabela 11.3.1

		R		
		α	β	γ
	1	*b*	*a*	*c*
D	2	*a*	*c*	*b*
	3	*c*	*b*	*a*

D deve jogar em primeiro lugar, escolhendo um número, e assim uma linha particular. *R*, conhecendo êste número, escolhe a seguir uma letra grega, e assim uma coluna particular. A letra em itálico especificada pela interseção da linha e da coluna é o **resultado**. Se fôr um *a*, *R* ganha; do contrário, *R* perde.

O exame da tabela mostra imediatamente que com essa tabela particular *R* pode ganhar sempre. Não importa o valor que *D* escolha antes, *R* sempre pode escolher uma letra grega que fornecerá o resultado desejado. Assim, se *D* escolhe o 1, *R* escolherá β; se *D* escolher o 2, *R* escolherá α; e assim por diante. Na realidade, se *R* atua segundo a transformação

$$\downarrow \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ \beta & \alpha & \gamma \end{array}$$

então êle pode sempre compelir o resultado a ser *a*.

A posição de *R*, nesta tabela particular, é peculiarmente favorável, pois não só *R* pode sempre forçar *a* como resultado, como pode forçar fàcilmente, se o desejar, *b* ou *c* como resultado. *R* possui, de fato, contrôle completo do resultado.

Ex. 1: Que transformação *R* utilizaria para forçar o resultado *c*?

Ex. 2: Se ambos os valores de *R* e de *D* forem inteiros, e o resultado *E* fôr também um inteiro, dado por

$$E = R - 2D,$$

determine uma expressão para dar *R* em função de *D* quando o resultado desejado fôr 37.

Ex. 3: As rodas traseiras de um carro são derrapantes. D é a variável "lado para o qual a parte de trás está-se movendo", com dois valores, Direita e Esquerda. R é a ação do motorista "Direção para a qual êle vira o volante", com dois valores, Direita e Esquerda. Construa uma tabela 2 X 2 e preencha os resultados.

Ex. 4: Se o jôgo de R fôr determinado pelo de D segundo a transformação

$$\downarrow \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ \gamma & \beta & \alpha \end{matrix}$$

e várias partidas são observadas, qual será a variedade nos diversos resultados?

Ex. 5: Terá R completo contrôle do resultado se a tabela fôr triúnica?

11.4. A Tabela usada acima é, sem dúvida, particularmente favorável a R. Contudo, outras Tabelas são possíveis. Assim, suponhamos que D e R, jogando segundo as mesmas regras, forneçam agora a Tabela 11.4.1, na qual D tem uma escolha de cinco, e R uma escolha de 4 lances.

Se *a* fôr o alvo, R pode ganhar sempre. De fato, se D escolhe 3, R terá vários modos de ganhar. Como tôda linha possui ao menos um *a*, R pode sempre forçar o aparecimento de *a* como resultado. Por outro lado, se o alvo fôr *b*, nem sempre poderá ganhar. Pois, se D escolhe 3, não há movimento para R que dê *b* como resultado. E se o alvo fôr *c*, R ficará completamente indefeso, pois D ganhará sempre.

Ver-se-á que diferentes arranjos dentro da tabela, e diferentes números de estados disponíveis para D e R, poderão originar uma variedade de situações do ponto de vista de R.

Tabela 11.4.1

		R			
		α	β	γ	δ
	1	*b*	*d*	*a*	*a*
	2	*a*	*d*	*a*	*d*
D	3	*d*	*a*	*a*	*a*
	4	*d*	*b*	*a*	*b*
	5	*d*	*a*	*b*	*d*

Ex. 1: Com a Tabela 11.4.1, R poderá ganhar sempre se o alvo fôr *d*?

Ex. 2: (Continuação.) Qual a transformação que R deveria usar?

Ex. 3: (Continuação.) Se *a* fôr o alvo e D, por alguma razão, nunca jogar o 5, como poderá R simplificar seu método de jôgo?

Ex. 4: Um convidado vem para o jantar, mas o mordomo não sabe quem êle é. Sabe apenas que pode ser o Sr. A, que bebe sòmente *sherry* ou vinho, a Sra. B, que bebe apenas gin ou *brandy*, ou o Sr. C, que bebe apenas vinho tinto, *brandy* ou *sherry*. Na adega êle descobre que só tem uísque, gin e *sherry*. Pode encontrar algo aceitável para o convidado, seja quem fôr?

11.5. Será possível fazer qualquer afirmação *geral* acêrca dos modos de R jogar e das expectativas de êxito?

Se fôr permissível completa generalidade na Tabela, as possibilidades serão tantas, tão arbitrárias e tão complicadas que pouco se poderá dizer a respeito. Há um tipo, todavia, que permite uma proposição precisa e ao mesmo tempo suficientemente geral para ser de interêsse. (É também fundamental na teoria da regulação.)

De tôdas as tabelas possíveis, eliminemos aquelas que tornam o jôgo de R demasiado fácil para ser interessante. O Ex. 11.4.3 mostrou que, se uma coluna contém repetições, o jôgo de R não necessita de discriminador; isto é, R não necessita alterar sua jogada a cada mudança do lance de D. Consideremos então apenas aquelas tabelas em que *nenhuma coluna contém um resultado repetido*. Quando isto acontece, R tem de escolher a sua jogada com o *pleno* conhecimento da jogada de D; ou seja, qualquer alteração da jogada de D há de requerer mudança da parte de R. (Nada é pressuposto aqui sôbre como os resultados em uma coluna se relacionam aos de outra, de modo que tais relações permanecem irrestritas.) É o caso da Tabela 11.5.1. Pois bem, dado algum alvo, que R especifique qual será a sua jogada para cada lance de D. O essencial é que, ganhando ou perdendo, êle precisa especificar um e apenas um lance em resposta a cada jogada possível de

Tabela 11.5.1

		R		
		α	β	γ
	1	f	f	k
	2	k	e	f
	3	m	k	a
	4	b	b	b
D	5	c	q	c
	6	h	h	m
	7	j	d	d
	8	a	p	j
	9	l	n	h

D. Sua especificação, ou "estratégia", como poderia ser chamada, aparece como:

Se D escolhe 1, escolherei γ
" " " 2, " α
" " " 3, " β
... ...
" " " 9, " α

Êle está, sem dúvida, especificando a transformação (que deve ser univalente, pois R não pode efetuar duas jogadas simultâneas)

$$\downarrow \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & \ldots & 9 \\ \gamma & \alpha & \beta & \ldots & \alpha \end{array}$$

Esta transformação especifica apenas um conjunto de resultados — aquêles que efetivamente ocorrem se *D*, numa seqüência de jogos, inclui pelo menos uma vez todo lance possível. Como 1 e γ dão o resultado *k*, e assim por diante, chega-se à transformação

$$\downarrow \begin{array}{ccccc} (1,\gamma) & (2,\alpha) & (3,\beta) & \ldots & (9,\alpha) \\ k & k & k & \ldots & l \end{array}$$

É possível estabelecer agora que a variedade neste conjunto de resultados não pode ser menor do que

$$\frac{\text{variedade de } D}{\text{variedade de } R}$$

i. e., neste caso, 9/3.

É fácil prová-lo. Suponhamos que *R* marque um elemento em cada linha e se concentre em manter a variedade dos elementos marcados tão pequena quanto possível (ignorando no momento qualquer idéia de um alvo). Êle assinala um elemento na primeira linha. Na segunda linha deve mudar para uma nova coluna, se não quiser aumentar a variedade pela adição de um elemento diferente e nôvo, pois na coluna inicialmente escolhida os elementos são todos diferentes por hipótese. Para manter a variedade reduzida a um elemento deve, a cada linha, mudar para uma nova coluna. (É o *melhor* que tem a fazer; pode acontecer que a mudança de coluna para coluna não baste para manter a variedade reduzida a um elemento, mas isto é irrelevante, pois estamos interessados apenas na mínima variedade viável, admitindo que tudo aconteça tão favoràvelmente quanto possível.) Assim, se *R* possui *n* jogadas disponíveis (três no exemplo), na *n*-ésima linha tôdas as colunas serão utilizadas, de modo que uma das colunas deverá ser usada de nôvo para a linha seguinte, e um nôvo resultado *terá de ser* admitido no conjunto dos resultados. Destarte, na Tabela 11.5.1, a seleção dos *k* nas três primeiras linhas possibilitará a manutenção da variedade para um elemento, mas na quarta linha um segundo elemento *tem* de ser admitido no conjunto dos resultados.

De modo geral: Se não há dois elementos iguais na mesma coluna e se um conjunto de resultados fôr escolhido por *R*, um de cada linha, e se a tabela tiver *l* linhas e *c* colunas, então *a variedade no conjunto escolhido de resultados não poderá ser menor do que* l/c.

A LEI DA VARIEDADE REQUERIDA

11.6. Podemos agora examinar esta partida (ainda com a restrição de que nenhum elemento pode ser repetido em uma coluna) de um ponto de vista ligeiramente diferente. Se a jogada de *R* fôr invariante, de modo a produzir a mesma jogada qualquer que seja o movimento de *D*, então *a variedade nos resultados será tão grande quanto a variedade nas jogadas de D*. *D* está agora, por assim dizer, exercendo pleno contrôle sôbre os resultados.

Se a seguir *R* utiliza, ou admite, duas jogadas, então a variedade dos resultados poderá reduzir-se à metade (mas não menos). Se *R* possuir três jogadas, poderá reduzir-se a um têrço (mas não menos); e assim por diante. Assim, se a variedade nos resultados deve ser reduzida a algum número fixado, ou a uma fração fixa da variedade de *D*, a variedade de *R deve* crescer pelo menos ao mínimo apropriado. *Apenas a variedade nos lances de R pode forçar a baixa na variedade dos resultados.*

11.7. Se as variedades forem medidas logarìtmicamente (como é quase sempre conveniente), e se valem as mesmas condições, então o teorema assume uma forma muito simples. Seja V_O a variedade de *D*, V_D, a de *R*, e V_R a dos resultados (todos medidos logarìtmicamente). Então a seção anterior provou que V_O' não pode ser menor, numèricamente, do que o valor de $V_D - V_R$. Assim, o mínimo de V_D é $V_D - V_R$.

Dado e fixado V_D , V_D — V_R pode ser diminuído apenas por um aumento correspondente de V_R . Assim a variedade nos resultados, se fôr *mínima, pode ser ulteriormente diminuída apenas por um aumento correspondente na de R.* (Uma proposição mais geral será dada na S.11.9)

Tal é a lei da Variedade Requerida. Para pô-la de modo mais pitoresco: *Apenas a variedade em R pode forçar a baixa da variedade devida a D;* **sòmente a variedade pode destruir a variedade.**

Esta tese é tão fundamental na teoria geral da regulação que daremos ulteriores ilustrações e provas antes de passarmos a considerar sua aplicação efetiva.

11.8. (Numa primeira leitura esta seção pode ser omitida.) A lei é de aplicabilidade muito geral, e de modo nenhum é apenas um resultado trivial da forma tabular. Para provar isso, algo que é essencialmente o mesmo teorema será provado no caso em que a variedade é espalhada no tempo e a flutuação é incessante — o caso especialmente considerado por Shannon. (A notação e os conceitos desta seção pertencem ao livro de Shannon.)

Sejam *D, R* e *E* três variáveis, tais que cada uma delas seja uma fonte de informação, embora "fonte" no caso não implique que estejam atuando de forma independente. Sem levar em conta o seu relacionamento usual, pode-se calcular uma variedade de entropias, ou medi-las empìricamente. Há $H(D, R, E)$, a entropia do vetor que possui as três como componentes; há $H_D(E)$, a incerteza em *E* quando se conhece o estado de *D*; há $H_{ED}(R)$, a incerteza em *R* quando tanto *E* quanto *D* são conhecidos; e assim por diante.

A condição introduzida na S.11.5 (de que nenhum elemento ocorra duas vêzes em uma coluna) corresponde aqui à condição de que *R* seja fixo ou dado, e a entropia de *E* (correspondente à dos resultados) não pode ser menor do que a de *D*, i.e.

$$H_R(E) > H_R(D).$$

Ora, quaisquer que sejam as relações causais ou outras entre *D, R* e *E*, necessidades algébricas exigem que as suas entropias devam estar assim relacionadas

$$H(D) + H_D(R) = H(R) + H_R(D),$$

pois cada lado da equação é igual a $H(R, D)$. Substituindo $H_R(D)$ por $H_R(E)$, temos

$$\begin{aligned} H(D) + H_D(R) &< H(R) + H_R(E) \\ &< H(R,E). \end{aligned}$$

Mas sempre, por necessidade algébrica,

$$H(R,E) < H(R) + H(E)$$

assim $H(D) + H_D(R) < H(R) + H(E)$

i. e. $H(E) > H(D) + H_D(R) - H(R)$.

Assim, a entropia dos E tem um certo mínimo. Se êste mínimo tiver de ser afetado por uma relação entre as fontes D e R, poder-se-á torná-lo mínimo quando $H\ (R) = 0$, i. e., *quando R é uma função determinada de D.* Assim sendo, o mínimo de $H(E)$ vale $H(D) - H(R)$, dedução similar à que foi feita na seção anterior. Ela diz simplesmente que o valor mínimo da entropia de E pode ser forçado a descer abaixo da entropia de D apenas por um *aumento* igual no da entropia de R.

11.9. Os teoremas que acabamos de estabelecer podem fàcilmente ser modificados, proporcionando assim uma extensão conveniente.

Consideremos o caso em que, mesmo quando R nada faz (i. e., produz o mesmo movimento não importa o que D faça), a variedade do resultado é *menor* do que a de D. É o caso na Tabela 11.4.1. Assim, se R oferece a réplica a tôdas as jogadas de D, então os resultados são a, b ou d — uma variedade de três, menor que a variedade de cinco, de D. A fim de se obter um cálculo manejável, suponhamos que em cada coluna todo elemento seja agora repetido k vêzes (em vez de "uma só" da S.11.5). O mesmo argumento que o anterior, modificado pelo fato de que kn linhas podem proporcionar apenas um resultado, leva ao seguinte teorema

$$V_O > V_D - \log k - V_R,$$

onde as variedades são medidas logarìtmicamente.

Pode-se efetuar uma modificação exatamente similar no teorema em têrmos de entropias, supondo, não como na S.11.8, que

$$H_R(E) > H_R(D), \text{ mas que}$$
$$H_R(E) > H_R(D) - K.$$

O mínimo de $H(E)$ torna-se então

$$H(D) - K - H(R),$$

com interpretação semelhante.

11.10. A lei declara que certos eventos são impossíveis. É importante que estejamos bem esclarecidos quanto à origem da impossibilidade. Assim, o que tem a proposição a temer da experiência?

Nada tem a ver com as propriedades da matéria. De modo que, se a lei estiver enunciada na forma "Nenhuma máquina pode . . .", ela não será derrubada pela invenção de algum nôvo dispositivo ou de algum nôvo circuito eletrônico, ou pela descoberta de algum nôvo elemento. Ela nada tem a ver sequer com as propriedades da máquina no sentido geral do Capítulo 4, pois procede da *Tabela*, como na S.11.4; tal tabela afirma simplesmente que certas combinações *D-R* levam a certos resultados, mas a tabela independe inteiramente do que quer que determine o resultado. As experiências podem sòmente *proporcionar* tais tabelas.

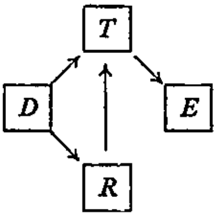
O teorema é antes de tudo uma proposição sôbre possíveis arranjos numa tabela retangular. Afirma que certos tipos de arranjo não podem realizar-se. Assim, sua dependência em relação às propriedades especiais da máquina não é maior do que, digamos, a do "teorema" segundo o qual quatro objetos podem ser dispostos de modo a formar um quadrado, enquanto três não o podem. A lei, portanto, nada deve à experiência.

11.11. *Regulação mais uma vez.* Podemos retomar agora o assunto da regulação, esquecido desde o início dêste capítulo, uma vez que a lei da Variedade Requerida nos possibilita aplicar uma *medida* à regulação. Voltemos atrás e reconsideremos o que se entende, essencialmente, por "regulação".

Há primeiro um conjunto de distúrbios *D*, que começa no mundo fora do organismo, amiúde longe dêle, e que ameaça, se o regulador *R* não faz nada, expulsar as variáveis essenciais *E* para fora de seu intervalo adequado de valores. Os valores de *E* correspondem aos "resultados" das seções anteriores. De todos êsses valores de *E*, apenas uns poucos (η) são compatíveis com a vida do organismo, ou são irrepreensíveis, de modo que o regulador *R*, para ser bem sucedido, deve assumir o seu valor de tal maneira relacionado ao de *D* que o resultado esteja, se possível, sempre dentro do conjunto aceitável, η, i. e., dentro dos limites fisiológicos. Destarte a regulação encontra-se fundamentalmente ligada ao jôgo da S.11.4. Tracemos a relação com mais detalhes.

Antes de tudo, seja dada por hipótese a Tabela *T*. Ela é o árduo mundo externo, ou aquêles problemas internos que o suposto regulador deve assumir como dados. Agora começa um processo. *D* toma um valor arbitrário, *R* assume algum valor determinado pelo valor de *D*, a Tabela determina um resultado, e êste está ou não em η . Em geral o procesos é repetido, como no caso em que um banho-maria tem de se haver, durante o dia, com várias perturbações. Então outro valor é tomado por *D*, outro por *R*, ocorre outro resultado, e êste também pode estar ou não em η . E assim por diante. Se *R* fôr um regulador bem feito — um que funcione com êxito —, então *R* será uma transformação de *D* tal que todos os resultados caem em η . *Neste caso os R e T juntos atuam como a barreira F* (S.10.5).

Podemos agora apresentar estas relações pelo diagrama dos efeitos imediatos:



As flechas representam canais efetivos de comunicação. Pois a variedade em *D* determina a variedade em *R*, e a de *T* é determinada por *D* e *R* juntas. Se *R* e *T* são de fato máquinas reais, então *R* recebe uma entrada de *D*, e *T* tem duas entradas.

(Quando *R* e *T* são convertidos em máquinas reais, cumpre que sejamos bem claros quanto ao que estamos nos referindo. Se alguma máquina proporciona a base para *T*, terá (pela S.4.1) um conjunto de estados que se sucederão passo a passo. Êsses estados e êses passos são, em essência, independentes dos passos discretos que *D*, *R* e *T* deveriam tomar, como consideramos no presente capítulo. Assim, *T* fornece o resultado, e qualquer resultado particular é comparável a outro, como unidade com unidade. Cada resultado individual pode, contudo, noutro contexto, ser analisado de modo mais preciso. Assim, um organismo sedento pode seguir a trajetória 1 e obter alívio, ou a trajetória 2 e morrer de sêde. Para alguns propósitos é possível tratar os dois resultados como unidades, especialmente se se pretende contrastá-los. Contudo, se desejamos investigar o comportamento com mais pormenor, podemos considerar a trajetória 1 composta de uma seqüência de estados, separados por passos no tempo, cuja ordem de grandeza é completamente diferente da ordem de grandeza dos passos entre sucessivos atos reguladores e sucessivas perturbações.)

Podemos agora interpretar o fenômeno geral de regulação em têrmos de comunicação. Se *R* não faz nada, i. e., atém-se a um valor, então a variedade em *D* ameaçará ir através de *T* para *E*, ao contrário do que se pretende. Pode suceder que *T*, sem que *R* o mude, venha a bloquear algo da variedade (S.11.9), e ocasionalmente êste bloqueio pode dar constância suficiente em *E* para sobrevivência. Mais amiúde, uma supressão ulterior é necessária em *E;* pode ser alcançada, como vimos na S.11.6, apenas pela variedade ulterior em *R*.

É possível selecionar uma porção do diagrama, e focalizar a atenção sôbre *R* como transmissor:

$$\boxed{D} \rightarrow \boxed{R} \rightarrow \boxed{T}$$

A lei da Variedade Requerida afirma que *a capacidade de R como um regulador não pode exceder a capacidade de R como canal de comunicação.*

Na forma que acabamos de dar, a lei da Variedade Requerida pode ser relacionada com exatidão ao Teorema 10 de Shannon, segundo o qual, se aparece ruído em uma mensagem, a quantidade de ruído passível de ser removida por uma correção de canal é limitada pela quantidade de informação passível de ser transportada pelo dito canal.

Assim, seu "ruído" corresponde ao nosso "distúrbio", sua "correção de canal", ao nosso "regulador *R*", e sua "mensagem de entropia *H*" torna-se, em nosso caso, mensagem de entropia zero, pois é a *constância* que deve ser "transmitida". Destarte, o uso de um regulador para alcançar homeostase e o uso de um canal de correção para suprimir ruído são homólogos.

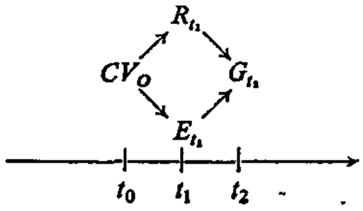
Ex. 1: Um certo inseto possui um nervo óptico de uma centena de fibras, transportando cada qual vinte bits por segundo; bastará isto para permitir-lhe que se defenda contra dez perigos diferentes, dos quais cada um pode ou não, independentemente, estar presente em cada segundo?

Ex. 2: Um telégrafo de navio, entre a ponte de comando e a casa de máquinas, é capaz de determinar uma entre nove velocidades, sem dar mais do que um sinal em cinco segundos, e o leme é capaz de determinar uma entre cinqüenta posições do timão em cada segundo. Como a experiência provou que êste meio de contrôle basta normalmente para obter regulação plena, calcule um limite superior normal para as perturbações (pés-de-vento, tráfego, bancos de areia etc.) que possam ameaçar a segurança do navio.

Ex. 3: Um general enfrenta um exército de dez divisões, podendo cada qual manobrar com uma variedade de 10^6 bits por dia. Seu serviço de informação procede de dez sinaleiros, podendo cada qual transmitir 60 letras por minuto, 8 horas por dia, em um código que transmite 2 bits por letra. É o seu canal de informações suficiente para capacitá-lo a conseguir completa regulação?

Ex. 4: (Continuação.) O general pode ditar ordens até 500 bits/ /minuto durante 12 horas/dia. Se o seu serviço de informação fôsse completo, êste canal verbal seria suficiente para uma completa regulação?

11.12. O diagrama dos efeitos imediatos fornecido na seção anterior está òbviamente relacionado com a formulação para "correlação diretiva" dada por Sommerhoff, que, na sua *Biologia Analítica,* utiliza o diagrama



Se não o interpreto mal, seus conceitos e os aqui utilizados se equivalem do seguinte modo:

Variável cinestésica	(CV_0)	$\leftrightarrow$	Distúrbio (D)
Resposta	(R_{t_1})	$\leftrightarrow$	Resposta (R)
Circunstâncias ambientais	(E_{t_1})	$\leftrightarrow$	Tabela (T)
Ocorrência subseqüente	(G_{t_2})	$\leftrightarrow$	Resultado (E)

Uma leitura do citado livro talvez ajude a ampliar muito a teoria aqui exposta, pois o autor discute o assunto de modo extensivo.

11.13. A lei habilita-nos agora a ver as relações existentes entre os vários tipos de variedade e informação que afetam o organismo vivo.

Uma espécie continua a existir (S.10.4) bàsicamente porque seus membros podem bloquear o fluxo de variedade (pensado como perturbação) para os padrões genéticos (S.10.6), e êste bloqueio é a necessidade mais fundamental da espécie. A seleção natural mostrou a vantagem que se tira em introduzir uma grande quantidade de variedade (como informação) parcialmente no sistema (de modo a não atingir o padrão genético) e depois em utilizar esta informação de modo que o fluxo via *R* bloqueie o fluxo através do ambiente *T*.

Tal ponto de vista permite-nos resolver o que poderia à primeira vista parecer um paradoxo — que os organismos superiores têm peles sensitivas, sistemas nervosos que respondem, e amiúde um instinto que os impele, no jôgo ou por curiosidade, a introduzir mais variedade no sistema do que seria imediatamente necessário. Não seria a sua possibilidade de sobrevivência melhorada, evitando-se esta variedade?

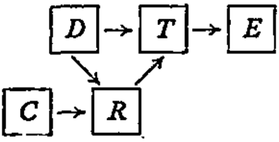
Neste capítulo a discussão provou que a variedade (quer seja informação, quer seja perturbação) chega ao organismo de duas formas. Há aquela que ameaça a sobrevivência do padrão genético — a transmissão direta de *D* a *E* por meio de *T*. Esta parte deve ser bloqueada a todo custo. E há aquela que, ao mesmo tempo que pode ameaçar o padrão genético, pode ser transformada (ou recodificada) pelo regulador *R* e usada para bloquear o efeito do restante (em *T*). Esta informação é útil, e poderia (caso se possa proporcionar o regulador) tornar-se tão grande quanto possível; pois, pela lei da Variedade Requerida, a quantidade de perturbação que atinge o padrão genético pode ser diminuída apenas da quantidade de informação assim transmitida. Eis a importância da lei na biologia.

É também de importância para *nós* na medida em que abrimos caminho para o último capítulo. Nas suas formas elementares a lei é intuitivamente óbvia e quase não merece uma exposição verbal. Se, por exemplo, um repórter fotográfico deseja lidar com vinte temas distintos (para exposição e distância), então a sua câmara deve òbviamente ser capaz de, no mínimo, 20 tomadas distintas, se todos os negativos devem apresentar densidade e nitidez uniformes. Esta lei desenvolve seu poder, em sua forma quantitativa, quando consideramos o sistema em que tais assuntos não são tão evidentes, e sobretudo quando o sistema é muito amplo. Assim, até que ponto pode um ditador controlar um país? Costuma-se dizer que o contrôle de Hitler sôbre a Alemanha foi total. No que concerne ao seu poder de regulação (no sentido da S.10.6), a lei reza que seu contrôle totalizava exatamente 1 potência-homem, e não mais. (A veracidade desta proposição terá de ser comprovada pelo futuro; sua principal virtude, agora, consiste em que ela é exata e descomprometida.) A lei, portanto, embora cediça nos casos mais simples, pode proporcionar orientação nos casos por demais complexos para serem tratados mediante mera intuição.

CONTRÔLE

11.14. As formulações fornecidas neste capítulo já sugeriram que a regulação e o contrôle se relacionam intimamente. Assim, na S.11.3, a Tabela 11.3.1 capacita R não só a conseguir a como resultado, a despeito de tôdas as variações de D, como outrossim a alcançar b ou c, à vontade.

Podemos encarar a situação de outra maneira. Suponhamos que a decisão de qual resultado deva ser o alvo incumba a um controlador C, a quem R tem de obedecer. As decisões de C hão de afetar a escolha de R quanto a α, β ou ; dêste modo o diagrama dos efeitos imediatos é:



O todo representa pois um sistema com duas entradas independentes, C e D.

Suponhamos agora que R seja um regulador perfeito. Se C designa a como alvo, neste caso (por intermédio de R) E assumirá o valor a, *qualquer que seja o valor que D possa assumir*. Similarmente, se C designa b como alvo, b aparecerá como resultado, não importa o valor que D possa tomar. E assim por diante. Além disso, se C designa uma seqüência particular — a, b, a, c, c, a, digamos — como alvo subseqüente ou composto, a referida seqüência será produzida, independentemente dos valores de D durante a seqüência. (É pressuposto, por conveniência, que os componentes se movem em passos.) Assim, o fato de R ser um regulador perfeito dá a C contrôle completo sôbre a saída, apesar da entrada de efeitos perturbadores por meio de D. Destarte, *a perfeita* **regulação** *do resultado por R possibilita o completo* **contrôle** *sôbre o resultado por C.*

Os mesmos fatos são visíveis a partir de outro ponto de vista. Se uma tentativa de contrôle, de C sôbre E:

$$\boxed{C} \rightarrow \boxed{E}$$

fôr perturbada ou tornada ruidosa por outra entrada, D, independente, de modo que as conexões sejam

$$\begin{tikzcd}
\boxed{D} \arrow[dr] & \\
& \boxed{E} \\
\boxed{C} \arrow[ur] &
\end{tikzcd}
\qquad \text{ou} \qquad
\begin{tikzcd}
\boxed{D} \arrow[dr] & & \\
& \boxed{T} \arrow[r] & \boxed{E} \\
\boxed{C} \arrow[ur] & &
\end{tikzcd}$$

então um regulador adequado R, tomando informação tanto de C quanto de D e interposto entre C e T:

$$\begin{tikzcd}
\boxed{D} \arrow[r] \arrow[dr] & \boxed{T} \arrow[r] & \boxed{E} \\
\boxed{C} \arrow[r] & \boxed{R} \arrow[u] &
\end{tikzcd}$$

pode estar em condições de formar, com T, um canal composto para E que *transmite plenamente de C enquento nada transmite de D.*

A realização do contrôle pode assim depender necessàriamente da realização da regulação. Ambos se apresentam dêsse modo ìntimamente relacionados.

Ex. 1: A partir da Tabela 11.3.1 forme o conjunto de transformações, com C na qualidade de parâmetro, que R precisa empregar se C deve dispor de contrôle completo sôbre o resultado. (Sugestão: Quais são os operandos?)

Ex. 2: Se, no último diagrama desta seção, C deseja transmitir a E cêrca de 20 bits/segundo, e a fonte D está fornecendo ruído de 5 bits/segundo, e T é tal que, se R fôr constante, E variará de 2 bits/segundo, quanta capacidade deve ter o canal de D para R (no mínimo) se o contrôle de C sôbre E tiver de ser completo?

Ex. 3: (Continuação.) Quanta capacidade (no mínimo) é necessária ao longo do canal de C para R?

Ex. 4: (Continuação.) Quanta capacidade ao longo de R para T?

11.15. No tratamento dado à regulação a ênfase tem recaído sôbre as suas propriedades de reduzir a variedade no resultado; sem regulação a variedade é grande — com regulação ela é pequena. O limite desta redução é a regulação que mantém o resultado rigorosamente constante. Tal ponto de vista é sem dúvida válido, mas a princípio pode parecer contrastar-se agudamente com o ponto de vista ingênuo, segundo o qual os organismos vivos são, em geral, tudo, exceto imóveis. Talvez seja útil aditar algumas poucas palavras ao que dissemos na S.11.3.

Cumpre reconhecer que a distinção entre "constante" e "variante" depende amiúde da definição exata daquilo a que nos referimos. Dêsse modo, se um holofote segue com precisão um avião, podemos perceber ou que o holofote se move num intervalo grande de ângulos (ângulos em relação à terra) ou que o seu ângulo com a aeronave permanece constante no zero. É evidente que ambos os pontos de vista são válidos; não há contradição real neste exemplo entre "intervalo grande" e "constante", pois se referem a diferentes variáveis.

Mais uma vez, o motorista que cuidadosamente dirige um carro de uma cidade a outra, ao longo de uma pista sinuosa, pode ser tido quer como alguém que levou o volante a exibir muita atividade e mudança ou como alguém que, durante a viagem, manteve quase constante a distância entre o carro e a beira da estrada.

Muitas das atividades dos organismos vivos permitem êste duplo enfoque. Por um lado, o observador pode notar a grande quantidade de movimento e mudança efetivos que ocorrem, e, por outro, pode notar que há, através destas atividades, na medida em que são coordenadas ou homeostáticas, invariantes e constâncias que apresentam o grau de regulação que está sendo alcançado.

Muitas variações são possíveis sôbre o mesmo tema. Assim, se a variável x faz sempre exatamente o mesmo que a variável y, então a quantidade $x - y$ é constante em zero. Assim, se os valores de y são fornecidos por algum fator externo, qualquer regulador que atue sôbre x de modo a manter $x - y$ constante em zero está de fato forçando x a variar, imitando y. Similarmente, "fazer com que x faça o oposto em relação a y", corresponde a "manter $x + y$ em certo valor constante". E "fazer com que a variável w mude de modo que seja sempre exatamente duas vêzes maior do que a taxa de variação (flutuação) de v" corresponde a "manter constante a quantidade $w - 2dv/dt$".

É de grande conveniência, na exposição e nos processos da teoria geral, estarmos habilitados a tratar todos os "alvos" como se fôssem da forma "manter o resultado constante em a". O leitor não deve, contudo, equivocar-se, pensando que a teoria trata apenas da imobilidade; deve acostumar-se a intercambiar livremente os conceitos correspondentes.

ALGUMAS VARIAÇÕES

11.16. Na S.11.4 os fatos essenciais implicados na regulação foram apresentados como uma simples tabela retangular, como se fôsse uma partida entre dois jogadores D e R. O leitor pode sentir que tal formulação é demasiado simples e que existem regulações conhecidas que não basta representar. A formulação, todavia, é efetivamente muito mais geral do que parece, e nas demais seções dêste capítulo examinaremos diversas complicações que, na verdade, como mostra um exame mais detido, estão incluídas na formulação básica da S.11.4.

11.17. *Distuúrbio composto.* A formulação básica da S.11.4 incluía apenas uma fonte de distúrbio D, e parece assim, à primeira vista, não incluir todos aquêles casos, inumeráveis no mundo biológico, em que a regulação deve desenvolver-se contra diversos distúrbios provenientes simultâneamente de diversos canais. Assim, um ciclista deve enfrentar muitas vêzes tanto obstruções devidas ao tráfego como desequilíbrios provocados por rajadas de vento.

Na verdade, entretanto, êste caso é incluso, pois nada no atual capítulo exclui a possibilidade de que D possa ser um vetor, com qualquer número de componentes. Uma grandeza vetorial D encontra-se, portanto, apta a representar todos aquêles distúrbios compostos dentro da formulação básica.

11.18. *Ruído.* Um caso correlato sucede quando T é "ruidoso" — quando T possui uma entrada extra afetada por alguma perturbação que nêle interfere. Tal seria o caso se T fôsse uma máquina elétrica, algo perturbada por variações na voltam da linha principal. Ao primeiro exame o caso não parece estar representado na formulação básica.

Deve-se reconhecer que *D, T* e *E* etc., foram definidos na S.11.3 de forma puramente *funcional.* Assim "*D*" é "aquilo que perturba". Dado qualquer sistema real, será necessário tomar algum cuidado para decidir o que corresponde a *D,* o que a *T,* e assim por diante. Além disso, uma fronteira traçada provisòriamente entre *D* e *T* (e os outros limites) pode, a uma segunda reflexão, requerer movimento. Assim, um conjunto de fronteiras no sistema real pode proporcionar um sistema que pareça ser o de *D, T* etc., ainda que discorde da formulação básica da S.11.4. Pode-se verificar então que um deslocamento das fronteiras, para dar um *nôvo D, T,* etc., fornece um conjunto que *concorda* com a formulação básica.

Se uma colocação preliminar das fronteiras provar que êsse (provisório) *T* é ruidoso, então as fronteiras deveriam ser traçadas de nôvo de modo a incluir a entrada de ruído de *T* (S.9.19) *como uma componente* em *D*. *D* é agora "aquilo que perturba", e *T* não tem terceira entrada; de modo que a formulação está de acôrdo com a da S.11.4.

Evidentemente, não há aqui qualquer sugestão de que o ruído, como perturbação, possa ser admitido màgicamente, simplesmente por ser pensado de modo diferente. A sugestão é de que, se partimos de nôvo do início e redefinirmos *D* e *T,* então alguma *nova* transformação de *D* pode ser capaz de restabelecer a regulação. A nova transformação terá, sem dúvida, de ser mais complexa que a antiga, pois *D* terá mais componentes.

11.19. *Estados iniciais.* Um caso correlato ocorre quando *T* é uma certa máquina que mostra seu comportamento por uma trajetória cujo resultado *E* depende das propriedades da trajetória *T*. Em geral os resultados serão afetados por aquêle dentre os estados de *T* que é o inicial. Como entra o estado inicial de *T* na formulação básica de S.11.4?

Se o estado inicial fôr controlável de modo que a trajetória possa sempre partir de algum estado padronizado, não surgirão dificuldades. (Com relação a isto o método da S.7.25 será útil.) Pode suceder, contudo, especialmente se o sistema fôr muito grande, que o estado inicial de *T* não possa ser padronizado. Incluiria a formulação básica êste caso?

Sim; pois pode-se redefinir *D* como vetor, de modo a incluir o estado inicial de *T*. Então a variedade que o estado inicial de *T* acresceria a *E* teria sua parte própria na formulação.

11.20. *Alvo composto.* Pode suceder que os estados aceitáveis em E tenham mais de uma condição. Assim, pode ser exigido de um termostato que

(i) esteja usualmente entre 36º e 37ºC;

(ii) se deslocado de ± 10º, retorne ao intervalo permitido dentro de um minuto.

Esta dificuldade pode ser enfrentada pelo método usado na S.11.17, reconhecendo-se que E pode ser um vetor, com mais de uma componente, e que o (η), que é o aceitável, pode ser dado na forma de especificações separadas para cada componente.

Destarte, permitindo que E se torne um vetor, pode-se incluir na formulação básica da S.11.4 todos os casos nos quais o alvo seja complexo, condicional ou qualificado.

11.21. *Complexidades internas.* Como exemplo final, mostrando como é compreensiva de fato a formulação básica, consideremos o caso em que o problema principal parece ser não tanto uma regulação como uma interação entre muitas regulações. Assim, um sinaleiro pode lidar com vários trens que chegam simultâneamente à sua seção. Dar conta de cada um dêles em separado seria fácil, mas aqui o problema é o contrôle de todos enquanto um padrão global complexo.

Na verdade o caso está ainda compreendido na formulação básica. Pois nada na formulação impede que as quantidades, estados ou elementos em D, R, T ou E, sejam constituídos de partes e as partes relacionadas entre si. O fato de "D" ser uma letra única de modo algum implica o caráter internamente simples ou unitário daquilo que é representado.

A "perturbação" D do sinaleiro é o conjunto particular de trens que chegam dentro de algum padrão particular no espaço e no tempo. Outro arranjo proporcionaria outros valores para D, que deve, sem dúvida, ser um vetor. Os resultados E serão vários padrões complexos de trens que se movem uns em relação aos outros e partem desta seção. O conjunto aceitável η incluirá certamente uma componente "não colisão", assim como, provàvelmente, outras. Suas respostas R abrangerão uma variedade de padrões de movimento de sinais e pontos. T é o que é dado — os pontos básicos de geografia, mecânica, técnicas de sinalização etc., que levam, de modo determinado, da situação que surgiu e seu padrão de reação até o resultado.

Veremos, portanto, que a formulação básica é, em princípio, capaz de incluir casos de qualquer grau de complexidade interna.

O Regulador Controlado por Êrro

12

12. 1. No capítulo anterior estudamos a natureza da regulação, e provamos que certas relações e leis devem valer para que a regulação seja alcançada. Admitimos lá que se conseguiu a regulação e depois estudamos o que era necessário. Tal ponto de vista, contudo, embora útil, dificilmente corresponde ao utilizado em geral na prática. Adotemos um nôvo ponto de vista.

Na prática, o problema da regulação surge usualmente do seguinte modo: São dadas as variáveis essenciais E, e também o conjunto de estados η em que é preciso mantê-las para o organismo sobreviver (ou para uma fábrica funcionar satisfatòriamente). Ambos devem ser dados antes de tudo o mais. *Antes que se possa empreender ou mesmo discutir qualquer regulação, precisamos saber o que é importante e o que se deseja.* A tôda espécie particular são dados seus requisitos — o gato tem de manter-se sêco, o peixe, molhado. O objetivo de um servomecanismo é dado por outras considerações — um deve manter aquecida uma sala de incubação, outro deve manter frio um quarto refrigerado. No correr dêste livro foi pressuposto que considerações externas já determinaram qual deve ser a meta, i. e., quais são os estados aceitáveis η . O nosso interêsse, no livro, se restringe ao problema de como atingir a meta a despeito das perturbações e dificuldades.

Os distúrbios D ameaçam expulsar E do conjunto η. Se D atua através de algum sistema dinâmico (um ambiente) T, então o diagrama dos efeitos imediatos e inicialmente

$$\boxed{D} \to \boxed{T} \to \boxed{E}$$

O organismo (ou quem quer que esteja interessado em E), no entanto, tem certo poder de formar outro sistema dinâmico R (e. g., um cérebro ou um servomecanismo) que pode ser acoplado a T e que, se construído especialmente, formará um todo com T, F, de modo que o diagrama dos efeitos imediatos se torna

$$\boxed{D} \to \boxed{F} \to \boxed{E}$$

e de um modo tal que F bloqueia o fluxo de variedade de D para E, permanecendo assim em η.

Usualmente T é dado. Trata-se do ambiente que o organismo enfrenta junto com as outras partes do organismo que devem ser pressupostas na regulação. Não pode ser simplesmente abolido, mas pode usualmente ser manipulado. Então o problema da regulação constitui, em geral:

Dados E, η, T *e* D, *formar o mecanismo* R *de modo que* R *e* T, *acoplados, atuem para manter* E *dentro de* η.

Daqui por diante até o fim do livro estudaremos como os vários tipos de *dados* (E, η, T, e D) podem especificar a forma da máquina com entrada (R) que dará regulação. Desejamos deduzir a forma de R.

Fôsse a situação sempre tão simples como na Tabela 11.3.1, o tema estaria logo esgotado. Tal como é, são possíveis muitos desvios desta forma, de modo que procederemos ao exame dos diversos desvios, na medida em que êles colocam várias dificuldades no caminho do projeto ou especificação do regulador R.

Podemos admitir, agora, discutindo alguma regulação particular, que se fêz o pleno uso das possibilidades de redefinição (S.11.16), de modo que a formulação é ou como a da S.11.3, que proporciona regulação e contrôle perfeitos, ou como a da S.11.4, onde tal perfeição era impossível. O restante do livro preocupar-se-á essencialmente com os casos nos quais não é possível regulação perfeita mas onde desejamos que a regulação seja tão boa quanto possível nas condições dadas.

12.2. *Restrição sensorial e motora.* Uma simples introdução às dificuldades efetivas surge quando a capacidade de *R*, como canal para a transmissão de variedade ou informação de *D* para *T*, torna-se insuficiente, segundo a lei da Variedade Requerida, para reduzir a variedade em *E* para a de η. Quando isso ocorre, a regulação é necessàriamente imperfeita.

São inúmeros os exemplos do fenômeno. Primeiro, há todos os casos de restrição sensorial, de surdez, do motorista que não consegue enxergar claramente através do pára-brisa obscurecido pela chuva. Existem os organismos que não podem ver luz ultravioleta, e o tabético que não sente onde estão os pés. Trata-se de restrições no canal de *D* para *R*.

Há em seguida as restrições no canal de *R* para *T*, aquelas no lado efetuador de *R*. Temos o homem que perdeu um braço, e o inseto que não pode voar, a glândula salivar que não secreta, e o leme atolado.

Restrição similar quanto à capacidade de *R* pode suceder naqueles casos onde o efeito de *R* sôbre *T* é vetorial, ou seja, é efetuado através de mais de um canal ou componente para *T*, e certa diminuição ocorreu no número dos parâmetros de *T* acessíveis a *R*. (Compare S.7.12.) Assim, uma falha em qualquer dos contrôles no painel pode prejudicar a habilidade do motorista em manter o carro funcionando bem.

O caso em que *R* não pode receber informação plena acêrca do estado inicial de *T* (discutido na S.11.19) está de fato incluído nos casos acima mencionados. Uma tal dificuldade ocorre com um sinaleiro de estrada de ferro na neblina. Está informado que sobreveio uma perturbação "neblina", porém muitas vêzes tem dificuldade em averiguar o presente estado do sistema que controla, i. e., as posições atuais dos trens no seu setor. Com essa restrição no fluxo de informação de *T* para *R* surge a dificuldade ou mesmo impossibilidade de manter regulação plena.

12. 3. A formulação básica da S.11.4 admitia que o processo de regulação atravessava seus estágios sucessivos na seguinte ordem:

(1) Uma perturbação particular ameaça em *D;*

(2) Atua sôbre *R,* que a transforma em resposta;

(3) Os dois valores, de *D* e *R,* atuam sôbre *T simultâneamente* a fim de produzir o resultado de *T;*

(4) O resultado é um estado *E,* ou afeta *E.*

Destarte (3) pressupõe que, se *R* fôr um sistema material real, realiza todo o seu trabalho antes de *T* começar a mover-se. Admitimos, em outras palavras, que o regulador *R* moveu-se com uma ordem de velocidade maior do que *T.*

Tal seqüência não ocorre realmente em muitos casos. Quando o gato se aproxima, o rato pode reagir de maneira a alcançar sua toca antes que as garras do gato de fato o golpeiem. Dizemos em geral que o organismo reagiu à *ameaça* (em *D*) mais do que ao próprio *desastre* (em *E*), e antecipou-se assim ao desastre. A formulação é portanto devidamente representativa de muitas regulações importantes.

De outra parte, existem numerosos casos relevantes em que semelhante antecipação não é possível — onde a ação de *R* não pode completar-se antes que o resultado (em *T*) comece a ser determinado. (Um exemplo será dado na próxima seção.) Em tais casos a regulação considerada em S.11.3 é impossível. O que fazer então?

Um método, por certo, é acelerar a transmissão da informação de *D* para *R;* e muitos sistemas reguladores dispõem de dispositivos vários, especialmente para êsse fim. Fibras nervosas primitivas desenvolvem bainhas de mielina, de modo que a passagem para o cérebro possa ser mais rápida. Alguns organismos desenvolvem um sentido do odor, a fim de permitir o preparo de resposta apropriada em tempo para o encontro corporal efetivo. E os sistemas econômicos enviam mensagens por cabo submarino de preferência a utilizar um mensageiro, de modo a preparar a chegada ao pôrto de um navio com carga perecível.

Às vêzes, todavia, os recursos disponíveis não incluem o aceleramento da transmissão através de *R;* a reação de *R* não pode ser levada a *T* antes do início do resultado. Neste caso, o melhor a ser feito é tornar a regulação imperfeita tão boa quanto possível nas circunstâncias. As seções subseqüentes discutirão o modo de consegui-lo.

12.4. *Regulação por êrro.** Um conhecido regulador que não pode reagir diretamente ao distúrbio original D é o banho-maria controlado por termostato, que é incapaz de dizer "eu vejo alguém chegando com um frasco frio a ser imerso em mim — devo agir agora". Pelo contrário, o regulador não obtém qualquer informação sôbre a perturbação até que a temperatura da água (E) efetivamente comece a cair. E a mesma limitação vale para outras perturbações possíveis, como a aproximação de uma nesga de sol que irá aquecê-la, ou a abertura de uma porta que introduzirá uma corrente para resfriá-la.

A mesma limitação aplica-se a muitos reguladores importantes. Há, por exemplo, um mecanismo que ajuda a manter constante o suprimento de oxigênio aos tecidos: tôda falta prolongada de oxigênio acarreta eventualmente um aumento no número de glóbulos vermelhos contidos no sangue. Assim, pessoas com certos tipos de moléstias cardíacas, e as que vivem em altitudes elevadas, onde o ar é rarefeito, tendem a desenvolver semelhante aumento. Esta regulação haure sua informação do próprio efeito danoso (a falta de oxigênio) e não da causa (D) da moléstia cardíaca ou da decisão de viver em altitude mais elevada.

Do ponto de vista da comunicação, os novos fenômenos se relacionam com facilidade aos velhos. A diferença reside simplesmente em que agora a informação de D para R (que há de transitar se o regulador R desempenha algum papel útil não importa qual) *vem através de* T. Em vez de

$$\begin{tikzcd} \boxed{D} \arrow[r] \arrow[dr] & \boxed{T} \arrow[r] & \boxed{E} \\ & \boxed{R} \arrow[u] & \end{tikzcd} \quad \text{temos} \quad \begin{tikzcd} \boxed{D} \arrow[r] & \boxed{T} \arrow[r] \arrow[d, shift left] & \boxed{E} \\ & \boxed{R} \arrow[u, shift left] & \end{tikzcd}$$

recebendo R desta forma, sua informação acêrca de D por meio de T:

$$\boxed{D} \rightarrow \boxed{T} \rightarrow \boxed{R} \rightarrow$$

e a informação disponível para propósitos regulativos é tudo o que sobrevive à codificação imposta por sua passagem através de T (S.8.5).

Por vêzes a informação disponível para R é forçada a tomar um caminho ainda mais longo, de modo que R é afetado apenas pelo efeito real em E. O diagrama dos efeitos imediatos é então

$$\begin{tikzcd} \boxed{D} \arrow[r] & \boxed{T} \arrow[r] & \boxed{E} \arrow[dl] \\ & \boxed{R} \arrow[u] & \end{tikzcd}$$

e temos a forma básica do simples "servomecanismo controlado por êrro" ou "regulador de circuito fechado", com sua conhecida realimentação de E para R. O leitor deverá compreender que a referida forma difere daquela da formulação básica (S.11.4) apenas no fato de que a informação a respeito de D alcança R por uma via mais longa:

$$\boxed{D} \to \boxed{T} \to \boxed{E} \to \boxed{R} \to$$

Mais uma vez, a informação à disposição de R é sòmente a que sobrevive à transmissão através de T e E.

Esta forma é da maior importância e de mais ampla aplicabilidade. O restante do livro será consagrado a ela. (Os demais casos são essencialmente mais simples e não carecem de tanta consideração.)

12.5. Uma propriedade fundamental do regulador controlado por êrro é que *êle não pode ser perfeito* no sentido de S.11.3.

Suponhamos que tentamos formular o sistema controlado por êrro pelo método usado em S.11.3 e 4. Tomamos uma tabela de dupla entrada, com D e R determinando um resultado em E. Cada coluna tem uma variedade igual à de D. A novidade é que as regras precisam ser modificadas. Enquanto D anteriormente fazia uma seleção (um distúrbio particular), depois R, e assim E era determinado, o jôgo agora é que após a seleção inicial de D, R tem de tomar um valor que é uma função determinada do resultado E (pois R *é* controlado *por êrro*). É fácil mostrar que com tais condições *a variedade de E será tão ampla quanto a de D* —

i. e., *R* não pode lograr qualquer regulação, não importa como *R* seja construído (ou seja, não importa que transformação é utilizada a fim de converter o valor de *E* em um valor de *R*).

Se não é exigida a prova formal, um linha de raciocínio mais simples pode mostrar por que isso tem de ser assim. Como vimos, *R* obtém sua informação através de *T* e *E*. Suponhamos que *R* *esteja* de alguma forma regulando com êxito; isto implicaria que a variedade em *E* se encontra reduzida abaixo da de *D* — talvez mesmo reduzida a zero. Esta mesma redução leva o canal

$$\boxed{D} \rightarrow \boxed{T} \rightarrow \boxed{E} \rightarrow$$

a ter uma capacidade diminuída; *se E deve permanecer inteiramente constante, então o canal está completamente bloqueado.* Assim, quanto mais bem sucedido fôr *R* em manter *E* constante, mais *R* bloqueia o canal por onde está recebendo a sua informação necessária. Evidentemente, qualquer êxito de *R* pode, no melhor dos casos, ser parcial.

12.6. Felizmente, em muitos casos não é necessário uma completa regulação. Até agora supusemos de preferência que os estados das variáveis essenciais *E* estavam nìtidamente divididos em "normal" (η) e "letal", de modo que a ocorrência de estados "indesejáveis" era inteiramente incompatível com a regulação. Sucede amiúde, contudo, que o sistema exibe continuidade, de modo que os estados das variáveis essenciais encontram-se ao longo de uma escala de indesejabilidade. Assim, um animal terrestre pode atravessar vários graus de desidratação antes de morrer de sêde; e uma adequada inversão a partir da metade do caminho ao longo da escala pode ser justamente denominada de "reguladora" se salvar a vida do animal, embora possa não ter salvo o animal da aflição.

Destarte, a presença de continuidade torna possível a regulação que, embora não perfeita, é da máxima importância prática. Permite-se a ocorrência de pequenos erros; depois, ao dar sua informação a *R*, êstes tornam possível a regulação contra erros grandes. Tal é a teoria básica, em têrmos de comunicação, do simples regulador de realimentação.

12.7. O leitor poderá achar que demos excessiva atenção ao regulador controlado por êrro, pelo fato de têrmos enunciado com cuidado o que já era bem conhecido. A precisão da proposição é, todavia, aconselhável, pois vamos agora estender o tema do regulador controlado por êrro a um âmbito muito mais amplo que o usual.

Êste tipo de regulador já nos é familiar quando corporificado em uma máquina determinada. Resulta então no servomecanismo, no termostato, no mecanismo homeostático da fisiologia, e assim por diante. Pode, contudo, ser incorporado em uma máquina *não* determinada, dando então origem a uma classe de fenômenos que já não ocorrem comumente na maquinaria industrial, mas que é ocorrência mais usual e da mais alta importância nos sistemas biológicos. O tema será retomado na S.12.11. Entrementes devemos volver-nos para a verificação do que está envolvido nesta idéia de uma máquina "não-determinada".

A MÁQUINA MARKOVIANA

12.8. Iremos considerar agora uma classe de máquinas mais geral do que a estudada nas Primeira e Segunda Partes. (Lògicamente, o assunto deveria ser abordado antes, mas tantas destas Partes concerniam à máquina determinada (i. e., aquela cujas transformações são univalentes) que uma explicação de natureza mais geral poderia causar confusão.)

Uma "máquina" é essencialmente um sistema cujo comportamento é suficientemente duradouro como lei ou repetitivo para nós de modo a permitir que se faça alguma previsão sôbre o que fará (S.7.19). Se uma previsão for possível, esta pode ser uma dentre uma variedade de formas. De uma máquina podemos ser capazes de prever seu próximo estado — diremos então que é "determinada" e é uma das máquinas abordadas na Primeira Parte. Com respeito a outra, poderemos ser incapazes de prever o estado seguinte, mas capazes de prever que, se as condições forem muitas vêzes repetidas, verificar-se-á que as *freqüências* dos vários estados têm certos valores. Esta constância possível nas freqüências já foi indicada na S.9.2. É característica da cadeia de Markov.

Podemos portanto considerar uma nova classe de sistema absoluto: é aquela cujos estados mudam com o tempo não por uma transformação univalente, mas por uma matriz de probabilidades de transição. Para permanecer o *mesmo* sistema absoluto os valores das *probabilidades* devem ser inalteráveis.

Na S.2.10, provamos que uma transformação univalente poderia ser especificada por uma matriz de transições com os 0 e os 1 dentro das celas (dados ali por razão de simplicidade como 0 ou +). Na S.9.4, uma cadeia de Markov era determinada por uma matriz similar contendo frações. Assim um sistema absoluto determinado é um caso especial de uma máquina markoviana; *trata-se da forma extrema de uma máquina markoviana em que tôdas as probabilidades se tornam* 0 ou 1. (Compare S.9.3.)

A "máquina com entrada" era um conjunto de sistemas absolutos, distinguidos por um parâmetro. **A máquina markoviana com entrada** precisa similarmente ser um conjunto de máquinas markovianas, especificadas por um *conjunto* de matrizes, com um parâmetro e seus valores para indicar a matriz a ser usada em qualquer passo particular.

A idéia da máquina markoviana é uma extensão natural da idéia da máquina determinada comum — o tipo considerado no transcurso da Primeira Parte. Se as probabilidades forem tôdas 0 ou 1, então as duas são idênticas. Se as probabilidades estiverem tôdas próximas de 0 ou de 1, obtemos então uma máquina quase determinada quanto ao seu comportamento mas que às vêzes faz a coisa inusitada. À medida que as probabilidades se desviam cada vez mais de 0 ou de 1, o comportamento a cada passo se torna cada vez menos determinado e cada vez mais parecido ao dos insetos considerados na S.9.4.

Caberia notar que a definição, embora permita alguma indeterminação, é ainda absolutamente estrita em certos aspectos. Se a máquina, quando no estado x, vai em 90% das ocasiões para y e em 10% para z, então tais *percentagens* devem ser constantes (no sentido de que as freqüências relativas devem tender àquelas percentagens na medida em que se alonga a seqüência; e os limites devem ser inalterados, na medida em que seqüência segue seqüência). O significado prático disto é que as condições que determinam as percentagens precisam permanecer constantes.

Os exercícios subseqüentes possibilitarão ao leitor alcançar alguma familiaridade com a idéia.

Ex. 1: O pêndulo de um metrônomo oscila regularmente entre dois estados extremos, *D* e *E*, mas quando está à direita (*D*) tem 1% de possibilidade de ficar aí emperrado. Qual é sua matriz de probabilidades de transição?

Ex. 2: Uma máquina determinada α tem a transformação

$$\downarrow \begin{matrix} A & B & C & D \\ B & D & D & D \end{matrix}$$

Uma máquina markoviana β tem a matriz de probabilidades de transição

↓	*A*	*B*	*C*	*D*
A	0	0	0	0
B	0,9	0	0	0
C	0	0	0,2	0
D	0,1	1,0	0,8	1,0

Como diferem seus comportamentos? (Sugestão: Trace o gráfico dos α e o gráfico dos β depois de deixar as probabilidades chegarem a 1 ou 0.)

Ex. 3: Uma máquina markoviana com entrada possui um parâmetro que pode assumir três valores — *p*, *q*, *r* — e tem dois estados, *a* e *b*, com matrizes

(*p*)

↓	*a*	*b*
a	$\frac{1}{2}$	1
b	$\frac{1}{2}$	0

(*q*)

↓	*a*	*b*
a	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$
b	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$

(*r*)

↓	*a*	*b*
a	$\frac{1}{3}$	$\frac{3}{4}$,
b	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{4}$

Ela partiu no estado *b*, e caminha um passo com a entrada em *q*, depois outro passo com a entrada em *r*, e depois outro com a entrada em *p*. Quais são as probabilidades para que a máquina esteja agora em *a* ou *b*?

**Ex.* 4: (Continuação.) Qual a regra geral, utilizando multiplicação de matrizes, que permite que a resposta seja dada em notação algébrica? (Sugestão: Ex. 9.6.8.)

**Ex.* 5: Acople a seguinte máquina markoviana (com estados *a*, *b*, *c*, e estados-entrada α, β)

α:

↓	*a*	*b*	*c*
a	0,2	0,3	0,3
b	.	0,7	0,2
c	0,8	.	0,5

β:

↓	*a*	*b*	*c*
a	0,3	0,9	0,5
b	0,6	0,1	0,5
c	0,1	.	.

à máquina markoviana (com estados *e* e f, e estados-entrada

δ:

↓	*e*	*f*
e	0,7	0,5
f	0,3	0,5

ϵ:

↓	*e*	*f*
e	0,2	0,7
f	0,8	0,3

θ:

↓	*e*	*f*
e	0,5	0,4
f	0,5	0,6

pelas transformações

$$i\downarrow \begin{matrix} a & b & c \\ \epsilon & \delta & \theta \end{matrix} \qquad \downarrow \begin{matrix} e & f \\ \beta & \alpha \end{matrix}$$

Qual é a máquina markoviana (sem entrada) resultante? (Sugestão: Tente mudar as probabilidades para 0 e 1, de modo a tornar o sistema determinado, e siga S.4.8; depois torne as probabilidades fracionárias e siga o mesmo método básico.)

**Ex.* 6: (Continuação.) A nova matriz ainda tem de ser markoviana?

**Ex.* 7: Se *M* é uma máquina markoviana que domina determinada máquina *N*, mostre que a saída de *N* se converteu em cadeia markoviana só depois que *M* chegou ao equilíbrio estatístico (no sentido da S.9.6).

12.9. Se uma dada máquina real se apresenta como markoviana ou determinada dependerá muitas vêzes de quanto da máquina é observável (S.3.11); e às vêzes uma máquina real pode ser tal que uma alteração aparentemente reduzida do intervalo de observação pode ser o bastante para alterar as aparências de uma classe para outra.

Assim, suponhamos que a uma máquina digital de computação esteja ligada uma longa fita magnética com números aleatórios, que são usados em algum processo que a máquina esteja operando. Para um observador impossibilitado de inspecionar a fita, a saída da máquina é indeterminada, mas para um observador que disponha de uma cópia da fita ela é determinada. A pergunta "É esta máquina *efetivamente* determinada?" é pois inadequada e sem sentido, a menos que seja dado exatamente o intervalo de observação do observador. Em outros têrmos, algumas vêzes a distinção entre a máquina markoviana e a determinada só é possível depois de definido o sistema com precisão. (Temos assim mais um exemplo de quão inadequado é definir o "sistema" identificando-o com um objeto real.) Os objetos reais podem proporcionar uma variedade de "sistemas" igualmente plausíveis, os quais são capazes de diferir entre si grosseiramente naquelas propriedades que nos interessam aqui; e a resposta a uma questão particular pode depender em grande parte do sistema ao qual seja eventualmente aplicada). (Compare S.6.22.)

12.10 A estreita relação entre a máquina markoviana e a determinada é também demonstrável pela existência de formas mistas. Suponhamos assim um rato que houvesse aprendido em parte o labirinto, de nove celas, apresentado na Fig. 12.10.1,

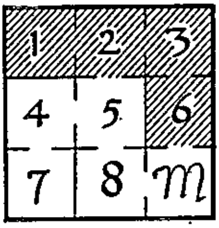


Fig. 12.10.1

onde *M* é a meta. Por razões que não precisamos pormenorizar aqui, o rato não pode obter indícios sensoriais nas celas 1, 2, 3 e 6 (levemente hachuriadas), de modo que, estando numa destas celas, move-se ao acaso para quaisquer outras celas que o labirinto permita. Destarte, se o colocarmos repetidamente na cela 3, irá com igual probabilidade para as celas 2 ou 6. (Admito probabilidade igual por mera razão de conveniência.) Nas celas 4, 5, 7, 8 e M, no entanto, há disponíveis indícios e o rato se move diretamente de cela para cela em direção de M. De modo que, se o colocarmos repetidamente na cela 5,. êle irá sempre para a 8 e depois para M. Tal comportamento não é, *grosso modo,* atípico no trabalho biológico.

A matriz de suas transições pode ser determinada de modo bastante rápido. Assim, de 1 pode ir apenas para 2 (segundo a construção do labirinto). De 2 pode ir para 1, 3, ou 5 com igual probabilidade. De 4 vai, digamos, apenas para 5. De *M* a única transição é para o próprio *M*. Assim a matriz pode ser construída.

Ex.: Construa uma matriz possível de suas probabilidades de transição.

12.11. *Estabilidade.* Submetendo-se a exame uma máquina markoviana verifica-se que ela possui propriedades correspondentes às descritas na Primeira Parte, embora modificadas amiúde de modo óbvio. Assim, será possível construir o gráfico cinemático da máquina, embora como a transformação não é univalente, mais de uma seta possa partir de cada estado. A máquina markoviana

↓	a	b	c
a	0,2	0,3	0,1
b	0,8	0,7	0,5
c	.	.	0,4

apresenta pois o gráfico da Fig. 12.11.1, onde cada seta está acompanhada de uma fração que indica a probabilidade de que tal seta seja atravessada pelo ponto representativo

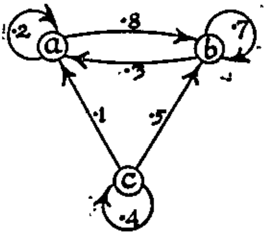


Fig. 12.11.1

Neste exemplo particular pode-se ver que os sistemas em c mais cedo ou mais tarde deixá-lo-ão, para jamais retornar.

Uma máquina markoviana apresenta várias formas de estabilidade que correspondem às mencionadas no Capítulo 5. A **região estável** é um conjunto de estados tal que, uma vez que o ponto representativo tenha penetrado em um estado do conjunto, não mais poderá abandonar o conjunto. Assim a e b acima formam uma região estável.

Um **estado de equilíbrio** constitui simplesmente a região restringida a um único estado. Assim como no sistema determinado tôdas as máquinas que partiram de uma bacia alcançarão um estado de equilíbrio se houver um, do mesmo modo procede a markoviana; e o estado de equilíbrio é às vêzes denominado **estado absorvente.** O exemplo da S.9.4 não tem estado de equilíbrio. Teria adquirido um se tivéssemos adicionado a quarta posição "sôbre um papel pega-môsca", donde o nome.

Em tôrno do estado de equilíbrio, o comportamento de uma máquina na markoviana difere nìtidamente do de uma determinada. Se o sistema apresenta um número finito de estados, então, se estiver em uma trajetória a caminho de um estado de equilíbrio, qualquer sistema individual *determinado* deve chegar ao estado de equilíbrio depois de atravessar uma trajetória particular e, portanto, após um número exato de passos. Assim, no primeiro gráfico da S.2.17, um sistema em *C* chegará a *D*, exatamente em dois passos. Se o sistema fôr markoviano, todavia, não necessitará de um número único de passos; e a duração da trajetória pode ser prevista apenas em média. Suponhamos assim que a máquina markoviana seja

↓	*a*	*b*
a	1	1/2
b	0	1/2

com um estádo *a* de equilíbrio. Iniciemos em *b* um grande número de tais sistemas. Após o primeiro passo, metade terá ido para *a* e metade estará ainda em *b*. No segundo passo, metade daqueles que estão ainda em *b* mover-se-ão para *a* e metade (i. e., um quarto do total) permanecerá em *b*. Continuando dêste modo, verificamos que, daqueles que partiram de *b*

$\frac{1}{2}$ alcança *a* após 1 passo
$\frac{1}{4}$ " " " " 2 passos
$\frac{1}{8}$ " " " " 3 passos

e assim por diante. O tempo *médio* gasto para ir de *b* até *a* é, assim,

$$\frac{\frac{1}{2}\times 1+\frac{1}{4}\times 2+\frac{1}{8}\times 3+\ldots}{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots}=2 \text{ passos.}$$

Algumas das trajetórias serão muito mais longas do que 2 passos.

Como bem sabemos agora, um sistema em tôrno de um estado de equilíbrio comporta-se como se "buscasse a meta", sendo o estado a meta. Um fenômeno correspondente aparece no caso markoviano. Aqui, em vez do sistema se dirigir de modo determinado à meta, parece vagar, de modo indeterminado, entre os estados, movendo-se sistemàticamente para outro, quando não no estado de equilíbrio, e parando igualmente de modo sistemático lá quando encontra por acaso êste estado. O estado ainda parece ter a relação de "meta" com o sistema, mas o sistema parece chegar lá tentando uma seqüência de estados ao acaso e depois parando ou se movendo conforme o estado alcançado. Assim, *as propriedades objetivas de obter êxito por tentativa e êrro aparecem quando uma máquina markoviana se move para um estado de equilíbrio.*

Neste ponto vale dizer que o nome comum "tentativa e êrro" é tão enganador quanto pode sê-lo. "Tentativa" está no singular, embora a essência do método seja que as tentativas prosseguem sempre. "Êrro" também é mal escolhido, pois o elemento importante é o êxito ao fim. "Perseguir e prender" parece descrever o processo de modo mais vívido e mais preciso. Usá-lo-ei de preferência ao outro.

O movimento rumo à meta pelo processo de perseguir e prender é destarte *homólogo,* devido a S.12.8, ao movimento através de uma trajetória determinada, pois ambos são o movimento de uma máquina para um estado de equilíbrio. Com cuidado, podemos aplicar o mesmo conjunto de princípios e argumentos a ambos.

Ex. 1: Que estados de equilíbrio possui o sistema do Ex. 12.10.1?

Ex. 2: Uma máquina markoviana tem a seguinte matriz

↓	*a*	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*
a	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	.	.	.	.
b	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	.	.	.	.
c	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	.	.	.	.
d	.	.	1	.	.	.
e	.	.	.	1	.	.
f	.	.	.	.	1	1

Em várias oportunidades partiu de *a;* como seria descrito o seu comportamento na linguagem da psicologia de rato e labirinto?

REGULAÇÃO MARKOVIANA

12.12. A progressão de uma única máquina markoviana para um estado de equilíbrio é muito menos ordenada do que a de uma máquina determinada, de modo que o tipo markoviano é pouco usado nos reguladores de indústria. Em comparação com a regulação suave e direta de um servomecanismo comum êle deve parecer realmente tateante. No entanto, os organismos vivos se utilizam livremente dêste método mais geral, pois uma máquina que o usa é, no todo, muito mais fàcilmente construída e mantida; pela mesma razão tende a ser menos transtornada por pequenas lesões. É, de fato, empregada amiúde para muitas regulações simples onde não são de importância velocidade e eficiência.

Um primeiro exemplo ocorre quando o ocupante de um quarto deseja regular o número de môscas no aposento, reduzindo-as, ou quase, a zero. A colocação de um papel pega-môscas em um local adequado não causa mudança *determinada* no número de môscas. Não obstante, o único estado de equilíbrio para cada môsca acha-se agora "sôbre o papel" e o estado de equilíbrio para o "número de môscas que não se acham sôbre o papel" é zero. O método é primitivo mas tem a grande virtude de exigir pouco e de funcionar bastante bem na prática.

Método similar de regulagem é o usado amiúde pelo golfista à procura de uma bola perdida em uma área que sabidamente deve contê-la. Os estados são suas posições na área e sua regra é, para todos os estados menos um, "continue andando"; para um, entretanto, ela é "pare de andar". Embora não talvez ideal, o método é não menos capaz de proporcionar uma regulação simples.

Outro exemplo de regulação, de baixa ordem de eficiência, surgiria no caso de um rato com séria lesão cerebral que não consegue lembrar-se de parte alguma de um labirinto, mas reconhece o alimento ao encontrá-lo, detendo-se então para comer. (Compare seu comportamento com o do um rato que não pára diante da comida.) Sua progressão seria em larga medida ao acaso, provàvelmente com a repetição de alguns erros; no entanto, seu comportamento denota uma forma rudimentar de regulação, pois, encontrando o alimento, há de deter-se para ingeri-lo, e por isso viverá, enquanto o outro rato continuará caminhando e morrerá de fome.

Ex. 1: Um casal decide ter filhos até que nasça um menino. (i) O processo é regulatório? (ii) Qual é a matriz das probabilidades de transição?

Ex. 2: O jôgo "Cara, eu ganho; Coroa, jogamos de nôvo" é regulatório?

12.13. Até agora consideramos apenas o modo pelo qual uma máquina markoviana se move para sua meta. Em princípio, sua única diferença de uma máquina determinada é que sua trajetória não é única. Desde que tenhamos em mente esta diferença, a regulação pela máquina markoviana pode receber a aplicação de todos os conceitos que desenvolvemos nos capítulos anteriores desta Parte.

(A advertência feita na S.11.11 (§ 5) deve permanecer em mente. Os passos que conduzem à máquina markoviana ao longo de sua trajetória são de uma ordem de grandeza menor do que a dos passos que separam um ato de regulação (um "movimento" no sentido da S.11.3) de outro. Os passos do último correspondem a uma mudança de uma para outra trajetória — o que é inteiramente diverso da mudança de um ponto para o seguinte ao longo de uma trajetória.)

Assim a formulação básica de S.11.4 é compatível com máquinas determinadas ou markovianas em T e R a fim de proporcionar o resultado real. Nenhuma diferença em princípio existe, embora, se descrevermos séu comportamento em têrmos psicológicos ou antropomórficos, as descrições possam parecer muito diferentes. Dêste modo, se R fôr levado (para dada perturbação) a mostrar seu poder regulador indo para algum estado, então um R determinado irá a êle diretamente, como se soubesse o que pretende, enquanto um R markóviano parecerá estar à procura dêle.

A máquina markoviana é utilizável, assim como a determinada, como um meio de contrôle; pois os argumentos da S.11.4 aplicam-se a ambas (preocupavam-se apenas com quais os resultados obtidos e não *como* eram obtidos.) Assim empregada, oferece a desvantagem de ser incerta em sua trajetória, tendo no entanto a vantagem de ser fàcilmente projetada.

12.14. *Regulação por vetador* (*vetoer*). A formulação básica de S.11.4 é de aplicabilidade extremamente larga. Talvez seu caso particular mais importante suceda quando T e R são máquinas (determinada ou markoviana) e quando os valores de E dependem dos vários estados de equilíbrio que T possa alcançar, com η como algum estado (ou estados) dotado de alguma propriedade adequada ou desejada. A maioria dos reguladores físicos são dêste tipo. Se R e T forem máquinas markovianas, é possível levar ràpidamente T a um desejado estado de equilíbrio η pela ação de R, se se tirar vantagem do fato fundamental de que, se duas máquinas (tais como pressupomos agora que T e R sejam) são acopladas, o conjunto só pode achar-se em estado de equilíbrio quando cada parte está por sua vez em estado de equilíbrio, nas condições proporcionadas pela outra. A tese foi enunciada na S.5.3 para a máquina determinada, mas vale igualmente para a markoviana.

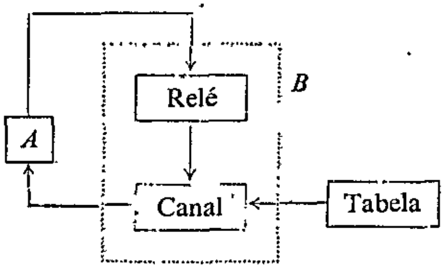
Seja o regulador R construído como segue. Que lhe seja dada uma entrada que pode assumir dois valores, β e γ. Quando sua entrada fôr β (para "mau") que *nenhum* estado seja de equilíbrio, e quando sua entrada fôr γ (para "bom") que todos se encontrem em equilíbrio. Agora, acople-o a T de modo que todos os estados em η sejam transformados, à entrada de R, no valor γ, e todos os outros no valor β. Que o todo siga alguma trajetória. Os únicos estados de equilíbrio a que o conjunto pode dirigir-se são os que têm R em estado de equilíbrio (pela S.5.13); mas isto implica que a entrada de R deve estar em γ e isto implica que o estado de T deve estar em um de η. Assim, a construção de R torna-o vetador de todos os estados de equilíbrio em T salvo os em η. O conjunto é pois regulatório; e como T e R são no caso markovianos, o conjunto parecerá estar em busca de um estado "desejável", e se apegará a êle quando encontrá-lo. R estará "dirigindo", pode-se considerar, a busca de T.

(A possibilidade de que T e R sejam apanhados em uma região estável que não contenha estados em η pode tornar-se tão pequena quanto queiramos, fazendo-se R grande, isto é, dando-lhe uma porção de estados e providenciando para que sua matriz β seja abundantemente concentrada, de modo que a partir de qualquer estado R tenha alguma probabilidade não-nula de passar para qualquer outro estado.)

Ex. 1: O que, resumidamente, deve caracterizar a matriz e o que deve caracterizar β?

**Ex.* 2: Mostre que a tese de S.5.13 é igualmente verdadeira para a máquina markoviana.

12.15. *O homeostato.* Desta forma nos é dado chegar a um outro ponto de vista sôbre o homeostato. Na S.5.14 (que o leitor deveria reler) estudamo-lo como um todo que passou para um equilíbrio, mas lá consideramos como dados e conhecidos nas chaves de interruptores os valores a serem soldados. Assim, o comportamento de B estava determinado. Podemos, entretanto, redefinir o homeostato de maneira a incluir o processo mediante o qual os valores na *Tabela de Números Aleatórios* de Fisher e Yates atuavam como determinantes (como certamente faziam). Se agora ignorarmos (i. e., tomarmos como dados) as resistências bobinadas nos comutadores, então será possível encarar a parte B (da S.4.14) como composta de um relé e apenas um canal, aos quais chegam valores da *Tabela*. *B* agora se nos afigura com duas entradas.



O estado de *B* continua sendo um vetor com duas componentes — um valor fornecido pela *Tabela* e o estado do relé (excitado ou não). Para um Observador que não possa observar a *Tabela, B* é markoviano (confronte a S.12.9). Sua entrada a partir de *A* tem dois estados, β e γ; e foi construído de tal maneira que, em β, nenhum estado é de equilíbrio, enquanto em γ todo estado o é. Finalmente, acopla-se como na S.5.14.

O conjunto é agora markoviano (enquanto a *Tabela* não é observada). Chega a um equilíbrio (como na S.5.14), mas parecerá, por ora, a êste Observador, encaminhar-se a êle pelo processo de perseguir e prender, procurando, aparentemente ao acaso, o que deseja e retendo-o quando o consegue.

Vale notar que, enquanto a entrada do relé se acha em β, a variedade na *Tabela* é transmitida a *A;* mas quando a entrada alcança γ, a transmissão é interrompida. O relé atua assim como uma "torneira" para o fluxo de variedade que provém da *Tabela* e vai para *A*. O conjunto move-se para um estado de equilíbrio, que deve ser um estado em que a entrada de variedade da *Tabela* está bloqueada. Passou agora a um estado tal que a entrada de variedade da *Tabela* (que o deslocaria do estado) é evitada. Assim o conjunto como que se encerra a si mesmo nesta condição. (Exemplifica destarte a tese da S.4.22.)

12.16. O exemplo da seção anterior mostrava a regulação em curso em um sistema que é em parte determinado (as interações entre os magnetos em A) e em parte markoviano (os valores tomados pelo canal na parte B). O exemplo denota a uniformidade e generalidade essenciais dos conceitos empregados. Mais tarde desejaremos usar esta generalidade à vontade, de modo que amiúde não precisaremos efetuar a distinção entre determinado e markoviano.

Outro exemplo de regulação mediante um sistema markoviano é digno de consideração por ser bastante conhecido. As crianças brincam de "Quente ou Frio?" Um dos participantes (chame-o Tom para T) recebe uma venda sôbre os olhos. Os outros colocam então algum objeto em um dentre uma variedade de lugares, e assim iniciam o distúrbio D. Tom pode recorrer às mãos para descobrir o objeto, e tenta fazê-lo, mas o resultado tende a ser um malôgro. O processo torna-se em geral regulatório pela parceria de Rob (para R), que vê onde o objeto se localiza (entrada de D) e que pode dar informação a Tom. Êle o faz através da convenção de que o objeto está emitindo calor, e informa a Tom de como isso seria sentido por Tom: "Está frio; ainda frio; ficando um pouco mais quente; não, está esfriando de nôvo...". E as crianças (se muito novas) se comprazem em verificar que o processo é na realidade regulatório, portanto Tom é sempre conduzido por fim à meta.

No caso, por certo, Tom é que é markoviano, pois vagueia, a cada passo seguinte, algo ao acaso. O comportamento de Rob é mais determinado, pois visa dar uma codificação precisa da posição relativa.

A regulação que utiliza maquinaria markoviana pode portanto ser agora encarada como familiar e ordinária.

REGULAÇÃO DETERMINADA

1.17. Abordado o caso em que T e R se incorporam em máquinas e considerado o caso em que a maquinaria é markoviana, podemos retomar o fio abandonado na S.12.7 e particularizar mais, examinando o caso em que tôdas as probabilidades se tornaram 0 ou 1 (S.12.8), de forma que a maquinaria é determinada. Continuamos com o regulador controlado por êrro. Com o fito de, como biólogos, explorar cabalmente as formas mais primitivas de regulação, consideremos o caso em que a realimentação tem uma variedade de apenas dois estados.

Um exemplo de tal sistema ocorre no centro telefônico quando um seletor começa a buscar uma linha desocupada. O seletor tenta uma de cada vez, numa ordem determinada, obtendo de cada uma por vez a informação "ocupado" ou "desocupado", e pára (chega a um estado de equilíbrio) na primeira linha desocupada. No caso o conjunto de distúrbios é o conjunto das possíveis distribuições de "ocupado" ou "desocupado" entre as linhas. O sistema é regulatório porque, não importa a perturbação, o resultado está sempre em conexão com a linha desocupada.

O mecanismo é conhecido como sendo controlado por êrro, pois a informação que determina se irá mover-se ou fixar-se provém da própria linha.

Êste caso é simples a ponto de ser algo degenerado. Se não prestarmos atenção às ações internas entre *R* e *T*, de modo que se misturem para formar o *F* de S.10.5, então o caso torna-se simplesmente o de um sistema determinado que, dado o estado inicial, percorre uma certa trajetória em direção a um estado de equilíbrio. Assim cada bacia com um estado de equilíbrio em η, apresenta, podemos afirmar, uma forma simples de regulação; pois atua de modo a reduzir a variedade nos estados iniciais (como perturbações *D*) à variedade menor no estado final.

O mesmo, em boa parte, pode ser dito acêrca do camundongo que conhece o seu caminho no armazém; pois onde quer que vá consegue encontrar seu caminho de volta à toca. Outro tanto é verdade para o computador programado para funcionar por um método de aproximação sucessiva; pois, qualquer que seja o valor do qual partia, os valores sucessivos são movidos de modo determinado para a meta, que é o seu único estado de equilíbrio.

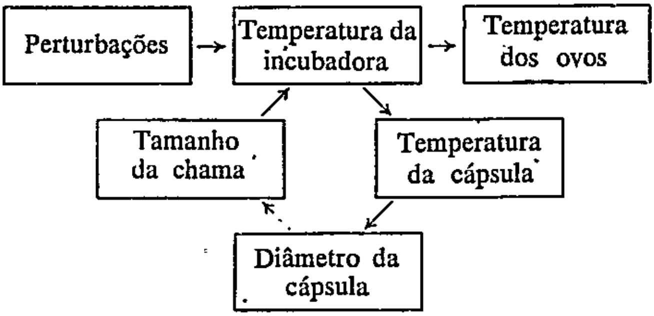
Ex.: É preciso descobrir uma carta em um maço embaralhado de 52 cartas, examinando-as uma a uma. Quantas terão de ser examinadas, em média, se (i) as cartas são examinadas em série, uma após a outra, (ii) se uma é retirada, examinada, devolvida se não desejada, e o maço embaralhado, e outra carta retirada, e assim por diante? (Procura sistemática *versus* procura ao acaso.)

12.18. Quando a maquinaria fôr tôda determinada, pode aparecer o problema da S.12.14 — o de levar T a algum estado de equilíbrio que possua alguma propriedade desejada. Quando isso acontece, a solução aqui fornecida para a máquina markoviana é, sem dúvida, ainda válida: acopla-se a um vetador.

12.19. *Variação contínua.* Depois destas formas primitivas, chegamos aos reguladores cujas variáveis podem variar continuamente. (Temos de lembrar que o contínuo é um caso especial do discreto, devido à S.2.1.) Dentre os grandes números existentes podemos tomar apenas um ou dois a título de menção, pois estamos interessados aqui sòmente em seus princípios gerais.

Um caso típico é o da incubadora aquecida a gás. Ela contém uma cápsula que se dilata com o aumento da temperatura. O mecanismo é regulado de tal modo que a dilatação da cápsula reduz o tamanho da chama do gás (ou a quantidade de ar quente que entra na incubadora); evita-se assim um indevido aumento da temperatura.

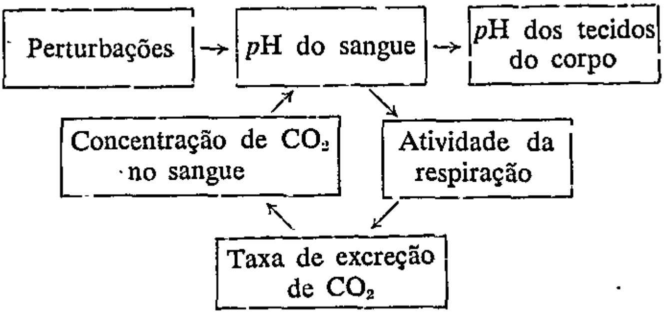
O diagrama dos efeitos imediatos é especialmente digno de nota. É:



ou alguma forma equivalente. Nêle, D, T, R e E são prontamente identificados (embora sejam algo arbitrárias as distinções entre T e R e suas partes). O todo atua para bloquear a passagem da variedade a partir das Perturbações (quaisquer que sejam) para os ovos. Se o objetivo do regulador fôr ligeiramente redefinido como sendo o manter constante a temperatura da incubadora, então o regulador será controlado antes pelo êrro do que pelas próprias perturbações.

Nesta forma de regulador, o sistema precisa, sem dúvida, ser estável para qualquer perturbação dada, e a temperatura desejada deve ser o estado de equilíbrio do sistema. A realimentação em tôrno do circuito deve ser assim usualmente negativa.

Muitos reguladores no corpo vivo são desta forma simples, e a obra de Cannon os tornou bem conhecidos. Típico é aquêle que regula o *p*H do sangue pela quantidade de bióxido de carbono nêle contido:



Mais uma vez o sistema apresenta as características que acabamos de mencionar.

Entre os inumeráveis exemplos de tais mecanismos, cumpriria incluir o econômico. O livro *Mecanismo dos Sistemas Econômicos,* de Tustin, mostra quão ìntimamente estas propriedades se ligam às aqui discutidas.

Ex. 1: Desenhe um diagrama dos efeitos imediatos de qualquer regulador que você conheça.

Ex. 2: (Continuação.) Pense em alguns outros parâmetros cuja mudança afetaria o funcionamento do regulador; adicione-os ao diagrama.

12.20. Para fins de completude, vale mencionar uma variante desta classe, na qual o mecanismo de regulação torna-se ativo apenas de modo intermitente.

Um reservatório, por exemplo, pode manter o seu nível de fluido entre os dois níveis dados graças a um sifão que tem a sua abertura interna no nível mais baixo e é curvado ao nível superior. Se o suprimento fôr comumente maior do que a demanda, o sifão, entrando em ação quando o fluido atinge o nível superior e cessando quando atinge o inferior, manterá o nível dentro do intervalo desejado.

Muitos reguladores fisiológicos atuam de modo intermitente. A tremedeira como reação ao frio é um dêstes casos. Esta reação particular é de especial interêsse para nós (compare S.12.4), porquanto a atividade no regulador pode ser suscitada ou por uma queda efetiva na temperatura corporal (contrôle por êrro, de *E*) ou, antes que o corpo tenha tido tempo de esfriar, pela visão de coisas que trarão o frio (contrôle a partir de *D*).

O AMPLIFICADOR DE POTÊNCIA

12.21. O fato de a discussão neste capítulo ter-se referido de modo usual à saída *E* como sendo *constante* não deve obscurecer o fato de que esta forma pode abranger um grande número de casos que, à primeira vista, não têm em si elemento de constância. O assunto foi tratado na S.11.15. Agora consideraremos uma aplicação que já é importante de muitos modos e que será necessária como referência quando chegarmos ao Capítulo 14. Referimo-nos àqueles reguladores e controladores que amplificam potência.

Há várias formas de amplificadores de potências. Descreveremos aqui apenas uma, selecionada por ser simples e clara (Fig. 12.2.1).

Em *A* há um suprimento à vontade de ar comprimido, que passa pelo estrangulador *C* antes de ou se dirigir para o fole *B* ou de escapar pela válvula *V*. A pressão em *A* é muito mais elevada do que a costumeira pressão em *B*, e a abertura em *C* é pequena, de modo que o ar flui através de *C* a uma taxa regularmente constante. Deve então ou escapar em *V* ou se acumular em *B*, elevando a pressão *z*. A rapidez com que o ar escapa em *V*, onde um orifício é obstruído em certo grau por um cone, depende do movimento do cone para cima ou para baixo (x), estando o cone ligado a um extremo de uma leve barra rígida *J*, que pode girar sôbre um pivô *K*. Assim, se *K* fôr imóvel, um movimento para baixo no outro extremo *L* erguerá o cone e permitirá que o ar escape, provocando uma queda da pressão *z* dentro de *B*; inversamente, um movimento para cima em *L* fará *z* subir.

A pressão do ar em *B* atua em oposição a um pêso *P*, que continua para cima como um pilar, sendo dado ao pêso todo mover-se apenas para cima ou para baixo. O pilar

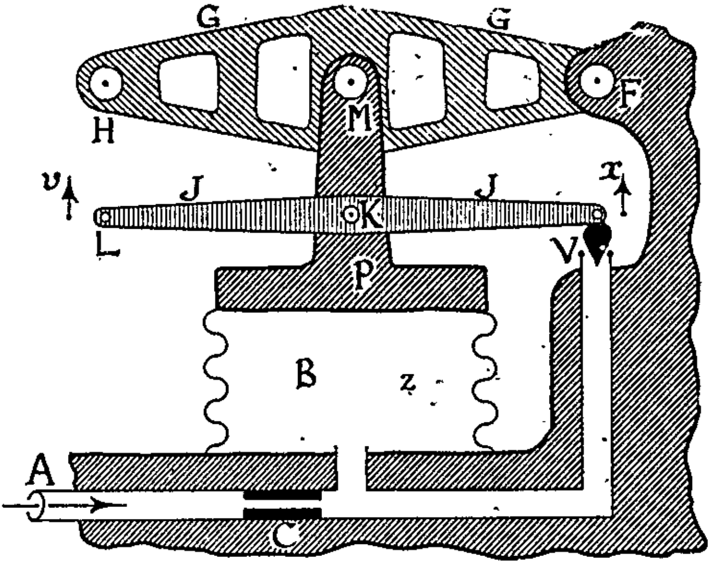


Fig. 12.21.1

contém dois pivôs, *K* e *M*. *M*. é o pivô de uma pesada barra *G*, fixada em uma extremidade, *F*. Assim, se *P* se desloca para cima, *M* tem de deslocar-se para baixo na mesma medida e a extremidade livre de *G*, *H*, deve mover-se para cima com o duplo da distância.

Vejamos agora o que acontece se *L* é movido. Suponhamos que o operador suspenda *L* de 20 milímetros. A outra extremidade *(V)* cai imediatamente de 20 milímetros, a válvula fica mais obstruída, menos ar escapa e acumula-se mais ar em *B*, elevando a pressão. A pressão aumentada erguerá *P* e, portanto, *M* e *H*. Assim, *os movimentos de H tendem simplesmente a copiar os de L.* (Cumpre notar que o movimento para cima de *P* — fixado *L* após sua suspensão de 20 milímetros — levará a válvula *V* a abrir-se, de modo que a resposta do sistema inteiro ao movimento de *L* será autolimitadora, pois a realimentação é negativa; sujeito a certos detalhes quantitativos, que exigiriam tratamento exato em qualquer corporificação particular, o sistema é pois estável em um estado de equilíbrio cuja posição é determinada pela posição de *L*.)

O conjunto pode ser, dêste modo, considerado como um sistema estável que atua de tal maneira que, enquanto um movimento de, digamos, 20 milímetros em *L* tenderia a causar, em *V*, um movimento de 20 milímetros também, a reação do sistema anula isto. Nestas condições, é possível encará-lo como um sistema *que atua de maneira a manter a posição de* V *constante.*

Vê-se agora como um sistema pode converter-se em amplificador de potência e ser usado como guindaste.

O projetista toma o cuidado de fazer com que a alavanca *J* seja leve, e que a válvula apresente uma forma tal que o ar escapante, ou a pressão *z*, tenha pouco efeito sôbre a fôrça requerida em *L*. Deve cuidar também para que *B* disponha de larga área de ação sôbre *P* e que a pressão média de funcionamento *z* seja alta (com a pressão em *A* mais elevada ainda). Se fôr bem sucedido; uma pequena fôrça em *L*, alçando-o por 20 mm, bastará para provocar uma grande fôrça em *H* suficiente para erguer uma pesada massa na mesma distância. Assim a fôrça de 1 kg movendo de 20 mm em *L*, pode resultar em uma fôrça de 2 ton. a deslocar-se de 20 mm em *H*. Trata-se portanto de um amplificador de trabalho (ou potência).

Até agora demos apenas uma simples e clara exemplificação dos princípios de regulação e contrôle descritos antes. Mais adiante (S. 14.1) voltaremos a isto, pois teremos de ser explícitos sôbre como podemos ter, simultâneamente, uma lei segundo a qual a energia não pode ser criada e um *amplificador* de potência.

Ex. 1: Quantos graus de liberdade para movimento possuem os três corpos *P*, *J*, *G*?

Ex. 2: Modifique o arranjo de modo a levar *H* a mover-se contràriamente a *L* mantendo ao mesmo tempo o equilíbrio estável.

Ex. 3: Modifique o arranjo de modo que o equilíbrio seja instável.

JOGOS E ESTRATÉGIAS

12.22. Os temas de regulação e contrôle são extremamente extensos e tudo quanto foi dito até agora apenas dá início ao assunto. Outro ramo ponderável da matéria surge quando *D* e *R* são vetores. e quando o componedor que leva eventualmente ao resultado em T ou E é de tal modo distribuído no tempo que as componentes de D e R ocorrem alternadamente. Neste caso todo o distúrbio apresentado e a resposta inteira provocada consistem cada qual de uma seqüência de subdistúrbios e sub-respostas.

Assim, por exemplo, será o caso na vida selvagem se uma prêsa tenta controlar o ataque de um rapinante, quando a luta tôda evolui por estágios alternados de ameaça e defesa. No caso todo, o ataque do rapinante consiste de uma seqüência de ações D_1, D_2, D_3, ..., cada qual suscitando uma resposta, de tal modo que a resposta inteira é também uma seqüência R_1, R_2, R_3, ... A luta total consiste portanto da dupla seqüência

$$D_1, R_1, D_2, R_2, D_3, R_3 \ldots$$

O resultado dependerá de alguma relação entre o ataque completo do rapinante e a resposta completa da prêsa.

Estamos considerando agora uma interpretação ainda mais complexa da formulação básica da S.11.4. Ela é todavia bastante corriqueira no mundo biológico. Trata-se, na sua forma real, da Luta da Vida; na sua forma matemática, da Teoria dos Jogos e Estratégias. Assim, em uma partida de xadrez, o resultado depende da seqüência particular produzida pelas jogadas das Brancas e das Pretas

$$B_1, P_1, B_2, P_2, B_3, P_3, \ldots$$

(O que foi denominado "movimento" na S.11.4 corresponde, é claro, a uma jogada aqui.) Esta teoria, bem fundamentada por von Neumann nos anos de 30, embora ainda não inteiramente desenvolvida, já é demasiado extensa para mais do que uma simples menção. Cumpre, entretanto, notar sua íntima e exata relação com o assunto dêste livro. Será indubitàvelmente de grande importância científica na biologia; pois as características inatas dos organismos vivos são simplesmente as estratégias que se comprovaram satisfatórias durante séculos de competição, e se implantaram no animal jovem de maneira a estarem prontas para uso à primeira exigência. Assim como muitos jogadores têm encontrado em P-4D uma boa abertura na partida de xadrez, do mesmo modo muitas espécies descobriram ser "Criar dentes" uma boa forma de abertura na Luta da Vida.

A relação entre a teoria dos jogos e os assuntos tratados neste livro pode ser mostrada com precisão.

O primeiro fato é que a formulação básica da S.11.4 — a Tabela de Resultados, em que se baseou a teoria da regulação e contrôle — é *idêntica* à "matriz de pagamento", fundamental na teoria dos jogos. Utilizando êste conceito usual, ambas as teorias podem apresentar de imediato sua exata relação nos casos especiais.

O segundo fato é que a teoria dos jogos, tal como a formularam von Neumann e Morgenstern, é isomorfa a certas máquinas com entrada. Consideremos a máquina equivalente ao jôgo generalizado de von Neumann (Fig. 12.22.1). (Na Figura, as letras correspondem às empregadas por von Neumann no Capítulo 2 de seu livro, que vale consultar; seus T não correspondem aos utilizados em nosso livro.)

Existe uma máquina M com entrada. Sua estrutura interna (suas transformações) é conhecida dos jogadores, T_i. Ela possui três tipos de entradas: Γ, V e T. Uma parâmetro Γ, um comutador talvez, determina a estrutura que ela deverá ter, isto é, qual a partida a ser jogada. Outras entradas V_i permitem lances ao acaso (e. g., efeitos da roleta ou do maço de cartas embaralhadas a serem introduzidos; cf. S. 12.15). Cada jogador, T_i, é um sistema dinâmico determinado, acoplado de ambos os modos a M. Recebe a informação de M por canais especificados I_i, e a seguir atua determinadamente sôbre M. O sítio de conexão

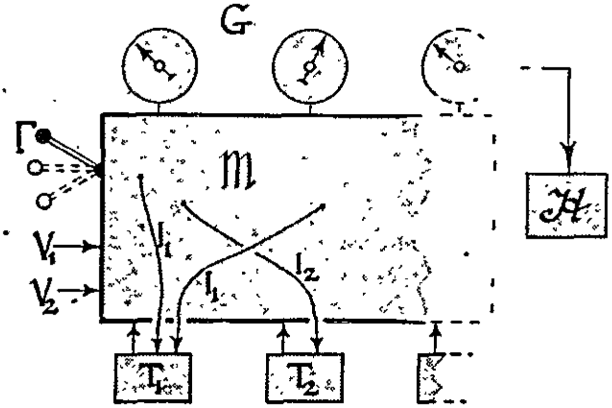


Fig. 12.22.1

dos I é definido por Γ. Os efeitos de cada T, juntamente com os dos outros T e os V, exercem, através de M, contrôles complexos sôbre os mostradores G. Quando a partida, i. e., a trajetória, é completada, o árbitro $\mathcal{H}$ lê os G e então efetua os pagamentos correspondentes aos T.

Temos aqui, evidentemente, o caso de vários reguladores, cada qual tentando alcançar uma meta em G, funcionando simultâneamente e interatuando competitivamente com M. (A possibilidade de competição entre reguladores não foi até agora considerada de modo explícito nos capítulos.)

Se o sistema fôr ultraestável, cada comportamento dos T será determinado por parâmetros que se comportam como funções escalonadas. Se um jogador particular ficar "satisfeito" com o pagamento de $\mathcal{H}$, seus parâmetros irão reter seus valores e sua estratégia não mudará; mas se ficar insatisfeito (i. e., se o pagamento cai abaixo de algum valor crítico) as funções escalonadas hão de mudar de valor e o perdedor, na partida seguinte, usará nova estratégia.

Um assunto correlato é a teoria das codificações e decodificações militares. A obra, *Communication theory of secrecy systems,* de Shannon, mostrou quão ìntimamente se relacionam êstes vários aspectos. Quase todo avanço no conhecimento de um dêles lança luz sôbre os outros.

Mais do que isso não se pode dizer no momento, pois os relacionamentos precisam ainda ser explorados e desenvolvidos. Parece estar claro que a teoria da regulação (que inclui numerosos problemas importantes de organização no cérebro e na sociedade) e a teoria dos jogos terão muito a aprender uma da outra. Se o leitor acha que semelhantes estudos são algo abstratos e desprovidos de aplicação, deverá refletir sôbre o fato de que as teorias dos jogos e da cibernética são meramente os fundamentos da teoria de Como encontrar seu Próprio Caminho. Poucos aspectos podem ser mais ricos em aplicações do que êste!

12.23. Chegamos agora ao fim do capítulo, e o biólogo sente-se algo descontente, pois o capítulo tratou apenas de sistemas que eram bastante reduzidos e manejáveis para serem entendidos. O que sucede, cabe-lhe perguntar, quando a regulação e o contrôle são tentados em sistemas de tamanho e complexidade biológicos? O que ocorre, por exemplo, quando intentamos regulação e contrôle no cérebro ou na sociedade humana?

A discussão desta questão ocupará os capítulos restantes.

Regulação do Sistema Muito Grande

13

13.1 A regulação e o contrôle no sistema muito grande são de particular interêsse para o pesquisador em qualquer das ciências biológicas, pois a maioria dos sistemas com que lida são complexos e compostos de um número quase incontável de partes. O ecologista pode querer regular a incidência de uma infecção em um sistema biológico de grande porte e complexidade, com clima, solo, reações de hospedeiro, predadores concorrentes e muitos outros fatôres a desempenhar um papel. O economista talvez deseje controlar a tendência para a baixa em um sistema onde preços, disponibilidade de trabalho, demanda de consumo e custos de matérias-primas constituem apenas alguns dos fatôres em jôgo. O sociólogo depara-se com uma situação similar. E o psicoterapeuta intenta regular o funcionamento de um cérebro enfêrmo, da mesma ordem de tamanho do que seu próprio e de terrível complexidade. Tais regulações são, é óbvio, muito diferentes das que foram examinadas nos mecanismos simples do capítulo anterior. À primeira vista, parecem tão diferentes que cabe muito bem perguntar se o que foi dito até aqui não é em essência inaplicável.

13.2. Isto, entretanto, não é assim. Repetindo o que dissemos na S.4.18, muitas das proposições antes estabelecidas foram enunciadas numa forma que torna irrelevante o tamanho do sistema. (Às vêzes o número de estados ou o número de variáveis pode estar em causa, mas de modo tal que a proposição permanece verdadeira independentemente do número efetivo.)

A regulação em sistemas biológicos certamente suscita problemas difíceis — isto se pode admitir livremente. Mas tomemos cuidado, ao admiti-lo, para não atribuir a dificuldade à fonte errada. A grandeza em si não é a fonte; tende a ser assim considerada em parte porque sua notoriedade capta o ôlho e em parte porque variações em tamanho costumam correlacionar-se com variações na fonte da dificuldade real. A causa principal da dificuldade, em geral, *é a variedade nas perturbações contra a qual é preciso fazer a regulação.*

O tamanho do sistema dinâmico que corporifica T tende a relacionar-se com a variedade em D por muitas razões. Se T fôr constituído de muitas partes, e houver incerteza acêrca do estado inicial de qualquer parte, então essa variedade será conferida a D (S.11.19); portanto, em geral, sendo outras coisas iguais, quanto maior o número de partes, tanto maior a variedade em D. Em segundo lugar, se cada parte não fôr completamente isolada do mundo ao seu redor, a entrada de cada parte contribuirá com alguma variedade, que por sua vez será consignada a D; assim, em geral, quanto maior o número de partes tanto maior o número de componentes em D; e portanto, se as componentes tiverem alguma independência, tanto maior será a variedade em D. (Outras razões são possíveis, mas estas bastam.)

Assim, quando os efeitos do tamanho são distinguíveis dos que afetam a variedade em D, verificar-se-á comumente que o primeiro é, por si, irrelevante, e o que importa é o último.

Segue-se agora que, quando o sistema T é muito grande e o regulador R muitíssimo menor (um caso comum na biologia), a lei da Variedade Requerida provàvelmente desempenha um papel dominante. Sua importância reside no fato de que, se R fôr fixo na sua capacidade de canal, a lei impõe um limite absoluto para a quantidade de regulação (ou contrôle) que é dado a R conseguir, não importando qual o rearranjo interno de R ou quão grande é a oportunidade em T. Dêsse modo, o ecologista, se sua capacidade como um canal fôr invariável, talvez consiga, no melhor dos casos, tão-sòmente uma fração daquilo que gostaria de obter. Esta fração pode ser utilizada de vários modos -- talvez decida controlar mais erupções que expansões, ou infecções a vírus de preferência a bacilares — mas a *quantidade* de contrôle que lhe é dado exercer continua limitada. Do mesmo modo, o economista talvez tenha de decidir a que aspecto há de devotar suas fôrças e o psicoterapeuta, que sintomas deverá negligenciar e quais deverá controlar.

A mudança no ponto de vista aqui sugerido não difere da introduzida em estatística pela obra de Sir Ronald Fisher. Antes dêle, supunha-se que, por mais hábil que fôsse o estatístico, outro mais hábil poderia extrair mais informação dos dados. Mas êle provou que qualquer extração dada de informação possuía um máximo, e que o dever do estatístico era simplesmente aproximar-se do máximo — além disso homem algum poderia ir. Similarmente, pensava-se, antes do trabalho de Shannon, que todo canal, com um pouco mais de perícia, poderia sofrer mudança a fim de transportar um pouco mais de informação. Shannon mostrou que o dever do engenheiro é acercar-se razoàvelmente do máximo, pois além pessoa alguma pode ir. A lei da Variedade Requerida impõe uma estratégia semelhante ao suposto regulador e controlador: incumbe-lhe tentar aproximar-se de seu máximo — além do qual não lhe é dado ir. Abordemos portanto o sistema muito grande sem quaisquer idéias disparatadas do que seja alcançável.

13.3. Antes de prosseguirmos, cumpriria notar que, quando um sistema é muito grande, a distinção entre *D*, a fonte dos distúrbios, e *T*, o sistema que fornece o resultado, pode ser um tanto vaga, no sentido de que é possível amiúde traçar a fronteira de diversos modos, igualmente satisfatórios.

Esta flexibilidade é em particular pronunciada entre os sistemas que ocorrem nesta terra (pois os sistemas terrestres tendem marcadamente a apresentar certas características gerais). Nesta terra, o sistema dinâmico ecológico e biológico em conjunto tende a consistir de muitos subsistemas frouxamente acoplados (S.4.20); e os subsistemas por sua vez tendem a compor-se de sistemas ainda menores, mais uma vez estritamente acoplados por dentro, ainda que menos estreitamente acoplados uns aos outros; e assim por diante. Destarte, em um rebanho, o acoplamento entre seus membros é muito mais frouxo do que os acoplamentos dentro de um membro e entre suas partes (e. g., entre suas quatro patas); e as quatro patas não se encontram tão intimamente acopladas umas com as outras quanto as moléculas no interior de um osso. Assim, se alguma porção da totalidade fôr designada por *T*, a principal fonte *D* de perturbações será amiúde constituída de outros sistemas frouxamente acoplados a *T*, e às vêzes suficientemente similares àqueles em *T* para que pudessem ser, de forma igualmente razoável, incluídos nêle. Na discussão subseqüente, no restante do livro, cumpre ter em mente êste fato: às vêzes uma demarcação igualmente razoável de *T* e *D* poderia ter traçado a fronteira de maneira diferente, sem que as conclusões finais fôssem significativamente afetadas. Arbitrária ou não, entretanto, *alguma* fronteira precisa sempre ser delineada ao menos no trabalho científico prático, pois de outro modo nenhuma proposição definida seria factível.

13.4. Quando o sistema *T* é muito grande — quando o organismo como regulador depara-se com um ambiente muito grande e complexo com recursos limitados — há vários modos que *possibilitam* a regulação. (Se não é possível a regulação, o organismo perece — um resultado extremamente comum que não se deve esquecer; mas êste caso não exige consideração pormenorizada.)

Às vêzes a regulação pode ser possibilitada mediante a redefinição do que se deve considerar aceitável — por meio de um rebaixamento de padrões. Trata-se de uma solução algo trivial, mas que não se deve esquecer como uma possibilidade.

Outra possibilidade é aumentar o escopo e a potência de *R*, até que se consiga uma capacidade de *R* adequada. Êste método, é óbvio, não deve ser jamais esquecido; mas não lhe prestaremos maior atenção. Consideremos de modo mais aprofundado o interessante caso em que a regulação, aparentemente muito difícil ou impossível, é de fato possível.

13.5. *Coerções*. O significado disto, levando em conta a lei da Variedade Requerida, é que a variedade nos distúrbios *D* não é de fato tão grande quanto parece; em outras palavras, segundo S.7.8, as perturbações apresentam coerção.

Assim, somos conduzidos ao seguinte caso: *D* possui muitas componentes, cada uma das quais apresenta variedade. A primeira estimativa da variedade em *D* coloca-a muito alto e incorremos no perigo de deduzir (uma vez dada a capacidade do regulador) que a regulação de *E* até um certo grau não é possível. Um exame ulterior de *D* pode, contudo, mostrar que as componentes não são independentes, que a coerção existe e que a variedade real em *D* é muito inferior à primeira estimativa. Pode-se verificar que, dada a capacidade de *R*, esta variedade menor *pode* ser regulada e em *E* é possível obter plena regulação ou contrôle. Destarte, a descoberta de uma coerção é capaz de converter "regulação impossível" em "regulação possível". Será a *única* maneira, se a capacidade de *R* fôr fixa.

Assim mais uma vez somos levados a considerar a importância e a utilidade de descobrir coerções bem como a outro exemplo da tese segundo a qual, se existe uma coerção, pode-se convertê-la para uso (S.7.14).

Examinemos agora quais coerções podem aparecer nas perturbações que afetam sistemas muito grandes e como é possível utilizá-las.

O problema é de grande importância prática, pois se a capacidade de *R* não fôr fàcilmente incrementada e outros métodos não forem viáveis, a lei da Variedade Requerida dirá que a descoberta de uma coerção é a única esperança do suposto regulador.

13.6. Como foi dito na S.7.10, as coerções não se dividem em algumas poucas classes simplesmente descritas. Depois de indicar alguma das possibilidades mais interessantes no Capítulo 7, posso apenas citar, em prosseguimento, aquelas classes que para nós apresentam agora interêsse peculiar. Com esta breve referência, passarei a um tema mais amplo que abrange uma parte fundamental de tôda a atividade humana.

Em conseqüência, estudaremos uma forma particular de coerção. É de grande interêsse em si e ilustrará a tese apresentada no último capítulo, sendo de considerável importância prática na regulação do sistema muito grande.

PERTURBAÇÃO REPETITIVA

13.7. Embora não tenhamos feito quase nenhuma referência ao fato nos últimos capítulos, muitas perturbações (e as correspondentes respostas reguladoras) são repetitivas, sobretudo se o sistema é observado por muito tempo. O reflexo da tosse é regulador e útil não só porque remove *esta* partícula de poeira mas porque, durante tôda uma vida, remove partículas repetidamente -- tantas vêzes quantas necessário. A maioria dos reguladores fisiológicos atuam de forma repetitiva, tão amiúde quanto preciso. E o barco salva-vidas costeiro salva não uma vez mas repetidas vêzes. Se, nos últimos capítulos, falamos da "resposta regulatória" no singular isto se deve apenas ao fato de que a ação única é típica do conjunto, e não porque o conjunto tenha necessàriamente um só elemento.

Das regulações conhecidas tantas são repetitivas que é difícil encontrar uma regulação que aja apenas uma vez. Um exemplo possível é o de um observatório a organizar seus planos de modo a estar com tudo pronto caso ocorra uma supernova, um evento que provàvelmente não sucederá duas vêzes durante a vida do diretor do observatório. Várias possibilidades teriam de ser levadas em conta: em que parte do céu ela poderia aparecer, se durante o dia ou a noite, as peçuliaridades espectrais e outras que determinariam o tipo particular de chapa e filtro a utilizar a fim de fotografá-la, e assim por diante. Ao estabelecer seus planos, o diretor traçaria, na realidade, uma tabela como a da S.11.4, mostrando as incertezas (D) a temer, os recursos (R) disponíveis e os resultados (E). A inspeção da tabela, como no Ex. 11.4.4, capacitá-lo-ia então a decidir se, em todos os casos, êle alcançaria o que desejava.

Há, portanto, casos em que a regulação tem de ser exercida contra uma perturbação não-repetitiva, mas êstes não são comuns.

Doravante consideraremos o caso em que a perturbação e a resposta regulatória ocorrem mais de uma vez; pois tais casos mostram coerção, da qual é possível tirar vantagem.

13.8. A coerção dá-se da seguinte maneira:

A formulação básica do processo regulatório referia-se a um conjunto de distúrbios mas pressupunha apenas que os elementos separados no conjunto eram distintos, e nada mais. Como qualquer outra quantidade, o distúrbio pode ser simples, ou um vetor. Na última hipótese, pelo menos dois tipos principais são discerníveis.

O primeiro tipo foi discutido na S.11.17. As várias componentes da perturbação atuam simultâneamente; como um condicionador de ar poderia, a cada momento, regular tanto a temperatura quanto a umidade.

O segundo tipo é bem ilustrado por um banho-maria controlado por termostato; pode-se encará-lo como um regulador, durante um intervalo de tempo curto ou longo. Durante o intervalo curto, "a perturbação" significa um acontecimento tal como "a imersão dêste frasco" e a resposta significa "o que acontece durante o próximo minuto". Seu comportamento recebe bom ou mau julgamento conforme o que sucede naquele minuto. Há também o longo intervalo. Depois de ter o termostato funcionado por um ano, alguém pode perguntar-me se o dispositivo mostrou ser, neste lapso de tempo, um bom regulador. Enquanto decido sôbre a resposta, penso na perturbação do ano inteiro como uma espécie de Grande Distúrbio (composto de numerosas perturbações individuais, que denoto por *d)*, para o qual produziu uma Grande Resposta (composta de muitas respostas individuais que denoto por *r)*. De acôrdo com algum padrão do que um banho-maria deva fazer durante um ano (e. g. nunca falhar gravemente, ou ter um desvio médio de menos de 1/2º etc.) formo uma opinião acêrca do Grande Resultado — se foi Bom ou Mau — e respondo conseqüentemente à questão.

Cumpre notar que o "Bom" no Grande Resultado não decorre necessàriamente do que é "bom" ( ) nos resultados individuais; é preciso defini-lo de nôvo. Assim, se entro em uma loteria e tenho três bilhetes, um ganho em um dêles (e conseqüente perda nos outros dois) conta como "Bom" no Grande Resultado; de modo que, no caso, 1 bom + 2 maus = Bom. De outro lado, se sou processado três vêzes por homicídio e absolvido de um, os resultados individuais continuam sendo 1 bom + 2 maus, porém aqui o Grande Resultado conta naturalmente como Mau. No caso em que perturbações individuais ameaçam, cada qual, o organismo com a morte, o Bom no Grande Resultado deve sem dúvida corresponder ao "bom em cada um dos resultados individuais".

Êstes Grandes Distúrbios são vetores cujas componentes são as perturbações individuais que sobrevêm hora após hora. Tais vetores apresentam uma forma de coerção. Assim, voltemos ao nosso primeiro exemplo de um vetor (S.3.5.). Era *A;* compare-o com *B*:

A	B
Ano do Carro:...........	Ano do carro de Jack:............
Potência:........	" " " " Jil:............
Côr:....................	" " " " Tom:............

Evidentemente *B* sofre uma restrição de um modo que *A* não sofre. Pois a variedade nas palavras da esquerda nas três linhas de *A* é três; nas três linhas de *B* é um.

Vetores como *B* são comuns na teoria da probabilidade, onde ocorrem sob o título "amostragem com substituição". Assim, o giro de uma moeda pode proporcionar apenas dois resultados, *C* ou *K*. Uma moeda que gira seis vêzes sucessivamente pode, entretanto, apresentar resultados tais como (*C, C, K, C, K, C*) ou (*K, K, C, C, K, C*) e assim por diante, até 64 possibilidades. (Compare com a S.9.9.)

O importante aqui é que, em semelhante conjunto de vetores (naqueles cujas componentes procedem tôdas da mesma classe básica, como em *B*), cabe distinguir duas variedades: há (i) a variedade dentro da classe básica (2 para a moeda, o número de possíveis anos distintos em *B*) e (ii) a variedade construída mediante o uso da classe básica durante *n* vêzes (se o vetor tiver *n* componentes). No exemplo da moeda, as duas variedades são 2 e 64. Em geral, se a variedade dentro da classe básica fôr *k*, e o vetor tiver *n* componentes, cada qual membro da classe, então as duas variedades serão, no máximo, *k* e k^n. Em particular, caberia notar que, se a variedade na classe básica possui algum limite, então um valor adequadamente grande de *n* permitirá majorar a segunda variedade além do limite.

13.9. Estas considerações aplicam-se em muitos casos de regulação. Suponhamos, por precisão, que o banho-maria possa ser afetado a cada minuto por uma das três perturbações individuais:

a) uma corrente de ar a esfriá-lo,
b) a luz solar a aquecê-lo,
c) um objeto frio que é nêle imerso.

A variedade é três, mas êste número é pouco representativo quanto à variedade que realmente ocorre durante um longo tempo. No curso de um ano, digamos, o Grande Distúrbio é um vetor com talvez algumas centenas de componentes. Assim, Grande Distúrbio pode ser o vetor (i. e., a seqüência) com 400 componentes:

(a, b, a, b, b, a, c, b, b, c, c, b, b, ... c, b, a, b).

E se as respostas individualmente corretas forem, respectivamente, α β e γ, então a Grande Resposta apropriada a êste Distúrbio particular seria o vetor (i. e., seqüência)

$$(\alpha, \beta, \alpha, \beta, \beta, \alpha, \gamma, \beta, \beta, \gamma, \gamma, \beta, \beta, \ldots \gamma, \beta, \alpha, \beta).$$

Se não houver coerção no Distúrbio de componente para componente quando se vai da esquerda para a direita, o conjunto todo de possíveis Distúrbios tem variedade de 3^{400}; e a Grande Resposta deve ter pelo menos outro tanto se deve ser obtida plena regulação.

Chegamos agora ao ponto: a dupla seqüência, como ocorreu no tempo, mostra *a coerção característica de uma máquina*, isto é, define uma máquina a menos de um isomorfismo. Assim, no exemplo dado há pouco, os eventos ocorreram na ordem, da esquerda para a direita:

$$\begin{array}{l} \mathrm{a\ b\ a\ b\ b\ a\ c\ b\ b\ c\ c\ \ldots,\ etc.} \\ \alpha\ \beta\ \alpha\ \beta\ \beta\ \alpha\ \gamma\ \beta\ \beta\ \gamma\ \gamma \ldots,\ \mathrm{etc.} \end{array}$$

(embora não necessàriamente em intervalos de tempo iguais). Verifica-se agora com facilidade que esta seqüência, como um protocolo, define a máquina com entrada:

↓	α	β	γ
a	α	α	α
b	β	β	β
c	γ	γ	γ

Assim, quando o Grande Distúrbio fôr um vetor cujas componentes pertençam tôdas a um conjunto básico de distúrbios, a Grande Resposta poderá ser ou um vetor de variedade igual ou a saída de uma máquina adequada com entrada.

13.10. Suponhamos que a regulação debatida na Terceira Parte seja da responsabilidade de alguma entidade Ω, amiúde o possuidor das variáveis essenciais *E*. Nos capítulos anteriores estudamos de que maneira o regulador *R* deve comportar-se. Acabamos de ver que, quando os distúrbios são repetitivos, cabe a Ω a possibilidade de optar entre *ser* o regulador (i. e., atuar como *R*) ou *construir uma máquina* que, uma vez edificada, atuará como *R* e realizará uma regulação de comprimento indefinido sem ação ulterior de Ω. Destarte chegamos à questão: deveria Ω alcançar a regulação diretamente, por suas próprias ações, ou deveria construir uma máquina para empreender o trabalho?

A questão surgiria também por outro motivo. Desde o início da Terceira Parte assumimos como pressuposto a existência do regulador, e perguntamos então acêrca das propriedades que deveria ter. Nada dissemos de como o regulador chegou a ser feito, dos fatôres que o trouxeram à existência. Assim, tendo visto na S.10.5 quão vantajoso seria se o organismo pudesse ter um regulador, não apresentamos os meios pelos quais se poderia obter a vantagem.

Por ambas as razões devemos agora considerar como uma máquina regulatória deve efetivamente ser projetada e realizada. No caso, não nos preocuparemos tanto com o engenheiro em sua prancheta quanto com o cérebro que, se tiver de alcançar regulação em suas reações aprendidas, deve de algum modo provocar o desenvolvimento de uma maquinaria regulatória dentro do material nervoso disponível; ou com o sociólogo que deseja uma organização reguladora para introduzir harmonia na sociedade.

A fim de entender o problema envolvido, cumpre olhar mais de perto o que implica, em princípio, o "projetar" uma máquina reguladora.

PROJETANDO O REGULADOR

13.11. *O projeto como comunicação.* Esqueçamos temporàriamente tudo o que diz respeito a "regulação" e voltemo-nos apenas para certas questões relacionadas com o projeto e construção de uma máquina, qualquer máquina.

Nosso tratamento do caso, embora sem nenhum prejuízo na precisão, deve ser muito amplo — isto é, abstrato — pois, como biólogos, queremos considerar máquinas de tipo bem mais amplo do que as de aço e latão. Dentro da fórmula

Entidade Ω projeta a máquina M

desejamos incluir casos tais como

1) Os genes que determinam a formação do coração.
2) O mecânico que faz a bicicleta.
3) Uma parte do cérebro que determina as conexões internas em uma rêde nervosa.

4) Um gerente de produção que planeja, numa fábrica, o desenvolvimento da produção segundo certas linhas.

5) Um matemático que programa um computador automático para se comportar de uma certa maneira.

Deveremos preocupar-nos, se nos ativermos ao ponto de vista cibernético, não com o processo mais óbvio de moldar ou reunir peças de matéria, mas com as questões menos óbvias daquilo que *determina* o modêlo final, de como êle veio a ser *selecionado.* Estamos interessados em pesquisar longas cadeias de causa e efeito, de modo que possamos relacionar um *conjunto* de possíveis causas iniciais com um *conjunto* de máquinas finais que resultam como seqüência; como o mecânico de telefone, que com um cabo de centenas de fios, liga cada um que entra numa extremidade a algum que sai da outra. Abordando o assunto desta maneira, descobriremos que devem valer certas relações quantitativas; nelas podemos basear as idéias do último capítulo. No decorrer dêste capítulo exemplificaremos a tese de D. M. MacKay: quantidade de informação, como medimos aqui, sempre corresponde a alguma quantidade, i. e., intensidade, de *seleção,* efetiva ou imaginável.

Os conceitos de selecionar, projetar, idear e construir (em resumo, ser de qualquer modo responsável pelo aparecimento eventual de) uma máquina real partilham de uma propriedade comum, quando identificamos e medimos as *variedades* envolvidas no processo. O que poderia aparecer quando *M* tem variedade — um embrião pode produzir qualquer uma de muitas formas de bombas musculares de sangue. Na realidade, o padrão genético em *Lumbricus* leva à produção de um coração de minhoca, o padrão genético em *Rana* leva à produção de um coração de rã, e, em *Homo,* de um coração humano. O contrôle pelo padrão genético sôbre o coração é claramente envolvido. Do mesmo modo também a regulação, pois qualquer que seja o estado em que se encontrem inicialmente as moléculas em *Lumbricus* (havendo variedade nas possibilidades), sob a ação do padrão genético a variedade desaparece, e aparece um coração de uma forma-padrão de minhoca.

Cabe dizer que os conceitos de projeto ou construção são essencialmente aplicáveis a *conjuntos,* a despeito do uso lingüístico comum do singular. (Compare S.7.3.) Assim o "padrão genético determina a forma do coração" é uma maneira abreviada de dizer que elementos no *conjunto* dos padrões genéticos dentre diferentes espécies podem ser postos em correspondência com os do *conjunto* dos possíveis corações nas várias espécies, como os fios nas duas extremidades de um cabo telefônico. Dêsse modo, *o ato de "projetar" ou "fazer" uma máquina é essencialmente um ato de comunicação do Construtor ao Construído,* e os princípios da teoria da comunicação se lhe aplicam. Em particular, as medidas que forem desenvolvidas para abordar o caso no qual várias mensagens possíveis são reduzidas a *uma* mensagem podem agora ser aplicadas ao caso em que várias máquinas possíveis são reduzidas a *uma* máquina.

Um dispositivo conceitual útil para destacar êste aspecto é imaginar que o ato de projetar deve ocorrer pelo telefone, ou por algum outro canal específico. A quantidade de variedade é neste caso prontamente identificável pela identificação da quantidade real de variedade a ser transmitida.

13.12. Quando um projetista seleciona a forma final da máquina, o que significa "selecionar" a máquina em têrmos dos conceitos gerais do presente livro? Considere a seguinte seqüência de exemplos, nos quais a máquina final é um receptor de rádio.

O primeiro é o caso do comprador que tem à sua frente três máquinas e escolhe uma. O segundo caso, equivalente ao primeiro do ponto de vista abstrato, sucede quando o projetista do aparelho de rádio, titubeando entre três possíveis circuitos, por fim escolhe um. O terceiro caso, equivalente *in abstrato* aos dois anteriores, ocorre quando o proprietário de um aparelho de rádio dotado de três circuitos move o botão para uma dentre três posições e destarte seleciona qual o circuito a ser efetivamente usado. Assim, do ponto de vista abstrato, selecionar uma máquina dentre três equivale a escolher um valor dentre três como parâmetro. Por exemplo, suponhamos que a escolha seja entre as três máquinas α, β e γ (cada qual nos estados a e b);

$$\alpha: \downarrow \begin{array}{cc} a & b \\ b & a \end{array} \qquad \beta: \downarrow \begin{array}{cc} a & b \\ a & a \end{array} \qquad \gamma: \downarrow \begin{array}{cc} a & b \\ b & b \end{array}$$

Suponhamos que β seja escolhido e que o seletor termine na máquina

$$\downarrow \begin{matrix} a & b \\ a & a \end{matrix}$$

Abstratamente esta escolha equivale a ter de partida uma máquina com entrada trivalente:

$\downarrow$	a	b
α	b	a
β	a	a
γ	b	b

e depois resolver que a entrada deverá ser fixada de modo permanente em β. (Os processos são idênticos no sentido de que se algum observador observa apenas os resultados dos processos, não pode afirmar qual dêles ocorreu, exceto com referência a outros critérios, não mencionados.)

No exemplo acima, fixar a entrada em β torna a máquina resultante um sistema absoluto, sem entrada. Se o resultado da seleção deve ser uma máquina com entrada, a máquina original deve então partir com duas ou mais entradas, de modo que, ao fixar uma através do ato de seleção de projeto, deixamos as outras livres para ulterior variação como entradas comuns.

O ato do projetista em selecionar um modêlo dentre muitos equivale a algum fator determinante que fixa uma entrada em um valor permanente.

13.13. (Esta seção aborda uma complicação secundária.)

Nos exemplos acima, a escolha ocorreu entre máquinas cujas transformações apresentavam o mesmo conjunto de operandos, isto é, o mesmo conjunto de estados na máquina. O que aconteceria se a escolha se verificasse entre, digamos,

$$\downarrow \begin{matrix} a & b \\ b & a \end{matrix} \quad \text{e} \quad \downarrow \begin{matrix} p & q & r \\ r & q & r \end{matrix} \;?$$

Pode esta seleção ser representada pela fixação de um valor de entrada? Uma escolha dêste gênero pode ocorrer nos primeiros estágios do projeto, quando, por exemplo, é preciso tomar uma decisão inicial: se as componentes serão electrônicas ou hidráulicas.

Na realidade, êste caso está contido no anterior, e pode ser nêle representado por mera mudança de notação. Assim, a escolha que acabamos de mencionar pode do mesmo modo ser representada como aquela entre μ e ν na máquina (redutível), cujos estados são pares:

$\downarrow$	(a,p)	(a,q)	(a,r)	(b,p)	(b,q)	(b,r)
μ	$(b\,.)$	$(b\,.)$	$(b\,.)$	$(a\,.)$	$(a\,.)$	$(a\,.)$
ν	$(.\,r)$	$(.\,q)$	$(.\,r)$	$(.\,r)$	$(.\,q)$	$(.\,r)$

(Na transformação, os pontos representam valores que não importam.)
Se escolhermos agora μ, uma parte resulta na máquina

$$\downarrow \begin{array}{cc} a & b \\ b & a \end{array}$$

sendo as outras componentes ignoradas; ao passo que, se a escolha recair sôbre ν, a outra parte proporcionará

$$\downarrow \begin{array}{ccc} p & q & r \\ r & q & r \end{array}$$

Destarte, a formulação inicial é de fato inteiramente geral.

13.14. *Projeto numa Caixa Preta.* Cumpre notar que a operação de "projeto", como concebido aqui, pode ser realizada dentro de uma Caixa Preta, se ela tem uma entrada. De fato, se o proprietário de um aparelho de rádio (S.13.12) desconhece o seu conteúdo, mas conhece como a saída é afetada pelo interruptor, *executará* o ato do "projeto na Caixa Preta" quando o ajusta e obtém o comportamento desejado.

Outros exemplos estendem o alcance do mesmo tema. A Caixa Preta, ou o aparelho de rádio, podem ser dominados por outra máquina, cujas atividades e valores determinam a posição do comutador. Neste caso, podemos dizer (desde que lembremos o sentido em que empregamos os têrmos) que a máquina dominante, quando ajusta o comutador em uma posição particular, "projeta" o aparelho de rádio. O importante é que a máquina dominante mostra ao aparelho de rádio aquelas propriedades que são *objetivamente* apresentadas pelo comportamento de um projetista.

Ponto de vista igual aplica-se ao cérebro, e podemos ver como parte de um cérebro pode mostrar em relação a outra parte o relacionamento comportamental objetivo do projetista frente à máquina. Começaremos por verificar como uma parte — talvez uma estrutura basal — pode atuar na qualidade de "projetista" com respeito à parte que domina, com respeito, digamos, a uma rêde neural.

A idéia, portanto, de uma máquina que projeta outra pode ser formulada em têrmos gerais e exatos — exatos no sentido de que é possível usar o experimento para indicar, objetivamente, se vale ou não êste relacionamento.

QUANTIDADE DE SELEÇÃO

13.15. Êste aspecto do projeto — a redução em números, que ocorre quando as muitas possibilidades iniciais se reduzem a poucas ou a uma só, finais — é fàcilmente mensurável. Podemos utilizar as mesmas escalas que as utilizadas para medir variedade e informação (S.7.7 e S.9.11), as quais admitem mensuração direta ou logarítmica.

A medida, além de ser conveniente, apresenta a propriedade natural de especificar a capacidade que o canal *C* deve ter

$$\boxed{\text{Projetista}} \xrightarrow[C]{} \boxed{\text{Máquina}}$$

caso seja possível a transmissão da variedade necessária ou informação do Projetista à Máquina.

Cabe notar que êste método em nada responde à questão "quanto de projeto há *nesta* máquina (sem fazer referência ao que poderia ser)?", pois a medida existe apenas sôbre o conjunto de possibilidades. Aplica-se, não à coisa que resulta, mas *ao ato de comunicação* (S. 13.11).

Os exercícios ajudarão a infundir realidade aos argumentos algo abstratos e mostrarão que concordam de modo satisfatório com aquilo que é intuitivamente evidente.

Ex. 1: Em um estágio do projeto de certa máquina elétrica é preciso decidir sôbre os valores de três existências ôhmicas distintas. Cada qual pode assumir qualquer dos valores 10, 15, 22, 33, 47, 67 ou 100 ohms independentemente. Quanta variedade deve o projetista fornecer (segundo a lei da Variedade Requerida) se as possibilidades precisam ser reduzidas a uma?

Ex. 2: (Continuação.) Um trio similar deve ter suas resistências selecionadas para o ohm mais próximo, isto é, a partir do conjunto 10, 11, 12, ..., 99, 100. Quanta variedade deve o projetista fornecer agora?

Ex. 3: Três resistências podem assumir cada qual o valor de 10, 20 ou 30 ohms. Se ligadas em paralelo, quanta variedade deve o projetista suprir se as propriedades elétricas possíveis precisam ser reduzidas a uma?

Ex. 4: Quanto de projeto é necessário se a decisão se encontra entre as duas máquinas, ambas com estados *a, b, c, d*:

$$\downarrow\begin{matrix} a & b & c & d \\ b & a & b & c \end{matrix} \quad \text{e} \quad \downarrow\begin{matrix} a & b & c & d \\ c & b & c & a \end{matrix} \;?$$

Ex. 5: Quanto de projeto entra na produção de um sêlo de um centavo (i) se formado de 15.000 pontos de meio tom, cada qual podendo apresentar-se em uma qualquer de 10 intensidades? (ii) se fôr a forma final escolhida dentre três formas submetidas? Explique a falta de concordância.

Ex. 6: Quanta variedade cumpre fornecer a fim de reduzir a uma as possíveis máquinas em um dado estado *n*? (Sugestão: Ex. 7.7.8.)

Ex. 7: (Continuação.) Similarmente, quando os estados da máquina forem em número de *n* e os estados de entrada em número de *i* (depois do projeto).

13.16. Pode-se aplicar exatamente a mesma medida ao projeto de máquina markoviana. Assim, a variedade entre duas máquinas markovianas:

$$\begin{array}{c|ccc} \downarrow & & & \\ \hline & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ & \frac{1}{3} & \cdot & \frac{1}{2} \\ & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{array} \qquad \text{e} \qquad \begin{array}{c|ccc} \downarrow & & & \\ \hline & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{array}$$

é exatamente de 1 bit, pois estamos escolhendo *entre* dois objetos, cujos conteúdos interiores — as várias frações — são aqui irrelevantes. (Esta quantidade de 1 bit difere, naturalmente, dos 1,58 bits que estariam associados com a matriz à direita considerada como uma fonte de informação que produz 1,58 bits em média, a cada passo (S.9.12).)

13.17. *Seleção por estágios.* O processo de seleção pode ser ou mais ou menos espalhado no tempo. Em particular, é possível que ocorra em estágios discretos.

O motorista em via de escolher um nôvo carro age muitas vêzes desta maneira. Diz primeiro, talvez, "deve custar menos 1000 libras". Semelhante critério efetua certa redução no número de possibilidades. A seguir acrescenta talvez que há de ser um carro com capacidade para cinco pessoas. E assim prossegue. Cada nôvo critério diminui as possibilidades remanescentes. Se pode adquirir apenas um carro, neste caso o critério deve eventualmente baixar as possibilidades para uma só. De algum modo, semelhante redução se torna imprescindível, ainda que o giro de uma moeda tenha de funcionar como seletor final.

A seleção abstrata (ou projeto) de uma máquina pode similarmente realizar-se por estágios. Suponha assim que a máquina possui quatro estados *a, b, c, d.* A transformação T

$$T: \downarrow \begin{matrix} a & b & c & d \\ * & * & * & * \end{matrix}$$

— em que ainda não se decidiu sôbre os asteriscos — deixa tôdas as possibilidades abertas. A mudança para a transformação U

$$U: \downarrow \begin{matrix} a & b & c & d \\ c & * & b & * \end{matrix}$$

representa uma seleção parcial. U também representa um *conjunto* de transformações, embora menor. O mesmo sucede com V:

$$V: \downarrow \begin{matrix} a & b & c & d \\ \overbrace{b \text{ ou } c} & * & * & * \end{matrix}$$

que exclui tôdas as transformações univalentes que incluem as transições $a — a$ ou $a — d$. Uma máquina pode portanto ser selecionada por estágios e os estágios podem ser definidos de diferentes maneiras.

O fundamental é que, do ponto de vista quantitativo, a seleção global alcançada não pode ultrapassar a soma (se medida logaritmicamente) das seleções separadas. (A seleção é medida pela queda na variedade.) Assim, se tomarmos um baralho e fizermos uma seleção de 2 bits e depois uma de 3 bits, não será possível indicar uma única carta a menos que uma seleção ulterior de pelo menos 0,7 bits seja efetuada, pois $\log_2 52$ é 5,7. A limitação é absoluta e nada tem a ver (selecionada uma máquina) com o tipo de máquina ou o modo de seleção usado.

Ex. 1: Quantas possibilidades são removidas quando, à transformação univalente, fechada, sôbre a, b e c com tôdas as 27 formas inicialmente possíveis, adita-se a restrição de que "Não deve ter estado de equilíbrio"?

Ex. 2: (Continuação.) E quando a restrição é "Deve ter três estados de equilíbrio"?

Ex. 3: Em medida logarítmica, quanta seleção foi aplicada no Ex. 1?

**Ex.* 4: Quanta seleção foi aplicada em um sistema absoluto de n estados, a_1, a_2, ..., a_n, com tôdas as transformações inicialmente possíveis, se se acrescentar a restrição "Não deve conter nenhum estado de equilíbrio"? (Sugestão: Em quantos estados pode a_1 agora transformar-se, em vez do n anterior?) (Cf. Ex. 1.)

**Ex.* 5: (Continuação.) A que tende esta quantidade quando n tende para infinito? (Sugestão: Calcule-a para n = 10, 100, 1 000.) (Tal estimativa pode aplicar-se à máquina da S. 12. 15.)

**Ex.* 6: Se, como foi descrito nesta seção, as cartas de um maço embaralhado são inspecionadas (sem ulterior embaralhamento) uma a uma sucessivamente a fim de se encontrar uma carta determinada, quanta informação é obtida, em média, depois de examinadas a primeira, a segunda, a terceira etc., cartas? (Busca sistemática.)

**Ex.* 7: (Continuação.) Quanta informação se obtém se, após cada fracasso, a carta errada é recolocada e o maço embaralhado antes de se retirar a próxima carta? (Busca ao acaso.)

13.18. *Suplementação de seleção.* O fato de se conseguir uma seleção por estágios traz a implicação de que tôda a seleção pode amiúde ser realizada por mais de um seletor, de modo que a ação de um seletor pode ser *suplementada* pela ação de outros.

Teríamos um exemplo se um espôso, escolhendo um carro nôvo dentre os modelos disponíveis, decidisse, antes, que o carro deveria custar menos do que 1000 libras, e depois permitisse que a sua espôsa fizesse o restante da escolha. Poderia suceder ainda se a espôsa, tendo reduzido a dois o número de modelos, apelasse para o giro de uma moeda a fim de chegar à decisão final.

Os exemplos são ubíquos. (Os que seguem apresentam suplementação por fatôres ao acaso já que estaremos interessados nêles no próximo capítulo.) No bridge, o estado do jôgo no instante em que a primeira carta é jogada foi selecionado em parte pelas declarações dos jogadores e em parte pela sorte — pelo resultado estatìsticamente padronizado do ato de embaralhar — que selecionou a distribuição das cartas. (Compare Fig. 12.22.1.) As Regras do Bridge asseguram, de fato, que uma parte definida de tôda a determinação será atribuída ao acaso, i. e., ao embaralhamento realizado de um certo modo prescrito. Um tal apêlo ao acaso foi amiúde utilizado no passado como método para suplementar a seleção. O general romano, por exemplo, após tomar várias decisões, deixava muitas vêzes o restante por ser determinado por algum outro fator como o vôo do próximo bando de pássaros ou as configurações apresentadas pelas entranhas de uma ovelha recém-abatida. (A suplementação foi empregada anteriormente neste livro na S.4.19 e 12.15.)

No trabalho científico, o primeiro uso deliberado de seletores totalmente descorrelacionados a fim de fornecer determinação "ao acaso" para completar a seleção imposta pelo experimentador foi aparentemente feito por Sir Ronald Fisher; pois foi êle o primeiro a avaliar sua importância e utilidade fundamentais.

(Ao dizer que um fator é **aleatório**, não me refiro ao que o fator é em si mesmo, mas à relação que tem com o sistema principal. Assim, os dígitos sucessivos de π apresentam-se tão determinados como podem apresentar-se quaisquer números, ainda que um bloco de um milhar dêles possa servir muito bem como números aleatórios para experimentos de agricultura, não porque *sejam* aleatórios mas porque provàvelmente são *descorrelacionados* com as peculiaridades de um conjunto particular de lotes de terra. A suplementação por "acaso" significa portanto (afora requisitos especiais, de importância secundária) suplementação por efeitos (ou variedade) tirados *de um sistema cujo comportamento é descorrelacionado com o do sistema principal.* Demos um exemplo na S.12.15. Assim, se uma variável aleatória fôsse requerida, a cotação de ontem da ação-ouro poderia ser adequada se o sistema principal em estudo fôsse um rato num labirinto, mas seria inadequada se o sistema fôsse uma porção do sistema econômico-financeiro.)

SELEÇÃO E MAQUINARIA

13.19. *Seleção por máquina.* Nas seções anteriores consideramos as questões de comunicação que estavam envolvidas quando da seleção de uma máquina. Entretanto, o que quer que faça a seleção deve ser considerado, segundo princípios cibernéticos gerais, também como um mecanismo. Assim, tendo apreciado o sistema

$$\boxed{L} \rightarrow \boxed{M}$$

quando L atua de modo a selecionar ou projetar a máquina M, devemos considerar L agora como uma máquina, que age de alguma maneira como projetista ou seletor. Como pode uma máquina selecionar? A resposta deve, naturalmente, ser dada em têrmos compatíveis com os têrmos já empregados nesta Parte.

O mais simples processo de seleção talvez ocorra quando a máquina segue ao longo de uma trajetória particular, de modo que após o estado i (digamos) passa ao estado j (digamos) e não a qualquer outro de seus estados. Esta é a seleção comum que uma máquina efetua quando sua "mensagem" (o seu protocolo) diz que a máquina sofre *esta* transformação e não outra.

Outro processo de seleção apresentado por uma máquina é o exposto na S.7.24: tôda máquina determinada apresenta seleção quando reduz a variedade em seus possíveis estados do máximo inicial ao número final de suas bacias.

Um terceiro processo de seleção foi abordado na S.5.13, quando uma parte de um todo pode escolher dentre estados de equilíbrio na outra parte, "vetando" alguns dêles. Esta é talvez a forma mais óbvia de seleção, pois, enquanto os dois são observados, o observador imaginativo quase pode ouvir a parte vetante dizer "não serve, ainda não serve, não quero saber disto, ainda não serve. Segure-o! — sim, conservaremos isto permanentemente". Se uma máquina deve ser construída como seletor (a fim de executar talvez o programa sugerido na seção final) terá de ser, até onde me é dado ver, construída a fim de atuar desta maneira. É o modo da realimentação de segunda ordem na Fig. 5.14.1 (suplementada na S.12.15).

Existem sem dúvida outros métodos, mas êstes bastarão como ilustração, sendo suficientes para dar precisão à idéia de uma máquina "selecionadora"; (embora qualquer consideração especial dificilmente seja necessária, pois, na teoria de Shannon, *todo* ato de comunicação é também um ato de seleção: aquêle mediante o qual a mensagem particular é levada a aparecer).

13.20. *Duração da seleção.* A esta altura devemos dizer uma palavra acêrca de quanto tempo pode exigir um ato de seleção, pois, quando examinamos casos reais, o tempo requerido pode parecer, a uma primeira estimativa, demasiado longo para qualquer realização prática. A questão torna-se de especial importância quando o regulador precisa ser desenvolvido a fim de efetuar a regulação de um sistema muito grande. O cálculo aproximado da quantidade de seleção provàvelmente necessária pode sugerir que levará um tempo que ultrapassa de longe o cosmológico; e pode-se saltar para a conclusão de que o tempo exigido para realizar efetivamente a seleção deveria ser igualmente longo. Entretanto, isso está longe de ser o caso.

Os princípios básicos foram esclarecidos por Shannon, especialmente na sua *Teoria da Comunicação dos Sistemas de Segrêdo.* Mostrou que, se uma seleção particular é desejada, de 1 entre *N,* e se o seletor pode indicar (ou atuar apropriadamente de outro modo), apenas se o elemento requerido está ou não em dado conjunto, então o método que leva a cabo a seleção inteira no menor número de passos é a seleção por sucessivas dicotomias, de modo que as primeiras seleções ocorrem entre grupo e grupo e não entre elementos. Êste método é bem mais rápido do que o do exame de *N* um a um, sucessivamente. E se *N* se faz muito grande, o método da seleção entre grupos torna-se incomparàvelmente mais rápido. A falta de espaço nos impede de tratar adequadamente êste importante assunto, mas não o abandonaremos sem dar um exemplo para sugerir quão enormemente mais rápido é o método por dicotomias.

Consideremos uma seleção realmente enorme. Suponhamos que, algures no universo (visível ao astrônomo), exista um átomo único; o seletor quer encontrá-lo. O universo visível contém cêrca de 100.000.000 de galáxias, contendo cada uma cêrca de 100.000.000.000 de sóis e 300.000 corpos como a terra e a terra contém cêrca de 1.000.000.000.000 de milhas cúbicas. Cada milha cúbica abrange cêrca de 1.000.000.000.000.000.000.000 de partículas de poeira, encerrando cada uma cêrca de .... 10.000.000.000.000.000 de átomos. O seletor deseja encontrar um dêstes, em particular!

Tomemos isto como uma unidade de seleção em escala muito grande; e chamemo-la de *mega-escolha;* é aproximadamente 1 entre 10^{73}. Quanto tempo levará a descoberta do mencionado átomo particular?

Dois métodos são dignos de comparação. Através do primeiro, os átomos são examinados um por vez e um testador eletrônico de alta velocidade é empregado para examinar um milhão por segundo. O simples cálculo mostra que o número de *séculos* necessários para encontrar o átomo demandaria mais do que a largura desta página para ser escrito. Assim, segue-se que o método em aprêço condena a seleção ao malôgro (para todos os propósitos práticos).

No segundo método, o seletor recorre à dicotomia (pressupondo-a possível), perguntando primeiro: está o átomo nesta ou naquela metade? Depois, utilizando a indicação, pergunta: está êle nesta ou naquela metade? E assim por diante. Suponhamos que isto pudesse fazer-se apenas em um passo a cada segundo. Quanto tempo exigiria tal método? A resposta é: exatamente cêrca de quatro minutos! Semelhante meio tornou possível o êxito.

O exemplo talvez torne mais persuasiva a afirmação de que o método de seleção por grupos é *muito mais* rápido do que o da pesquisa de item por item. Além do mais, é precisamente quando o tempo da pesquisa de item por item torna-se excessivamente longo que o método da pesquisa por grupo mostra realmente seu poder de manter a rapidez.

13.21. *Seleção e redutibilidade.* O que significa isto quando se trata de selecionar uma máquina determinada? Suponhamos, por precisão, que tenha 50 entradas, que uma entrada possa assumir qualquer um dentre 25 valores e que uma forma específica, dentre as possíveis, seja procurada. Esta seleção é apenas de aproximadamente 1 mega-escolha, e sabemos que é vã a tentativa de selecionar sucessivamente. É viável a seleção por grupos? Ela o será, se pudermos descobrir algum meio *prático* de agrupar os estados-entrada.

Um caso particular, de grande importância, ocorre quando o conjunto da máquina é redutível (S.4.14) e quando as entradas seguem separadamente para os vários subsistemas. Então, a seqüência: selecione o valor exato para a parte 1, na entrada da parte 1; selecione o valor exato para a parte 2, na entrada da parte 2; e assim por diante — corresponde à seleção conduzida por grupos, mediante o método rápido. *Assim, se a máquina fôr redutível pode-se utilizar o método rápido de seleção.*

De fato, a redutibilidade é extremamente comum em nossos sistemas terrestres. É tão comum que costumeiramente damo-la por suposta, mas quem deseja estudar como regular os sistemas muito grandes precisa tornar-se plenamente cônscio dela.

Para ter alguma idéia de quanto o mundo em que vivemos apresenta redutibilidade, compare seu comportamento comum com o que aconteceria se, de repente, fôsse perdida a redutibilidade, i. e., se cada variável produzisse um efeito, imediato ou retardado, sôbre tôda outra variável. Virar uma página dêste livro, em vez de ser apenas isto e nada mais, poderia provocar a mudança das luzes, levar a mesa a mover-se, o relógio a alterar sua marcha e assim por diante através de todo o aposento. Devesse o mundo ser realmente irredutível, a regulação seria difícil a ponto de ser impossível e nenhuma forma organizada de vida poderia persistir (S.7.17).

Cumpre abandonar agora o tema, mas o que dissemos no *Design...* acêrca de "Sistemas iterados", e nos capítulos subseqüentes, amplia a tese. Entrementes, podemos tirar a conclusão de que, se uma entidade responsável Ω (S.13.10) deve projetar (i. e., selecionar) uma máquina para atuar como regulador em um sistema muito grande, de modo que o regulador seja, por sua vez, algo grande, a consecução da necessária seleção dentro de um tempo razoàvelmente curto depende muito provàvelmente da possibilidade de ser feito o regulador em forma redutível.

13.22. *De onde provém o Regulador?* Podemos agora, afinal, responder à pergunta que permaneceu latente através da Terceira Parte: como dar existência ao regulador desejado? O problema surgiu na S.13.10, mas desde então estudamos uma variedade de tópicos, que precisavam ser discutidos antes que pudéssemos coordenar os fios. Resumamos agora a posição.

O processo de chegar eventualmente a uma máquina particular com propriedades desejadas implica seleção e também que a entidade responsável Ω (de S.13.10) tenha alcançado com êxito a meta. Qualquer que tenha sido a variedade das componentes inicialmente disponíveis e qualquer que tenha sido a variedade com que os projetos (i. e., valores-entrada) possam ter variado a partir da forma final apropriada, o fazedor Ω atuou em relação à meta de modo a alcançá-la. Êle agiu pois como um regulador. Assim, a *fei-*

tura de uma máquina com propriedades desejadas (no sentido de obtê-la de preferência a uma com propriedades não-desejadas) *é um ato de regulação.*

Suponhamos agora que esta máquina com as propriedades pretendidas seja o regulador discutido na Terceira Parte — como se há de fazê-lo? A resposta é inevitável: por meio de outro regulador.

Será isto uma *reductio ad absurdum* de tôda a nossa posição? Não creio. Pois a questão óbvia "onde começa tudo isso?" é prontamente respondida. Como biólogos, nosso fato fundamental (S.10.3) é que a terra já existe há muito tempo, que a seleção atuou durante todo êsse tempo e que a seleção favoreceu o aparecimento de reguladores (S.10.5). Tais fatos por si bastam para explicar a presença na terra, hoje em dia, de inúmeros bons reguladores. E nenhuma explicação ulterior é *necessária* se deve ser verificado que alguns dos referidos reguladores têm por meta levar algum mecanismo a uma forma-padrão, ainda que esta seja a de um regulador (com uma meta, é claro, distinta daquela do primeiro). O cientista sentir-se-ia apenas levemente curioso quanto à razão pela qual algo que poderia ser feito diretamente, em um só estágio, é, na realidade, feito indiretamente, em dois.

Podemos destarte responder à pergunta da presente seção afirmando que o regulador é passível de ser selecionado a partir de algum conjunto geral de mecanismo (muitos de caráter não regulatório) sòmente quando é ou o sobrevivente de algum processo natural de seleção ou produzido (outro processo de seleção) por outro regulador.

13.23. Não será esta feitura do regulador desejado por dois estágios um desperdício? O fato de ser preciso dois estágios para alcançá-lo sugere que o problema da obtenção de um regulador tem sempre de ser solucionado antes que seja enfrentado!

Mais uma vez, o que isto implica quando o sistema muito grande a ser regulado é o mundo social e econômico e a entidade responsável Ω é algum conjunto, talvez de sociólogos, cuja capacidade, como regulador, é limitada ao disponível aos membros da espécie *Homo?* Implica isto na impossibilidade de progresso em matéria de regulação (pois o regulador terá de ser construído por membros da espécie)?

Não; pois, conseguida a regulação por estágios — quando um regulador R_1 atua de modo a dar existência ao regulador R_2 — *a capacidade de* R_2 *não é limitada pela de* R_1. Surge a possibilidade de que R_2 possa ser de capacidade maior do que R_1, de modo que sucede uma *amplificação*. Esta possibilidade é abordada no próximo capítulo, onde veremos que, longe de ser necessàriamente esbanjador, o método da regulação por estágios abre algumas possibilidades notáveis.

Amplificação da Regulação

14

14.1. *O que é um amplificador?* Um amplificador é, em geral, um dispositivo que, dada uma pequena porção de algo, emitirá uma quantidade maior dêste. Um amplificador de som, dado um pequeno som (no microfone), emitirá uma quantidade maior de som. Uma amplificador de potência, tal como o que descrevemos na S.12.21, dada uma pequena potência (suficiente para mover *L*), emitirá uma quantidade maior de potência (de *H*). E um amplificador de dinheiro seria um dispositivo que, dada uma pequena quantidade de dinheiro, emitiria uma quantidade maior.

Tais dispositivos funcionam por contarem com um generoso reservatório daquilo a ser emitido e usarem, a seguir, a entrada a fim de controlar o fluxo do reservatório. Raramente um amplificador atua aumentando diretamente a entrada, como o faz a lente do projetor cinematográfico; porém, mais comumente, funciona por suplementação. Assim, o amplificador de potência dispõe de alguma fonte que proverá potência abundantemente (o ar comprimido em *A* na Fig. 12.21.1), e é esta fonte que proporciona a maior parte da potência na saída, sendo que a entrada contribui com pouco ou nada para a saída. Similarmente, o trabalho realizado pelo manobrista da grua na alavanca de contrôle nada faz diretamente no sentido de içar o pêso principal, pois o seu trabalho total é gasto em movimentar o câmbio elétrico ou de outro tipo.

Veremos que no amplificador de potência (e. g., o da Fig. 12.21.1) o processo inteiro — o de içar uma pesada carga em *H*, por intermédio de uma fôrça situada em *L* · · perfaz dois estágios, através de dois sistemas acoplados. É esta separação em dois estágios que possibilita a amplificação de potência, pois, do contrário, isto é, em um estágio, a lei da conservação da energia tornaria impossível qualquer amplificação direta e simples da potência. O estágio 1 consiste no movimento, graças ao operador, do ponto *L* contra o atrito em *K* e a pressão em *V;* durante êste estágio a energia, ou potência, fica estritamente conservada. O estágio 2 consiste no movimento do ar comprimido dentro ou fora de *B* e da suspensão de *P, G* e *H;* neste estágio a energia também se conserva, pois a energia utilizada, quando o pêso em *H* é içado, deriva-se da expansão e compressão do ar. Assim, o sistema todo pode ser encarado como composto de dois sistemas — sendo a energia no interior de cada um conservada rigorosamente —, de tal modo acoplados que fôrças de 0, 1, 2, ... dinas situadas em *L* correspondem *respectivamente* a fôrças de 0, 1 000, 2 000, ... dinas (ou algum outro múltiplo) situadas em *H*. *É a divisão em dois estágios que permite a construção de um amplificador de potência a despeito da lei da conservação da energia,* devendo-se notar que a energia fornecida à entrada no estágio 1 pode ser suplementada de forma a resultar na saída no estágio 2.

Às vêzes importa a proporcionalidade, como no amplificador de rádio. Então a máquina deve ser construída de modo que a razão tenha o mesmo valor ao longo da escala. Em outros casos, o valor exato da razão possui pouca importância, como no guindaste, onde o ponto essencial está no fato de que os valores da entrada deverão todos encontrar-se dentro de algum limite dado (aquêle estabelecido pela fôrça do braço do manobrista) e que a saída seja generosamente suplementada, de modo que exceda de muito o valor da entrada.

Ex.: Projete um "amplificador de água", i. e., um dispositivo que, sendo a água bombeada à entrada em x ml/seg, emitirá, à saída, $100x$ ml/seg.

14.2. Destarte, o processo de amplificação pode ser considerado sob dois pontos de vista diferentes, que tendem a conduzir a duas opiniões muito diversas quanto à ocorrência ou não da amplificação.

De um lado coloca-se o teórico — o projetista de guindastes, talvez, que precisa entender a natureza íntima do processo se deseja um guindaste eficiente. Para êle não há amplificação real: a potência emitida não excede (no total) a potência fornecida. Sabe que o operador no contrôle é bem sucedido simplesmente porque pode como que roubar outras fontes de energia (carvão, petróleo etc.) a fim de conseguir seu propósito. Não tivesse a Natureza provido, no carvão, uma fonte generosa de suplementação, o operador não estaria capacitado a alçar a pesada carga. O operador consegue "amplificação" apelando simplesmente para a ajuda do Rei Carvão. Assim, o tipo básico de amplificador é o menino capaz de levantar grandes pesos — porque seu pai está disposto a levantá-los para êle!

Tudo isto é verdade; no entanto, do outro lado encontra-se o homem prático que deseja *usar* a coisa, o homem que decide qual maquinaria instalar, digamos, no cais. Se tiver acesso a uma fonte abundante de potência barata, então a "amplificação" tornar-se-á, para êle, muito real e prática. Ela significa a diferença entre serem os navios carregados rápida e fàcilmente pelos movimentos de uma alavanca de contrôle, ou lenta e laboriosamente, à mão. Quando a carga é maior, por exemplo uma locomotiva, a não-disponibilidade de um amplificador de potência pode significar a impossibilidade de realizar a tarefa. Aqui, ao homem prático, é de grande importância a possibilidade de uma amplificação aparente dêste tipo.

Òbviamente, ambos os pontos de vista são corretos. Os projetistas de gruas deveriam estar cônscios de que elas não são amplificadores efetivos, mas os usuários dos guindastes deveriam considerá-los como se o fôssem.

14.3. Podemos agora ver como devemos visualizar a questão da amplificação de regulação. Durante o projeto (neste capítulo) cumpre estarmos muito cônscios de que o projetista está conseguindo realmente apenas uma suplementação, pelo roubo de alguma fonte fàcilmente disponível e abundante. Quando vier a utilizá-la, todavia (tema para o futuro), deverá esquecer-se do fato, e saber apenas que está agora como um operário equipado com instrumentos operados por potência, habilitado a realizar tarefas impossíveis a um operário desarmado.

14.4. *Regulação e seleção.* Na S.13.10 começamos por considerar o que levaria o regulador (prèviamente admitido como dado) à efetiva existência, quer como uma fórmula de comportar-se, contida no interior do organismo (Ω) que deseja a regulação, ou como uma máquina material construída pelo organismo para que atue por êle. Vimos que a *quantidade* de projeto que o atinge pode ser medida (pela quantidade necessária de seleção) e vimos (S.13.18) que a seleção pode, em certo sentido, ser amplificada. Para aclarar o assunto, consideremos mais diretamente a relação entre regulação e seleção, em especial na medida em que estão envolvidas quantidades de variedade ou informação. Se o diagrama dos efeitos imediatos fôr

$$\boxed{\text{Projetista}} \xrightarrow[C]{\qquad} \boxed{\text{Regulador}}$$

queremos saber quanta variedade ou informação o canal C situado entre ambos terá de transportar.

Para se ter um regulador feito, a seleção é essencial. Eis aqui três exemplos:

O primeiro regulador que discutimos (S.11.3) leva-nos a identificá-lo como

$$R: \downarrow \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ \beta & \alpha & \gamma \end{array}$$

e esta transformação particular (a regulatória) deve ser selecionada do conjunto de tôdas as transformações possíveis, que, neste caso, apresenta o número 27 (cf. Ex. 7.7.8). Aqui o regulador é "feito" no sentido de ser especificado sem ambigüidade, i. e., distinguido dos outros.

Na S.13.12 utilizou-se outro método, e a máquina, que poderia ser um regulador, foi "projetada" por um valor particular selecionado do conjunto dos valores-entrada possíveis.

Um terceiro método para a obtenção de um regulador é montá-lo na ferragem, assim como um mecânico faz um banho-maria. Mais uma vez a seleção se faz necessária: as componentes devem ser selecionadas (distinguidas) de outros objetos possíveis e o modo de juntar e acoplar deve ser selecionado dentre outros modos, incorretos. A quantidade de seleção usada pode ser medida, e qualquer discussão acêrca da medida pode ser resolvida pelo método da S.13.11 (parágrafo final).

Segue-se da S.13.18 que caso se possa chegar ao regulador final por meio de estágios (ocorrendo tôda a seleção em estágios) existe a possibilidade de que *a provisão de um pequeno regulador em um primeiro estágio possa levar ao estabelecimento final de um regulador muito maior* (i. e., de capacidade maior) de modo que o processo apresente amplificação.

É neste sentido que "amplificação" de regulação deve ser entendida. A lei da Variedade Requerida, como a lei da conservação da energia, proíbe de modo absoluto qualquer ampliação simples e direta, mas não proíbe suplementação.

14.5. Consideremos alguns exemplos que oferecem de fato tal amplificação de regulação.

Suponhamos que as perturbações sejam flutuações na voltagem da energia que chegam a um aparelho pertencente a Ω à taxa de centenas por segundo, ameaçando perturbá-lo. Admitamos que a variedade por segundo proporcionada por estas perturbações exceda de longe a sua capacidade como canal, de modo que lhe é impossível regular contra tais perturbações por sua ação pessoal direta. Contudo, êle possui à sua disposição um catálogo do fabricante, que exibe três itens:

1. Aparelho de televisão,
2. Estabilizador de energia,
3. Alterador de freqüência.

Assumamos que está dentro de sua capacidade fazer uma seleção adequada de uma dentre as três; se, agora, êle realiza a seleção adequada, o resultado final há de ser que o fornecimento de energia ao aparelho será estabilizado. Assim, as suas três seleções primárias possíveis podem ser colocadas em correspondência com três resultados, um dos quais é a "voltagem de energia estabilizada".

A regulação posterior (durante, digamos, um ano) envolve muito mais seleção do que uma dentre três; de modo que durante tôda a operação ocorreu uma amplificação indubitável.

Neste exemplo a suplementação é tão óbvia, e sua dependência da potência do fabricante como projetista é tão clamorosa, que o leitor poderia sentir a tentação de dispensar esta "amplificação" como indigna de séria consideração.

(Não é contudo mais clamorosa do que a dependência do manobrista do guindaste em relação a um suprimento adequado de potência.) Êste caso, todavia, é um tanto extremo (foi selecionado para mostrar uma das pontas da escala). Outros casos situam-se ao longo da escala e são de interêsse mais geral. O princípio, entretanto, permanece inalterado.

A seguir, vejamos o caso no qual Ω deseja que um banho-maria seja restaurado a uma certa temperatura; as restaurações serão exigidas 100 vêzes por dia durante o ano inteiro. Isto significa que em 36.500 ocasiões a temperatura deverá ser corrigida por um acréscimo ou decréscimo — uma seleção de 1 bit, digamos. Todo o Grande Distúrbio (S.13.8) tem assim a variedade de 2^{36500} possibilidades. Ω poderia provàvelmente transmitir êsse tanto durante o ano, mas julga-o inconveniente. Então, se os seus recursos forem tais que êle pode fazer um termostato à custa de, digamos 1000 bits, e usando o fato de que o Grande Distúrbio é repetitivo (S.13.9), o ato de selecionar de modo apropriado a partir de 1000 bits resulta por conseguinte na seleção correta de 36500 bits. Assim, produziu-se uma amplificação de aproximadamente $\times$ 36 (se medida na escala logarítmica).

O segundo exemplo é mais comum que o primeiro. O fato de seu método ser amplamente utilizado na prática mostra se o homem prático o julga vantajoso ou não.

Não há, por certo, necessàriamente qualquer amplificação; e o homem prático, antes de construir a máquina para uma determinada tarefa, sempre efetua, pelo menos, uma avaliação intuitiva do balanço:

Custo (em algum sentido) da produção da máquina que executará o serviço	**Custo** implicado se êle próprio o fizer.

Êste capítulo trata das quantidades reais envolvidas, quando nosso interêsse se concentra no montante de comunicação e seleção requerido.

Por fim examinemos um exemplo em que a possibilidade de amplificação é óbvia e de uso prático. Suponhamos que vinte homens recebam a incumbência de manter dois mil quartos com temperatura e umidade constantes. Embora existam alguns meios de contrôle em cada quarto, os vinte homens podem talvez julgar a tarefa além de suas capacidades se tentam compensar tôdas as variações atmosféricas por manipulação direta dos contrôles. Pode acontecer, entretanto, que haja disponibilidades de máquinas tais que, se os homens se tornarem mecânicos e agirem como reguladores em relação às máquinas, estas poderão ser convertidas em acondicionadores de ar e mantidas como tais. E pode acontecer, ainda, que o montante da regulação eventualmente fornecida pelos mecânicos aos condicionadores seja suficiente para mantê-los no contrôle de fato dos dois mil quartos. Assim, a regulação que não era viável em um só estágio, torna-se possível, em condições adequadas, em dois.

Pode-se medir as quantidades de comunicação (as capacidades de canal) implicadas nestas regulações com qualquer precisão desejada e determinar o grau exato de qualquer amplificação. Assim, caso a amplificação tenha efetivamente ocorrido, a realidade do fato poderia ser demonstrada de maneira indisputável.

De onde (no último exemplo) vem a suplementação? Em geral, de tudo quanto supre as outras entradas. No exemplo que acabamos de dar, isto inclui os outros fatôres que contribuem ao projeto e execução da máquina e também o próprio ambiente, que comunica ao condicionador, e *não ao mecânico,* qual a temperatura e a umidade, a cada instante. Como resultado, tais fontes de informação desempenham um papel na regulação total, sem usar o mecânico como canal.

O exemplo dado há pouco mostra dois níveis de regulação, mas não há por que o número deva parar em dois. Um médico que cuida do conjunto de mecânicos mantendo-os em bom estado de saúde e aptos ao trabalho, pode pretender, no que diz respeito aos quartos, ser um regulador ao terceiro nível. A questão não precisa ser levada adiante uma vez que o princípio está claro, especialmente porque muitos casos não exibirão, é provável, os vários reguladores dispostos em hierarquia simples.

14.6. *Amplificação no cérebro.* Podemos agora compreender quantitativamente por que êste método indireto comprovou-se superior — por que é êle o método usado por aquêles organismos que possuem os mais potentes recursos de regulação: êle possibilita a amplificação.

O padrão genético, como depósito ou canal para a variedade, tem capacidade limitada. A sobrevivência cabe particularmente àquelas espécies que usam de modo eficiente a capacidade. Seu uso ocorre direta ou indiretamente.

O uso direto dá-se quando o padrão genético é utilizado diretamente para especificar o regulador. O regulador é feito (no embrião) e o organismo passa a sua vida respondendo a cada perturbação tal como determinou o padrão genético. Não ocorre amplificação (dentro de nosso ponto de vista atual, embora se tire alguma vantagem (S.13.9) se as perturbações voltam amiúde durante a vida do organismo).

O uso indireto sucede quando o padrão genético constrói um regulador *(R_1)* cuja ação é construir o regulador principal *(R_2)*, especialmente se tal processo fôr elevado através de várias ordens ou níveis. Alcançando a regulação final através de estágios, ocorre a possibilidade de suplementação em larga escala e, assim, a de uma regulação final bem maior do que a que poderia ser alcançada diretamente pelo padrão genético.

Um claro exemplo de como um regulador pode atuar de modo a provocar o desenvolvimento de outro surgiu na S.12.15. A parte B do homeostato foi construída e tornou-se assim o regulador primário R_1. Acoplada à Parte A, atuou de modo a tornar A estável com suas agulhas no centro. Conseguido isto, A serve de regulador *(R_2)* para perturbações que o atingem e que provocariam o desvio das agulhas. Embora o R_2 dêste exemplo particular seja extremamente simples, nada em princípio separa êste caso daquele no qual o regulador R_2 é de qualquer grau de complexidade.

O método de obter regulação em dois estágios pelo qual o padrão genético produz R_1 e R_1 produz R_2, é o método dos mamíferos, cujo padrão genético é utilizado, na sua ação sôbre o cérebro do embrião, para determinar o desenvolvimento ao nascimento de alguns reguladores fundamentais (R_1) cuja ação não constitui vantagem imediata para o organismo. A partir do nascimento, entretanto, agem em face do córtex cerebral de maneira a desenvolver nêle vasto mecanismo regulatório *(R_2)* que, ao chegar à fase adulta, é um regulador bem melhor (isto é, de maior capacidade) do que aquêle que a ação direta do padrão genético poderia eventualmente produzir.

De onde vem a suplementação? De fontes casuais como na S.12.15 e do próprio ambiente! Pois é o próprio ambiente que é forçado a prover boa parte da determinação quanto ao modo de como o organismo deve atuar. Assim, o padrão genético e o ambiente contribuem ambos para plasmar o adulto plenamente desenvolvido, e dêste modo a quantidade de projeto fornecida pelo padrão genético é suplementada pelo projeto (enquanto variedade e informação) oriundo do ambiente. Destarte o adulto eventualmente apresenta maior capacidade reguladora do que a determinada apenas pelo padrão genético. A amplificação de regulação não é portanto coisa nova, pois os animais superiores, aquêles que se adaptam por aprendizado, descobriram o método de há muito.

Não será possível incrementar ainda mais a amplificação? Se assim fôsse não haverá possibilidade de usarmos nossos atuais podêres de regulação a fim de formar um regulador mais altamente desenvolvido, muito além da capacidade humana, apto a regular os vários males que sucedem na sociedade, a qual, em relação a nós, é um sistema muito grande?

14.7. *Amplificação de inteligência.* Êste livro foi planejado como uma introdução, e por doze capítulos manteve-se fiel ao seu propósito. Os últimos dois capítulos, contudo, desenvolveram o assunto de maneira algo especulativa, em parte a fim de dar ao leitor alguma prática na aplicação dos métodos anteriores e em parte a fim de indicar-lhe o que está à frente, pois as perspectivas são excitantes.

Na S.13.18 vimos que se pode amplificar a seleção. Pois bem, "solucionar problemas" é em grande parte, talvez totalmente, uma questão de seleção apropriada. Tome por exemplo qualquer livro popular de problemas e quebra-cabeças. Quase todos são redutíveis à forma: de um certo conjunto indique um elemento. Assim, de todos os números possíveis de maçãs que John pode trazer em sua sacola, somos solicitados a achar um determinado; ou, de tôdas as linhas possíveis traçadas por um lápis através de um dado padrão de pontos, procura-se uma determinada; ou, de tôdas as distribuições de letras possíveis em um dado conjunto de espaços, procura-se uma determinada. É, de fato, difícil conceber um problema, seja a sério ou de brincadeira, que não requeira em última análise uma seleção adequada tanto necessária como suficiente para a sua solução.

É claro também que muitos dos testes usados para medir "inteligência" são avaliados essencialmente de acôrdo com o poder de seleção apropriada do candidato. Assim um teste mostra à criança um objeto comum e lhe pergunta o nome dêste: dentre tôdas as palavras a criança deve selecionar a adequada. Outro indaga à criança como ela encontraria uma bola em um campo: de todos os caminhos possíveis cumpre-lhe selecionar um dentre os poucos adequados. Não é impossível portanto que aquilo que é comumente referido como "poder intelectual" possa ser equivalente a "poder de seleção apropriada". Na verdade, se uma Caixa Preta falante mostrasse alto poder de seleção adequada em tais assuntos — de modo que, diante de problema difíceis, desse persistentemente respostas corretas — dificilmente poderíamos negar que estivesse apresentando o equivalente *comportamental* de "alta inteligência".

Sendo assim, e por sabermos que o poder de seleção é amplificável, parece seguir-se que o poder intelectual, como o físico, é passível de amplificação. Que ninguém diga que isto não pode ser feito, pois os padrões genéticos fazem-no cada vez que formam um cérebro que se desenvolve para ser algo melhor do que aquilo que o padrão genético poderia ter especificado em pormenor. A novidade é que agora podemos fazê-lo sintèticamente, conscientemente, deliberadamente.

Mas o presente livro precisa deter-se; êstes não são assuntos para uma Introdução.

Referências

ASHBY, W. ROSS. *Design for a brain.* Chapman & Hall, London; 2nd imp., 1954.

Idem. The applications of cybernetics to psychiatry. *Journal of Mental Science*; **100,** 114-124; 1954.

Idem. The effect of experience on a determinate dynamic system. *Behavioral Science*; **1,** 35–42; 1956.

BELLMAN, R. *Stability theory of differential equations.* McGraw-Hill Book Co., New York, 1953.

BOURBAKI, N. *Théorie des ensembles,* fascicule de resultats. A.S.E.I. No. 1141; Hermann & Cie., Paris; 2nd edition, 1951.

Idem. Algèbre, Chapitre 1, A.S.E.I. No. 1144.

Idem. Topologie générale, Chapitre 1, A.S.E.I. No. 1142.

CANNON, WALTER B. *The wisdom of the body.* London, 1932.

FISHER, SIR R. and YATES, F. *Statistical tables.* Oliver & Boyd, Edinburgh, 1943.

GOLDMAN, S. *Information theory.* Constable & Co., London; 1953.

GRANIT, R., LEKSELL, L., and SKOGLUND, C. R. Fibre interaction in injured or compressed region of nerve. *Brain;* 67, 125–140; 1944.

LASHLEY, K. S. in *Cerebral mechanisms in behavior.* John Wiley & Sons, New York; 1951.

LEWIN, K. *Principles of topological psychology.* McGraw-Hill Book Co., New York; 1936.

MACKAY, D. M. Quantal aspects of scientific information. *Philosophical Magazine;* **41,** 289–311; 1950.

NEUMANN, J. VON, and MORGENSTERN, O. *Theory of games and economic behavior.* Princeton; 1947.

PAVLOV, I. P. *Conditioned reflexes.* Oxford University Press; 1927.

RIGUET, J. *Fondements de la théorie des relations binaires.* Thèse de Paris; 1951.

Idem. Sur les rapports entre les concepts de machine de multipole et de structure algébrique. *Comptes rendues de l'Académie des Sciences;* 237, 425–7; 1953.

SHANNON, C. E. Communication theory of secrecy systems. *Bell System technical Journal;* 28, 656–715; 1949.

Idem. The synthesis of two-terminal switching circuits. *Ibid.;* 28, 59–98; 1949.

Idem. Computers and automata. *Proceedings of the Institute of Radio Engineers;* **41,** 1235-41; 1953.

Idem and WEAVER, W. *The mathematical theory of communication.* University of Illinois Press, Urbana; 1949.

SOMMERHOFF, G. *Analytical biology.* Oxford University Press, London; 1950.

TINBERGEN, N. *The study of instinct.* Oxford University Press, London; 1951.

TUSTIN, A. *The mechanism of economic systems.* Heinemann, London; 1953.

WIENER, N. *Cybernetics.* John Wiley & Sons, New York; 1948.

Respostas aos Exercicios

2.4. 1: Não. 2: Não. 3: A, sim; B, sim; C, não; D, sim. 4: Deve ser da forma $a \rightarrow a$. 5: Sim; colocado na posição de xeque-mate não há transformada, pois não existe lance legal ulterior para o jogador; se a transformação de C fôr fechada, tôda posição criada por seu lance pode ser seguida de outra, de modo que a sua transformação não contém lances que conduzam a xeque-mate.

2.5. 1: Sim. 2: Não; alguns operandos, e. g., 40, terminam em 0 e se transformarão no 0, que não pertence ao conjunto dos operandos.

2.6. 1: $n' = n + 10$ $(n = 1, 2, 3)$. 2: a, $n' = 7n$ $(n = 1, 2, 3$, subentendido para todos); b, $n' = n^2$; c, $n' = 1/n$; d, $n' = 11 - n$; e, $n' = 1$; f, $n' = n$. 3: $\downarrow \begin{matrix} 5 & 6 & 7 \\ 2 & 3 & 4 \end{matrix}$ Não. 4: (i) $\downarrow \begin{matrix} 5 & 6 & 7 \\ 25 & 30 & 35 \end{matrix}$ (ii) $\downarrow \begin{matrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{matrix}$ 5: Sim. 6: Sim.

2.8. 1: Muitos-um; tanto 1 como 8 são mudados em 9.

2.9. 1: Nenhuma venda.

2.10. 1: A diagonal principal consiste exclusivamente de 1, e o resto todo é de zeros. 2: a: ii; b: iii; c: i. 3: a: Sim; b: Não. 4: As distribuições são as mesmas, sendo uma delas mera reflexão da outra. 6: 16. 7: 4.

2.11. 1: $\downarrow \begin{matrix} a & b & c \\ a & a & c \end{matrix}$ 2: Igual à transformação. 3: A. 4: $n' = n + 2$ $(n = 1, 2, \ldots)$. 5: $n' = 49n$ $(n = 1, 2, \ldots)$.

6: $\downarrow \begin{matrix} + & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & + & + \end{matrix}$

2.14. 1: $n'' = 9n$. 2: $a'' = a + 16$. 3: $a''' = 343\ a$. 4: $k'' = 9k - 4$. 5: $m'' = \log(\log m)$. 6: $p'' = p^4$. 7: (i) $n' = 4n + 9$; (ii) $n' = n^4 + 2n^3 + 2n^2 + n$; (iii) $n' = 1 + 2\log(1 + 2\log n)$. 8: $n' = -27n - 7$. 9: $n' = \dfrac{1+n}{2+n}, \dfrac{2+n}{3+2n}, \dfrac{3+2n}{5+3n}, \dfrac{5+3n}{8+5n}$, etc. 10: A identidade. 11: O limite encontra-se em $(2/5, 1/5)$.

2.15. 1: 2, 3, 1. 2: g: $\downarrow \begin{matrix} 6 & 7 & 8 \\ 8 & 7 & 8 \end{matrix}$ 3: h: $\downarrow \begin{matrix} \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ \gamma & \delta & \beta & \alpha \end{matrix}$ 4: 17. 5: 0. 6: $9n$. 7: t.

2.16. 1: U^2T: $\downarrow \begin{matrix} a & b & c & d \\ d & c & d & b \end{matrix}$ 2: UTU: $\downarrow \begin{matrix} a & b & c & d \\ c & d & c & b \end{matrix}$ 3: São idênticas; tal equivalência é a principal justificação para escrever a transformação para baixo e não da esquerda para a direita. (Cf. Ex. 9.6.8 e 12.8.4.)

2.17. 1: (i) $\begin{tikzcd} & c \arrow[d] & \\ b \arrow[r] & a & d \arrow[l] \end{tikzcd}$ (ii) $f \rightleftarrows g \quad p \rightleftarrows q$. 2: Não contém setas, apenas pontos isolados. 3: Cada qual é composto apenas de pontos isolados e/ou de anéis simples sem ramificações. 4:

$$\begin{tikzcd} & & 9 \arrow[r] & 2 & 5 \arrow[d] & 6 \arrow[l] \\ 4 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & & 1 \arrow[u] & 7 \arrow[l] & 8 \arrow[l] \\ & & & 3 \arrow[u] & & \end{tikzcd}$$

quando utilizados logaritmos com 4 cifras.

5: 7, 1, 2, 2. 6: Não. 7: Sim. 9: Não.

3.1. São respostas possíveis: (a) ôvo quente → ôvo duro; (b) lenha → cinza;(c) cilindro cheio de vapor e ar → cheio de faísca; (d) ôvo unicelular → bicelular; (e) nuvem de cúmulos → tempestade de trovões; (f) estro → prenhez; (g) preço baixo (com pequeno estoque) → preço alto; (h) gato observando rato → gato caçando rato; (i) névoa densa → névoa dispersa.

3.4. 1: $n' = 2n$. 2: 2, 4, 8, 16, 32, 64×10^3. 3: *Gráfico* (ii): 1000 → 2000 → 4000 → ... 4: $n' = 0{,}8n$. 5: (i) 800, 640, 510, 410, 330×10^6; (ii) Zero. 6: Iria para o estado 3 no qual permaneceria; 3 é o único estado no qual êle pode se deter. 7: Vai para um ciclo de estados 2 e 8, entre os quais oscila incessantemente. 8: Quatro; duas com um estado de equilíbrio e duas com um ciclo. 9: $n' = 0{,}9n + 1.000.000$. 10: 20, 19, 18,1, $17{,}3 \times 10^6$. 11: 10.000.000. 12: Se l fôr o comprimento, sua *mudança* de comprimento sôbre um intervalo de tempo será $l' - l$; de modo que $l' - l = 1{,}2$, e a transformação é $l' = l + 1{,}2$. 13: O *aumento* no número (não o número seguinte) é $n' - n$; de modo que $n' - n = 10^{8n} (10^8 - n)$, e a transformação é $n' = n + 10^{8n} (10^8 - n)$. 14: 19, 34, 57, 81, 97×10^6.

3.5. 1: $\downarrow \begin{matrix} (ABC) & (BCA) & (CAB) \\ (BCA) & (CAB) & (ABC) \end{matrix}$

2: $\begin{tikzcd} & (ABC) \arrow[dr] & \\ (CAB) \arrow[ur] & & (BCA) \arrow[ll] \end{tikzcd}$

3: (1,—1), (1,1), (—1,1), (—1,—1). 4:Um ciclo de quatro elementos. 5: (2,3,5), (3,5,8), (5,8,13).

3.6. 1: (1/2,2), (2,—1/2), (—1/2,—2), (—2,1/2), (1/2,2), etc. 2: (1,2,0,2,2). 3: (2,1,0,2,2) $\rightleftarrows$ (1,2,0,2,2). 4: Dever-se-ia aditar ciclos ulteriores com dois elementos e não conexos. 5: (8,—3,1). 6: (8,4) se transforma em (6,6), no qual o sistema permanece. 7: Se o operando fôr (a, b), $a' = 1/2\, a + 1/2\, b$, $b' = 1/2\, a + 1/2 b$. 8: (30,34) → (28,36) → (24,40) → (16,48) → (0,64) → ? O que acontece a seguir não pode ser decidido até que se decida da viabilidade do empréstimo. 9: $a' = 1/2\ (3a - b)$, $b' = 1/2\ (3b - a)$. 10: Quem quer que comece com mais dinheiro. 11: $m' = m - n$, $n' = 2n$. 12: O vetor (m, n). 13: (150,10) → (140, 20) → .... → (0,160) após o que os eventos algébricos não mais são paralelos aos zoológicos. 14: $x = 10$, 0, —5, —5, —2 1/2, 0, 1 1/4, 1 1/4, 5/8; não. **15**: Não, está pesadamente amortecido. **16**: Se os salários forem representados por x, e o índice de preços por y, então a primeira proposição afirma que $x' - x = y - 100$, e a segunda diz que $y' = x$; de modo que a transformação é $x' = x + y - 100$, $y' = x$. **17**: (110,110) → (120,110) → (130,120) → . . . → (1540, 990). **18**: Não, o sistema é capturado por uma "espiral viciosa". **19**: (110,110) → (110,100) → . . . → (100 5/16, 100 5/16). **20**: Cada qual converge para 100. **21**: Um sistema é estável; o outro exibe inflação auto-agravadora. **22**: (80,120) → (100,80) → (90,110) → . . . → (99 3/8, 100 5/8). **24**: Sim. **25**: 3.

3.7. **1**: $\dfrac{d^3x}{dt^3} - \dfrac{d^2x}{dt^2} - 2x\dfrac{dx}{dx} + x^2 = 0$

2: $dx/dt = y$, $dy/dt = -ax$.

3: $\dfrac{dx}{dt} = y$, $\dfrac{dy}{dt} = 1(1 - x^2)\dfrac{y}{x} - \dfrac{2}{x(1 + x^2)}$

4.1. **1**: Três. **2**: Sim. **3**: Sob R_1 vai para $c \to d \to b$; então sob R_2 vai para $b \to a \to b$; de modo que está em b. **4**: (i) R_1 e depois R_2 o fariam. (ii) R_1, R_3, R_2 o fariam. **5**: Tornar-se-ia $x' = 4$, $y' = 4 - y$; observe que a equação da primeira linha, pertencente a x, torna-se, na realidade, não verdadeira; o consêrto obriga a máquina a comportar-se diferentemente. **6**: Dentro de cada coluna os estados devem ser os mesmos.

4.2. **1**: (i) $g' = 2g - 2h$, $h' = 2g - 2h$; (ii) $g' = g - h$, $h' = 2g$; (iii) $g' = 0$, $h' = 2g + 2h$. **2**: (i) $h' = j$, $j' = e^{-h}$, (ii) $h' = \log(2 + \operatorname{sen} h)$, $j' = 1 + \operatorname{sen} j$. **3**: (i) 0; (ii) 2; (iii) alternadamente 1 e 2; (iv) $a = 1$ para 90 passos e então $a = 10$. **5**: $PV = 10$; sim, aproximadamente. **6**: $n' = n + a^2$. **7**: Sim, cada salto vale $n' - n$, e isto mede $3a$.

4.3. **1**:

$ab =$	00	01	10	11	20	21
$s' =$	s	s	0	t	$-s$	$-s + 2t$
$t' =$	t	$2t$	$t - 1$	$2t$	$t - 2$	$2t$

2: 3. **3**: $a = 9/8$, $b = 1/8$. **4**: $a = 9/10$, $b = -1/10$. **5**: Quatro ($ab = 0$, 1, 2 ou 4)

4.4 **1**: Corresponderia a colocar a e b sempre iguais, i. e. construindo efetivamente o transdutor $p' = a\,(p + q)$, $q' = a\,(p + q)$.

4.5. **1**: O gráfico deve consistir de uma única cadeia que atravessa todos os estados. **2**: A seqüência (8,4), (6,6).

4.7. **1** e **2**: (omitindo os parênteses) quatro bacias:

$ai \rightleftarrows bk$ $\qquad$ $dj \to bi \rightleftarrows ak$ $\qquad$ $bj \to ci \rightleftarrows dk$

$$\begin{array}{c} aj \to di \rightleftarrows ck \\ \uparrow \\ cj \end{array}$$

3: $ai \to ck \to di \to bk \to ci \to dk \rightleftarrows bi$. **4**: Sim. **5**: $n_1 n_2$. **6**: n^3. **7**: Cada parte em sucessão vai para o estado 0. **8**: A mudança . . .0,0,1,2,0,0,. . . ocorre em cada parte por sua vez, algo como um impulso que passa ao longo de um nervo.

4.8. 1:

$$\begin{tikzcd}
 & ce \arrow[d] & & \\
ae \arrow[r] & df \arrow[r, shift left] & bf \arrow[l, shift left] & \\
af \arrow[r] & cf \arrow[u] & be \arrow[l] & de \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

2: Em X coloque os valores de β todos iguais.

4.9. 1: p, q; r, s, t, u. 2: (1,0,1,0,0).

4.11. 1: Entre seis pares, tais como AB, há 6; entre quatro trios, como ABC, tomados em cada direção, há 8; e entre tôdas as quádruplas $(ABCD, ABDC, ACBD, ACDB, ADBC, ADCB)$, há 6. 2: $x' = y + z^2$, $y' = 2z$, $z' = x - z$. 3: Sim; a outra transformação é $x' = y + z$, $y' = 2z$, $z' = x - 1$. 4: Sim.

4.12. 1: (omitindo-se as caixas por razões de simplicidade): (i) $y \rightarrow x$; y domina x; (ii)

$$\begin{tikzcd}
 & y \arrow[dl] & \\
x \arrow[rr] & & z \arrow[ul]
\end{tikzcd}$$

um sistema com realimentação; (iii) $u \rightleftarrows x$ $v \rightleftarrows y$; o "todo" consiste efetivamente de duas partes não conexas; (iv) $u \rightarrow x \rightarrow y \rightarrow z$; uma cadeia de ação;

(v)

$$\begin{tikzcd}
 & u \\
y \arrow[ur] \arrow[r] \arrow[dr] & x \\
 & z
\end{tikzcd}$$

y domina todos os outros três;

(vi)

$$\begin{tikzcd}
u \arrow[dr] & \\
x \arrow[r] & z \\
y \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

z é dominado pelos outros três. 2: Quando y é zero.

4.13. 1: z domina x, y independe de ambos.

4.14. 1: (iii) apenas.

4.15. 1: Se as variáveis forem C = Canto, R = Riso, X = Tocar órgão, Y = queimar incenso, e cada qual assumir os valores 0 ou 1 para inativo ou ativo, respectivamente, então se verificará em breve que a máquina com entrada será:

	↓	(C,R) 00	01	10	11
	00	01	01	10	10
(x,y)	01	00	00	11	11
	10	11	01	00	10
	11	10	00	01	11

Um caminho para (00) é: Deter a queima de incenso por um minuto; a seguir pare o incenso e toque o órgão; finalmente, comece a queimar incenso de nôvo; no futuro continue queimando-o e nunca toque o órgão. 2: Sim, pois as transições dos R são afetadas pelos valores dos C. 3: Não. 4: $X \rightarrow C \rightleftarrows R \leftarrow Y$.

4.19. 1: Um método possível é jogar um dado e deixar que o seu primeiro número forneça o transformado de S_1, e assim por diante. 2: Um método possível é enumerar 6 cartas de 1 até 6, embaralhá-las, colocá-las em uma linha e depois preencher os estados na mesma ordem. **5**: Veja S.4.20.

4.20. **1**: Sim, não, não.

5.3. **2**: Não. **3**: O único é (0,0). **4**: Todos os pontos situados no eixo dos y estão em equilíbrio. **5**: $j = 0$, $k = -1$. **6**: Sim. **7**: Não. **8**: Tôda seta retorna ao seu estado original, de modo que o ponto representativo é imóvel. **9**: Identidade. **10**: Sim. **11**: Sim.

5.4. **1**: Tal como $\downarrow \begin{matrix} a & b & c & d & e & f & g \\ b & a & d & c & e & f & g \end{matrix}$ **3**: Não. **4**: Não. **5**: Não. **6**: Tôda trajetória é um ciclo. **7**: Não.

5.5. **1**: Apenas $b + c + g$. **2**: Sim. **3**: Sim. **4**: Sim.

5.6. **1**: Sim; a seqüência $D(c)$, $TD(c)$, $T^2D(c)$, $T^3D(c)$,... é d, a, c, c,... **2**: Nada; o limite não é e. **3**: O sistema, embora deslocado do conjunto, sempre retorna a êle.

5.7. **1**: Um conjunto possível de transformações é:

$\downarrow$	a	b	c	d
T	a	b	a	b
D	c	c	.	.
E	b	d	.	.

5.9. **1**: $a = (100{,}100)$; D o transforma em $(110{,}110)$ — i. e. $\delta_1 = 10$, $\delta_2 = 10$; T é dado; não é estável. **2**: a e D permanecem como antes, mas T é mudado, e o sistema é estável. **3**: Em geral o limite será algum estado diferente de a; não é estável para tais Ds. **4**: Sim; os desvios tendem a zero, que constitui um estado de equilíbrio. **5**: Não; os desvios aumentam até um grau, limitado sòmente por fatôres estranhos, tais como a forma dos acoplamentos. **6**: Para fazer com que qualquer desvio diminua em vez de aumentar. **7**: São auto-agravantes — uma dor de cabeça constante para orientar administradores. **8**: Qualquer afastamento do estado de equilíbrio aumentaria até aparecer outro fator limite. **9**: Sim; para todos os deslocamentos D; assim, se D desloca o estado para (δ_1, δ_2) então os sucessivos valores de x são δ_1, $1/2\ \delta_2$, $1/4\ \delta_1$, $1/8\ \delta_2$, ... que òbviamente convergem para 0; similarmente para y.

5.13. **1**: Não; pois y teria de estar em equilíbrio em 0 sob algum valor de β; assim β teria de satisfazer $0 = 2\beta\, 0 + 3$, que é impossível.

6.3. **1**: Veja S.6.5.

6.5. **1**:
$$\begin{matrix} g & & \\ & \searrow & \\ & & j \to f \\ & \nearrow & \\ h & & \end{matrix}$$
2: $j \to f \to h$ (o protocolo não dá prova de transições a partir de g, com entrada em β). **3**: Não, a transição a partir de C não é univalente. **4**: Sim, até onde vai a evidência. **5**:

(x, y) $\downarrow$	00	01	02	10	11	12	20	21	22
(x', y')	01	00	11	11	00	21	11	20	11

6: Para cada valor de entrada, devem ser observadas n transições, perfazendo, no mínimo, n passos; de modo que o conjunto inteiro de transformações não pode ser observado em número menor do que mn passos. 7: Escolha 2 valores quaisquer para x e α, e determine o valor do x' resultante. Assim "$\alpha = 1$, $x = 4$, e $x' = 4$" prova que a Caixa é I. Um teste ainda mais simples é tomar $\alpha = 0$ e verificar se o valor de x cresce ou decresce.

6.7. 1: y domina x.

6.9. 1: $\downarrow \begin{matrix} a & b & c & d & e \\ t & p & r & q & s \end{matrix}$ 2: Seis:

3: São necessárias duas variáveis, a leitura do mostrador ((v)) e a sua taxa de mudança ($\dot{v}$); $dv/dt = \dot{v}$, $d\dot{v}/dt = k(u - v) - f\dot{v}$, onde k' representa a tensão da corda e o momento de inércia da massa, e f é o seu coeficiente de fricção; (ii) $dy/dt = \dot{y}$, $d\dot{y}/dt = -R\dot{y}/L - y/CL + x$. Para que sejam isomórficos no sentido estrito acima definido, devem ter $f = R/L$ e $k = 1/CL$. Assim sendo, pode-se mostrar o seu isomorfismo pela transformação um-um

$$\downarrow \begin{matrix} y & \dot{y} & x \\ v & \dot{v} & ku \end{matrix}$$

4: $\downarrow \begin{matrix} u & v & w \\ z & x & y \end{matrix}$

6.10. 1: São idênticos: $p \rightleftarrows q \rightarrow r$. 2: ii e iv podem ser trocados; i, iii, e v inalterados. 3: Todos são inalterados.

6.11. 1: Considere x como o preço da manteiga e y como o do açúcar; sua diferença agora vale $x - y$; a *diferença* de amanhã será $(x - y)'$; e isto é igual ao preço da manteiga de amanhã menos o preço do açúcar de amanhã, $x' - y'$.

6.12. 1: Será se a transformação um-um fôr considerada simplesmente como um caso extremo da transformação muitos-um.

6.13. 1: Par + Par = Par, $E + O = O$, $O + E = O$, $O + O = E$. 2: (Que "$x + y$" signifique "funda x com y".) Os sistemas são: (i) $a + b$, (ii) $c + d$, (iii) $a + b$ e $c + d$, (iv) $b + c + d$, (v) $a + b + c + d$, e (vi) (*ex-officio*) o o sistema original sem nada fundido. 3: Os estados (x, y) e $(-x, y)$ podem ser fundidos, pois a mudança do sinal de x não altera o estado seguinte (x', y'); assim, para saber apenas que o estado presente é $(\pm 4, -2)$, sem especificação do sinal de x, basta ainda provar que o estado seguinte deve ser o único de $(+2, +14)$.

6.16. 1: Sistema e modêlo seriam indistinguíveis. 2: Êle persiste, o mesmo faz o cérebro; são isomorfos no nível mais baixo. 3: (i) a, $b + c + d$ é isomorfo com p, $q + r$; (ii) $a + b + c + d$ é isomorfo com $p + q + r$.

7.6. 1: $26 \times 26 \times 26$, que é 17.576. 2: 16. 3: 11. 4: $2 \times 2 \times 2$ ... dez vêzes, i. é. 1024. 5: 5^x deve não ser menor do que 2×10^9 de modo que, tomando os logs em qualquer base conveniente (10, por exemplo):

$$x \log 5 \geqq \log 2 + 9 \log 10$$
$$\therefore x \geqq (\log 2 + 9 \log 10) / \log 5$$
$$\geqq 13{,}3;$$

de modo que seriam necessários, pelo menos, 14 desses testes. **6**: (i) 27, (ii) 21. **7**: 27. **8**: $3^3 = 27$ e $3^4 = 81$; portanto, para selecionar uma dentre 52, quatro indicações seriam necessárias. **9**: Três; o grupo do pai pode ser A, B ou O.

7.7. **1**: Um bit. **2**: (i) 2,32 bits, (ii) 30,9 bits. **3**: 4,7 bits. **4**: $5 \times 4{,}7 = 23{,}5$ bits. **5**: (i) 1 bit, (ii) 20 bits. **6**: 2^{20}, i. é. 1.048.576. **7**: A substituição de cada ponto de interrogação tem variedade de $\log_2 6$ bits, de modo que o conjunto apresenta variedade de $6 \log_2 6$ bits, i. é. 15,5 bits. **8**: $n \log_2 n$ bits. **9**: 12000 bits. **10**: Uma página de 5000 palavras veicularia cêrca de 50.000 bits. mais do que o disco. **11**: Se Outras coisas forem iguais, as variedades terão de ser iguais. **12**: Ao de "todos os possíveis panfletos impressos em Inglês cuja leitura leva dez minutos." A variedade pertence não ao panfleto mas a êste conjunto. **13**: Sem dúvida; basta apenas ser *distinto* das outras possibilidades.

7.12. **1**: Não, pois tôdas as combinações do estado marital presente e passado estão incluídas. **2**: Sim; faltam quatro possibilidades.

7.13. **1**: Três, no que concerne as quantidades mencionadas. **2**: Sim, se os ponteiros forem colocados de modo acurado; assim estando o ponteiro das horas a meio caminho entre dois números tal fato implica que o ponteiro dos minutos se encntra na "meia hora". **3**: Um; pois a informação dada pelo ponteiro dos minutos decorre da informação dada pelo ponteiro das horas. **4**: O camaleão possui quatro; o homem possui pouco mais do que dois, pois seus olhos podem se mover com ligeira independência. **5**: Dois. **6**: Um, pois a sua variedade não pode exceder a de *a;* ainda seria 1, qualquer que seja o número de componentes do vetor. **7**: Antes de ser dado o gráfico, *y* pode, para dado *x,* assumir qualquer valor no intervalo de *y;* mas depois de desenhado o gráfico, para dado *x,* o valor de *y* é limitado algum valor único. **8**: Seis.

7.15. **1**: Afirma que para todos os possíveis números racionais (infinito em número), as proporções combinadas poderão sempre ser encontradas em um pequeno subconjunto (totalizando talvez umas poucas dúzias). **2**: De tôdas as possíveis trajetórias geométricas, e tôdas as possíveis trocas de calor, etc., apenas poucas são permitidas.

7.19. **1**: Das transições (e. g.) $a \to a$, $a \to b$, $a \to c$, etc. tôdas estão excluídas exceto uma, pois a transição a partir de *a* tem de ser univalente; similarmente a partir de *b, etc.*

7.20. **1**: 8. **2**: 17. **3**: 12 **4**: (i) 1.048.576; (ii) 21.892.

7.22. **2**: A dos parasitas; evidentemente alguns hospedeiros servem de alimento a mais do que uma espécie de parasita. **3**: *V* é muitos-um, e provoca uma queda. **4**: Como carente de discriminação. **5**: (i) 6 estados, (ii) 2 estados. "O banho não está funcionando." **6**: A probabilidade de que um estado particular S_i seja a transformada de S_j é $1/n$. A probabilidade de que S_i não seja a transformada de S_j é $1 - 1/n$. A probabilidade de que S_i não seja a transformada de S_k será também $1 - 1/n$. Assim, a probabilidade de que S_i não seja o transformado de qualquer estado é $(1 - 1/n)^n$. Isto fornece a *fração* de operandos que desaparece após a transformação. Na medida que n tende para o infinito ela tende para $1/e$. Portanto a fração que remanesce, para dar a variedade, vale $1 - 1/e$.

7.24. **1**: 3 estados, $= 1{,}58$ bits. **2**: Por outra 1,58 bits. **3**: "a e b" tornam-se, em sucessão, $5a$. $5a + 7$, $10a + 14$, $10a + b + 14$. Subtraindo 14, resta $10a + b$. Assim uma centena de combinações de a e b (se 0 e 0 é permitido) é transformada um-um, após a subtração de 14, para os cem números de 0 até 99. A variedade é 100 estados ou 6,64 bits. **4**: Tôdas as combinações de dois números sugeridas em tais ocasiões **5**: Zero. **6**: 2 estados, 1 bit; ou vários circuitos ou um circuito em vários tempos. **7**: Não. Podem funcionar juntas em tôrno do mesmo ciclo. Distinguir entre (i) igualdade de estado entre máquina e máquina considerada a cada instante, e (ii) igualdade de estado entre tempo e tempo considerado em uma máquina.

8.3. **1**: não mais do que o quanto pode resultar de um só corte.

8.4. **1**: Sim; "tomando o antilog". **2**: Não; o mesmo valor para x' é dado por muitos valores de x. **3**: A transformação idêntica. **4**: $n' = n - 7$. **5**: $x' = x + y$, $y' = -x + 2y$. **6**: 3 $\log_2 26$ bits, i. é. 14,1 bits. **7**: $26^3 = 17576$. **8**: $\log_2 8 + \log_2 7$, i. é. 5,8 bits. **9**: Não inteiramente: a variedade seria 5,7 bits, que é insuficiente ($\log_2 52 < \log_2 56$). **10**: 1 bit; as mensagens são "cortejando" e "não-cortejando", e há duas mensagens. As complexidades de molécula e ritual são aqui irrelevantes.

8.5. **1**: *A A C B D D B C B C C B*. **2**: *a c d b d c d*. **3**: *b d c d b a d*. **4**: Sim. **5**: 10, 8, 7, 10, 11, 9, 8, x. **6**: 10, 8, 4, 3. — 1, — 1, 3, 0, 1, 1, — 1, ... **7**: $x = 2, 1, 2, -11, 11, -2, 16, \ldots$ e $y = 1, 4, -11, 13, -24 -13, -93, \ldots$ **8**: $x = \exp(-4t - \operatorname{sen} t)$. **9**: $x = 1/2\,(e^{t} + te^{t} - \cos t)$. **10**: x persegue a, e segue-o cada vez mais de perto.

8.6. **1**: Não; na tabela de transformações deve haver 108 linhas, de modo que cada coluna precisa ter 108 elementos; como apenas 100 são disponíveis, deve haver repetições. **2**: (i) 7, (ii) 5^{12}. **3**: Ajustando algum dispositivo como um velocímetro ou um taquímetro que emite um número proporcional à derivada no tempo. **4**: Não; pois se a saída fôr estacionária no zero (como sucederá se partir do zero) os valores de a' não são dedutíveis das transições de x, que são para todo a, $0 \rightarrow 0$.

8.7. **1**: Não conserva tôdas as distinções; um inversor perfeito é neste caso fundamentalmente impossível.

2:

(b,B)	$R\ R\ R$
(b,C)	$S\ S\ S$
(b,D)	(não ocorrerá)
(c,A)	$S\ S\ S$
(c,B)	$R\ R\ R$
(c,C)	(não ocorrerá)
(c,D)	$Q\ Q\ Q$
(d,A)	(não ocorrerá)
(d,B)	$Q\ Q\ Q$
(d,C)	$R\ R\ R$
(d,D)	$S\ S\ S$

3: Deve possuir diagrama dos efeitos imediatos $u \to x \to y$ com y emitindo valores de u dois passos adiante. x pode ser da forma

$\downarrow$	x_1	x_2	x_3	...
u_1	x_1	x_1	x_1	
u_2	x_2	x_2	x_2	
u_3	x_3	x_3	x_3	
...	etc.			

Se agora y tiver a forma

$\downarrow$	U_1	U_2	U_3	...
x_1	U_1	U_1	U_1	
x_2	U_2	U_2	U_2	
x_3	U_3	U_3	U_3	
...	etc.			

então o y emitirá letras maiúsculas correspondentes aos valores originais de u. Se os dois $(x + y)$ forem considerados como uma única máquina com estado (x,y), a transformação deve ser

$\downarrow$	(x_1,U_1)	(x_1,U_2)	(x_1,U_3)	...	(x_2,U_1)	(x_2,U_2)	(x_2,U_3)	...
u_1	(x_1,U_1)	(x_1,U_1)	x_1U_1	...	x_1U_2	x_1U_2	x_1U_2	
u_2	(x_2U_1)	x_2U_1	x_2U_1	...	x_2U_2	x_2U_2	x_2U_2	
u_3	(x_3U_1)	x_3U_1	x_3U_1	...	x_3U_2	x_3U_2	x_3U_2	
...	etc.			...	etc.			

Em geral, u_i leva (x_j,U_k) para (x_i,U_j), que vai, no passo seguinte para $(—, U_i)$, repetindo assim o u_i original.

8.8. 1: $p' = n$, $m' = c/d$; una pondo $d = n$ e $c = p$. 2: $p' = n$, $m' = 1/2\ (d - c) + 2$; una pondo $d = n$ e $c = p$. 3: $p'_1 = x$, $p'_2 = y$, $m'_1 = (c_1 + c_2)/2d_1$, $m'_2 = (c_2 - c_1)/2d_2$; una pondo $d_1 = x$, $d_2 = y$, $c_1 = p_1$, $c_2 = p_2$. 4: A equação não pode ser resolvida para a e b separadamente, *ou* a e b afetam a equação apenas na combinação $a \div b$ *ou* seus efeitos diferentes não aparecem de modo distinto na saída, e não podem ser portanto reconstituídos — são modos diferentes de expressar a mesma idéia básica. Observe que a razão desta impossibilidade está não na falta de engenhosidade adequada mas no fato de que a saída não *define* a entrada — a necessária informação simplesmente não se encontra lá. 5: O inversor precisa de velocímetros para fornecer $\dot{x}_1$ e $\dot{x}_2$ como saídas. Então qualquer máquina que forme as funções

$$a_1 = \frac{\dot{x}_1 x_2 - \dot{x}_2 - x_1}{x_1(x^2_2 - 1)} \quad \text{e} \quad a_2 = \frac{-\dot{x}_1 + \dot{x}_2 x_2 + x_1 x_2}{x^2_2 - 1}$$

emitirá a entrada original. Caso se requeira uma transformação efetiva, então (sendo as funções de x_1, etc. acima representadas por A_1 e A_2) a transformação $a'_1 = k\ (A_1 - a_1)$, $a'_2 = k\ (A_2 - a_2)$ proporcionará o comportamento requerido tão aproximado quanto se queira se tornarmos k positiva e suficientemente grande. (Ex. 8.5.10.) 6: — 2 não tem relação particular com (7,3), enquanto 4 tem, como provou a construção da tabela.

8.11. 1: t tem três estados; u tem dois. 2: t tem 3 estados; u não pode ter mais do que 6; u tem efetivamente 5. 3: T possui 2 estados; U também. 4: 3 estados. São (0,0,0,0), (0,0,1,0) e (0,1,0,1).

8.13. 1: Um bit por passo, pois r tem apenas dois estados. 2: Os números de estados distintos ocupados, em estados sucessivos, eram: Q: 9,4,3,3,3; R: 1,2,2,2,2; S: 1,1,2,3,5. 3: Porque o salto de 1 para 4 teria implicado um ganho em variedade de 3, enquanto R pode suprir apenas dois no máximo.

8.14. 2: O número de pesagens não pode, qualquer que seja o método, ser menor do que três. Pois a variedade a ser transmitida é de $\log_2 27$ bits, e o transmissor pode conduzir apenas $\log_2 3$ bits por passo.

8.15. 1: Quatro; a variedade de A leva o máximo tempo. 2: Quatro passos; (a resposta *deve* ser a mesma da do Ex. 1, pois as duas questões são efetivamente idênticas.) 3: três; o de y leva mais tempo. 4: dois passos.

8.17. 1: A estava em (3,2). (Sugestão: A'' estava em (— 1,0) e B'' em (1,0). 2: Sim; a saída permite que seja deduzida a seqüência de vetores-entrada, da qual a seqüência das primeiras componentes é a mensagem α. 3: Não; o movimento de Y qüência de vetores-entrada, da qual a seqüência das primeiras é simplesmente o de A com a metade da amplitude. 4: Se as letras a, b, etc. indicam os respectivos movimentos de A, B, etc. à direita e à esquerda de zeros adequados, com escala comum, então $l = 1/2\ (a - b)$, $n = 1/2\ (a \div b)$, $y = 1/2\ (l \div n)$ e $z = 1/2\ (-l + n)$, dos quais l e n são prontamente eliminados. "Decodificar" corresponde a resolver estas equações simultâneas para a e b, incógnitos, em têrmos de y e z, têrmos conhecidos.

9.2. 1: A transformação assim obtida é determinada; a forma de obtenção é irrelevante. 2: Como cada estado deve ir para *algum* estado, as probabilidades, e os números em cada coluna precisam somar no máximo 1. 3: Não. 4: 2^{10}, i. é. 1024. 5: Mais de uma seta pode emergir de cada ponto.

9.4. 1: As freqüências de transição efetivas são

↓	A	B
A	6	17
B	17	10

Como as probabilidades de cada coluna devem somar no máximo 1, a primeira coluna deve ser dividida por 23 e a segunda por 27. As probabilidades estimadas são pois

↓	A	B
A	0·26	0·63
B	0·74	0·37

(Tal é o sistema que foi de fato utilizado para gerar a trajetória no Ex. 1.)

4:

↓	A	B
A	0·2	0·5
B	0·8	0·5

9.5. 1: Estando sob o seixo, aí permaneceria. 2: B deve ser o papel (onde a môsca adere), e D o forno (onde nunca pára). 3: Do protocolo à matriz; o protocolo fornece uma única matriz, mas a matriz pode fornecer apenas um conjunto de protocolos. Ora, se a matriz está perdida, pode ser reconstruída a partir do protocolo, mas um protocolo perdido não pode ser restaurado a partir da matriz.

9.6. 1: (100,0,0), (25,75,0), (62,19,19), (32,61,7), etc. se tomada à unidade mais próxima. 3: A face 3 tende a subir quando face 4 tende a descer; portanto $x = 4$. 4: Considere 100 moléculas, e seja x dissociado das 100 A. Ignore as B. Cada A tem dois estados possíveis, dissociados ou não, e em cada intervalo de tempo apresenta as probabilidades de permanecer em seu estado ou mudar:

↓	Dissociado	Não-dissociado
Dissociado	0,999	0,01
Não-dissociado	0,001	0,99

5: Se x e y forem os números dissociados e não, respectivamente, então para o equilíbrio:

$$x = 0{,}999\,x + 0{,}01y$$
$$100 = x + y;$$

Logo, $x = 90\frac{10}{11}$. 7: Cada inseto pode estar apenas em um dos três; se houver n insetos, o número de populações distintas será $1/2\,(n + 2)\,(n + 1)$.

9.7. 1:

Após C:

↓	C	D
C	0	5
D	11	6

Após D:

↓	C	D
C	11	7
D	0	5

Assim, transições a partir de C são acentuadamente afetadas pelo que precede o C.

9.10. 1: $t'_1 = \frac{i}{x}\, t_1$. 2: Não. 3: Sim.

9.11. 1: As probabilidades são (até onde vai a evidência) 0,175 e 0,825; logo a entropia é de 0,67 bits. 2: As probabilidades são 1/52, 1/4, 19/26; de modo que a entropia é de 0,94 bits. 3: 2,6 bits. 4: 5,2 bits. 5: $2{,}6 \times n$ bits 6: 0.

9.12. 2: Sempre cai abaixo de 1 bit.

9.13. 1: O equilíbrio final se dá com todos em B; e qualquer seqüência torna-se eventualmente ... B B B B ... Esta não tem variedade, de modo que a entropia deve ser zero. 2: A entropia é calculada quando o todo está no equilíbrio terminal e neste caso o equilíbrio terminal não permite a hipótese "quando está em A".

9.16. 1: Sim, pois 62 é menor do que 3^{14}; 3^4 vale 81, de modo que quatro açúcares serão suficientes se escolhidos de modo adequado. 2: Nela todo número é igual, e.g. aquela do fim da S. 9.10.

9.17. 2: Deve no mínimo ser de 2000 bits por minuto, se as hipóteses forem corretas. 3: Cada dedo tem variedade de $\log_2 \downarrow 3$ em 1/300 min., e 300 $\log_2 3$ em 1 minuto; de modo que todos os 10 dedos, sendo independentes, possuem 3000 $\log_2 3$ bits em um minuto; portanto o limite é de 4800 bits/minuto. 4: 5540 símbolos/hora.

9.18. 1: *b* pode seguir apenas *a* ou *b*, não *d*; assim *Xb* deve ser *ab*; similarmente *Xc* deve ser *ac*; e *XX* deve ser *dX*.

9.19. 1: (i) $\downarrow \begin{matrix} A & B & C \\ 4 & 9 & 7 \end{matrix}$ (ii) $\downarrow \begin{matrix} A & B & C \\ 2 & 1 & 5 \end{matrix}$

2: Sòmente se as combinações de α e β forem restritas a três quaisquer dentre as quatro possíveis.

9.20. 1: Uma distorção, pois uma segunda inversão restaurará o original sem perda. 2: Uma distorção se cada tensão provoca uma freqüência distinta. 3: Uma corrupção, pois várias tensões suscitam a mesma saída (zero).

9.21. 1: H_1 é $\log_2 9$. H_2 é obtido a partir de

Símbolo recebido	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Probabilidade:	1/9	2/9	1/9	1/9	1/9	1/9	1/9	0	1/9

e vale 2,948; assim o equívoco é de 0,222 bits por símbolo. 2: Equívoco = 0; sim, as novas mensagens são transmitidas sem ambigüidade. 3: Não. 4: 0,00299. 5: A tabela de eventos e probabilidades é:

Célula Real	*L*	*L*	*M*	*M*
Diagnóstico	*L*	*M*	*L*	*M*
Probabilidade	0,9405	0,0095	0,00025	0,04975

(Determinam-se as probabilidades de maneira mais simples dividindo-se primeiro as 20.000 células em 19.000 e 1.000; e depois dividindo-se estas em células mal diagnosticadas e o restante; finalmente divida por 20.000) $H_1 = 0{,}365$ bits/célula; $H_2 = 0{,}324$ bits/célula. Assim o equívoco vale 0,041 bits/célula.

10.4. 1: Ao gato face a um rato morto, ou brincando com êle. 2: Se tal coisa fôsse possível, corresponderia ao gato fazendo algo que trouxesse o rato morto de volta à vida! 3: *C* é LETAL para *M* se nenhum dos $C(M_1), \ldots, C(M_k)$ estiver em $M_1, \ldots, M_k$.

10.5. (i) Temperatura e umidade; (ii) o oxigênio no sangue do alpinista e tudo o que depende do oxigênio; (iii) as direções dos raios luminosos que atravessam; (iv) a iluminação dos objetos que de outro modo seriam invisíveis após o pôr do sol (v) a temperatura da comida e, conseqüentemente, o grau de sua contaminação bacteriológica; (vi) a intensidade de iluminação das fôlhas da planta; (vii) a intensidade de iluminação da retina; (viii) a pressão (a altas intensidades) sôbre o solo; (ix) a pressão de contato, que é mantida a zero; (x) a distância entre o alvo e o obus que é pequena ou mantida no zero.

11.3. 1: $\downarrow \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ & \beta & \alpha \end{matrix}$ 2: Dado D, R assumiria o valor que satisfaz $37 = R - 2D$; portanto R deveria assumir o valor $37 + 2D$ 3: A diagonal principal (S.2.10) tem os resultados "derrapagem corrigida", as outras duas casas os resultados "derrapagem exagerada". 4: Zero — todos serão de c, qualquer que seja a variedade nas seleções de D 5: Sim.

11.4. 1: Sim.

2: $\downarrow \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \beta & \beta \text{ ou } \delta & \alpha & \alpha & \alpha \text{ ou } \delta \end{matrix}$

3: R simplesmente joga γ em tôdas as ocasiões, não importando o lance de D.
4: Sim, e êle deveria usar a transformação

$$\downarrow \begin{matrix} \text{Sr. A} & \text{Sra. B} & \text{Sr. C} \\ \text{Sherry} & \text{Gin} & \text{Sherry} \end{matrix}$$

11.11. 1: Sim. D tem uma variedade de 10 bits/seg, o nervo óptico pode transmitir isso 200 vêzes. 2: A capacidade disponível para a regulação é de 0,63 bits/seg por telégrafo e 5,65 bits/seg por roda do leme. Assim, evidentemente D não emite em geral mais do que 6,3 bits/seg. 3: Não, é grosseiramente insuficiente. D proporciona 10^7 bits por dia e a variedade transmitida ao general é no máximo de um setenta avos disto. 4: Não, pode emitir apenas $3{,}6 \times 10^5$ bits/dia.

11.14. 1:

↓	1	2	3
a	β	α	γ
b	α	γ	β
c	γ	β	α

2: D está ameaçado a transmitir a E em 2 bits/seg. A fim de reduzir isto a zero o canal $D \to R$ tem de transmitir a uma taxa não menor. 3: $C \to E$ veicula 20 bits/seg, portanto, $C \to R$ deve veicular no mínimo essa quantidade. 4: $R \to T$ deve transportar 2 bits/seg para neutralizar D (do Ex. 2.), e 20 bits/seg a partir de C; como êstes dois são independentes (os valores dos D e dos C não se correlacionam) a capacidade precisa ser no mínimo de 22 bits/seg.

12.8. 1:

↓	E	D
E	0	0,99
D	1	0,01

2: Os sistemas são quase isomórficos; β entretanto, por vêzes, saltará de A diretamente para D, e outras vêzes permanecerá em C para um passo. 3: As sucessivas probabilidades para a em cada passo são: 0, 3/4, 7/16 e 25/32; as probabilidades dos b são as restantes. 4: Pode-se obter a resposta pré-multiplicando o vetor coluna $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ pelo produto matricial prq; compare Ex. 2.16.3 e 12.8.4. 5: O nôvo sistema deve ter estados que são pares e. g. (b, e); logo terá seis estados. Determine agora as probabilidades de transição. Qual, por exemplo, é a da transição $(b, e) \to (a, f)$? Para que ela ocorra, b deve ir para a, e deve fazê-lo enquanto a outra componente está em e, i. e. em β. Com a entrada em β a probabilidade de $b \to a$ é de 0,9. Similarmente com b (i. e. δ) a probabilidade de $e \to f$ é de 0,3; assim a probabilidade de tôda a transição (para a qual ambos eventos independentes precisam ocorrer) é de 0,27. As outras probabilidades podem ser do mesmo modo determinadas, e a matriz é (omitindo-se os parênteses por razões de brevidade):

↓	*ae*	*be*	*ce*	*af*	*bf*	*cf*
ae	0,06	0,63	0,25	0,14	0,15	0,12
be	0,12	0,07	0,25	.	0,35	0,08
ce	0,02	.	.	0,56	.	0,20
af	0,24	0,27	0,25	0,06	0,15	0,18
bf	0,48	0,03	0,25	.	0,35	0,12
cf	0,08	.	.	0,24	.	0,30

6: Sim.

12.10. 1: Uma matriz possível é:

↓	1	2	3	4	5	6	7	8	G
1	.	1/3	.	.	.	.	.	.	.
2	1	.	1/2	.	.	.	.	.	.
3	.	1/3	.	.	.	1/2	.	.	.
4	.	.	.	.	.	.	1	.	.
5	.	1/3	.	1	.	.	.	.	.
6	.	.	1/2	.	.	.	.	.	.
7	.	.	.	.	.	.	.	.	.
8	.	.	.	.	1	.	.	.	.
G	.	.	.	.	.	1/2	.	1	1

12.11. 1: Sòmente *G*. 2: "quando em *a* ou *b* parece não saber onde está, e vagueia ao acaso; *c* é o único outro compartimento acessível de *a* para *b*; se o rato chega a *c* parece reconhecer aonde está porque então se dirige sempre resolutamente através de *d* e *e* para *f*, onde se detém — talvez foi sempre alimentado ali.

12.12. 1: (i) Sim, (ii)

↓	*B*	*G*
B	—	1/2
G	—	1/2

Não há transições após *B*.

2: Sim — para *minhas* variáveis essenciais!

12.14. 1: γ deve ser a identidade; β não contém 1 na sua diagonal principal.

12.17. 1: (i) 26; (ii) 52 (veja *Design for a Brain*, S. 23.2; no caso $p = 1/52$).

12.21. 1: Dois; a posição de *G* é completamente determinada pela posição de *P*, que tem uma; o ângulo de rotação de *J* dá um segundo. 2: Um dos modos seria deslocar V a meio caminho entre L e K. 3: Um meio seria re-orientar o tubo de ar de modo que descesse até V em vez de subir até V.

13.15. 1: 3 $\log_2 7$, i. e. 8,42 bits. 2: 3 $\log_2 91$, i. e. 19,52 bits. 3: 3,3 bits é o mínimo, pois apenas 10 combinações são *distintas*. 4: 1 bit; o número de estados e outros detalhes são irrelevantes. Pode-se verificar que a resposta *deve* ser 1 bit imaginando que estas são as duas únicas máquinas possíveis (como é dado), e depois imaginando que o projetista precisa enviar suas instruções por telégrafo, sem dúvida, não é necessário que êle pague muito, pois uma simples distinção de 1 bit basta para a instrução do receptor. 5: (i) 49.800 bits; (ii) 1,6 bits; não é de se esperar concordância, pois os valores não se referem a um sêlo mas a dois conjuntos diferentes de possibilidades. 6: $n \log_2 n$ bits. 7: $in \log_2 n$ bits.

13.17. 1: São removidas 19. 2: São removidas 26. 3: 4,75 bits caem para 3,00 de modo que 1,75 bits foram removidos. 4: Como a_1 pode ir para qualquer dos $n - 1$, e a_2 similarmente, o nôvo número de transformações é

$(n - 1)\ (n - 1)\ \ldots\ (n - 1)$ (n têrmos),

i. e. $(n - 1)^n$. Logarìtmicamente a variedade era $n \log_2 n$ e é agora $n \log_2 (n - 1)$, de maneira que a variedade removida pela restrição seja

$n \log_2 n - n \log_2 (n - 1)$.

5: 1,4 bits; mais precisamente é de $(1 + 1/2n + \ldots)\ log_2 e$ 6: A inspeção da k-ésima carta no maço de n fornece informação, ou tem entropia de,

$$-\frac{1}{n-k+1}\log\frac{1}{n-k+1}-\frac{n-k}{n-k+1}\log\frac{n-k}{n-k+1}$$

se a extração da carta ocorre. Se o êxito aconteceu antes a entropia será 0. Os dois eventos (e suas entropias) têm probabilidades $(n - k + 1)/n$ e $(k - 1)/n$. Assim a entropia média ponderada será

$$-\frac{1}{n}\left(\log\frac{1}{n-k+1}+(n-k)\log\frac{n-k}{n-k+1}\right)$$

que vale $\dfrac{1}{n}\ [(n - k + 1) \log (n - k + 1) - (n - k)$

$\log (n - k)]$ 7: A cada extração a entropia é a mesma — a das probabilidades $1/n$ e $\dfrac{n-1}{n}$, e a informação média vale: $$\frac{1}{n}(n \log n - (n-1)\log(n-1)).$$

14.1. 1: É, sem dúvida, necessária uma adequada entrada suplementar de água. A saída provém daí, por meio de uma torneira, controlada, por sua vez, pela entrada. Um método possível é utilizar pistão ou foles de modo que a pressão suba quando 0,1 ou 2 ml/seg; são forçados através de um orifício estreito, movendo a torneira à posição apropriada.

Índice

(Os números se referem às páginas. O número em **negrito** indica uma definição.)

ÍNDICE

COLEÇÃO ESTUDOS

1. *Introdução à Cibernética,* W. Ross Ashby
2. *Mimesis,* Erich Fuerbach
3. *Comportamento,* D. Broadbent

SÍMBOLO S.A. INDÚSTRIAS GRÁFICAS
rua general flores 518 522 tel 51 6173
são paulo capital
brasil

Próximo lançamento Estudos
Mimesis
Erich Auerbach

Embora o presente livro se proponha a ser uma introdução acessível, de maneira alguma pretende reduzir-se a um simples bate-papo sôbre cibernética; foi escrito para os que desejam iniciar-se no seu conhecimento, para os que querem alcançar um efetivo e eficaz domínio do assunto. Partindo de lugares-comuns e de conceitos bem conhecidos, prossegue, passo a passo, mostrando como tais conceitos podem ser precisados e desenvolvidos até desembocarem em temas como realimentação, estabilidade, regulação, ultra-estabilidade, informação, codificação, ruído e outros tópicos da cibernética.

EDITÔRA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

EDITÔRA PERSPECTIVA