

GRADUAÇÃO DE TAXAS DE MORTALIDADE APLICADAS À POPULAÇÃO DO ESTADO DO CEARÁ: UMA ABORDAGEM BAYESIANA

Jaime Phasquinell Lopes Cavalcante
Universidade Federal do Ceará - UFC
jaimephasquinell@gmail.com

Luciana Moura Reinaldo
Universidade Federal do Ceará - UFC
lucianareinaldo@ufc.br

Resumo: O aumento da sobrevivência da população brasileira juntamente com o crescimento das discussões previdenciárias são instrumentos fomentadores para estudos sobre a composição estrutural da mortalidade, gerando uma forte relevância para as teorias demográficas. Nesse contexto, os indicadores de mortalidade apresentam impacto direto sobre o custo dos planos de saúde, previdência e seguros. O presente estudo tem como objetivo graduar e apresentar tábuas de mortalidade para a população do Estado do Ceará sob a perspectiva da utilização de modelos bayesianos. O mesmo é justificado pelo rigor apresentado pela inferência Bayesiana, em que há uma maior descrição e confiabilidade dos parâmetros utilizados. Assim, assume-se que o número de mortes em cada idade segue uma distribuição Poisson, de modo que as taxas de mortalidade para as idades consideradas no estudo serão graduadas por meio de métodos estatísticos bayesianos paramétricos. A modelagem apresentou resultados convergentes, com estimativas aproximadas da real taxa de mortalidade da população exposta ao risco em ambos os sexos. Além disso, as mesmas foram comparadas com tábuas de mortalidades utilizadas no mercado segurador, permitindo verificar sua adequabilidade. Posto isso, conclui-se que a proposta apresentada corrobora com estudos anteriores e reforça o processo de utilização e elaboração de tábuas de mortalidade bayesianas.

Palavras-chave: Graduação; Mortalidade; Ceará; Estatística; Bayes.

Abstract: The increased survival of the population along with the growth of social security discussions are promoters tools for studies on the structural composition of mortality, generating a strong relevance to the demographic theories. In this context, mortality indicators have a direct impact on the cost of health, and pension insurance plans. The present study aims to graduate and present mortality tables for the population of the State of Ceará from the perspective of using Bayesian models. The methodology is justified by the rigor presented by the Bayesian inference by the fact that is a greater description and reliability of the parameters used. Thus, it is assumed that the number of deaths at each age follows a Poisson distribution, so that the mortality rates for the ages considered in the study will be graded using parametric Bayesian statistical methods. The modeling showed convergent results, with approximate estimates of the real mortality rate of the population exposed to risk in both sexes. In addition, they were compared with mortality tables used in the insurance market, allowing to verify their suitability. It is concluded that the proposal presented corroborates with previous studies and reinforces the process of using and elaborating Bayesian mortality tables.

Keywords: Graduation; Mortality; Ceará; Statistic; Bayes.

1. Introdução

O aumento da sobrevivência da população brasileira juntamente com o crescimento das discussões previdenciárias são instrumentos fomentadores para estudos sobre a composição estrutural da mortalidade, gerando uma forte relevância para as teorias demográficas. Nesse contexto, os indicadores de mortalidade apresentam impacto direto sobre o custo dos planos de saúde, previdência e seguros.

Ainda com o foco no setor previdenciário, é possível estabelecer uma relação entre o custo estimado dos benefícios de aposentadora e as probabilidades de morte. Dessa forma, quanto menores forem as taxas de mortalidade, maior será a expectativa de vida do beneficiário, impactando diretamente no aumento dos gastos previdenciários. Logo, é primordial que as taxas de mortalidade estejam alinhadas com a experiência demográfica dos segurados.

Em linha com Ribeiro, Reis e Barbosa (2013), evidencia-se a ausência de um consenso sobre qual tábua de mortalidade é mais adequada para ser utilizada. Isso se dá em virtude do nível e da estrutura da mortalidade, dado que são variantes no tempo e grupo populacional para grupo populacional. No cenário brasileiro, verifica-se a adoção de uma ampla variedade de tábuas de mortalidade por parte das entidades seguradoras e previdenciárias, além do fato de que a própria legislação brasileira indica tábuas de mortalidade que apresentam experiências de mortalidade antigas ou de outras populações.

Um outro aspecto a ser destacado versa sobre o processo de construção de uma tábua de mortalidade de acordo com a experiência de uma certa população exposta ao risco a partir das taxas brutas de mortalidade para cada idade de tal população. A partir disso, o comportamento de tais taxas brutas geralmente apresenta-se um tanto errático, evidenciando a falta de suavidade e monotonicidade crescente em função da idade, posto que é esperado tal comportamento para a mortalidade humana a partir de certa idade.

Esse comportamento é induzido através do processo de suavização das taxas brutas de mortalidade que ao passo que evita o crescimento abrupto de tais taxas, busca a manutenção da monotonicidade das mesmas, além de contornar a questão da falta de informação nas idades em que não é observado a presença de expostos ao risco. Tal procedimento é chamado graduação de taxas brutas de mortalidade em que, através do mesmo, ocorre a extração das probabilidades de morte da população em cada idade que

serão utilizadas para a composição da tábua de mortalidade, instrumento fundamental para cálculos e avaliações atuariais.

Assim, o presente estudo tem como objetivo graduar e apresentar tábuas de mortalidade para a população do Estado do Ceará sob a perspectiva da utilização de modelos bayesianos. O estudo é justificado pelo rigor apresentado pela inferência Bayesiana, em que há uma maior descrição e confiabilidade dos parâmetros utilizados. Tal abordagem para o processo de graduação lida com a estimação estatística de parâmetros desconhecidos, em que são associados à compreensão inicial (distribuição a priori) sobre os parâmetros estudados (NEVES; MIGON, 2006). A relevância do processo utilizado é embasada por estudos anteriormente publicados, inclusive no Brasil, é possível destacar Gordon (1998), Mendonza et al. (2001), Neves e Migon (2006), Pirollo (2010), entre outros.

2. Revisão de Literatura

2.1. A inferência bayesiana e o processo de graduação de tábuas de mortalidade

Em diversas do conhecimento a utilização de uma população para a realização de estudos é praticamente impossível, fazendo com que os pesquisadores recorram a utilização de uma parte acessível dessa população, denominada amostra. Não obstante, as conclusões dos experimentos oriundos da utilização de amostras são realizadas através de um processo de inferência. Tal processo recorre a utilização de modelos probabilísticos que descrevem a estrutura dos dados como funções de valores de interesse conhecidas, além de parâmetros geralmente desconhecidos.

A contrariedade do processo de inferência estatística se entra no fato de que se considera um valor de interesse desconhecido (θ) com possíveis valores dispostos em um espaço paramétrico (Θ), em que θ pode ser um escalar, um vetor ou uma matriz e H a informação inicial que se dispõe (GAMERMAN, 1996).

Em linha com o autor supracitado, a informação H pode ser, em termos probabilísticos, resumida em $p(\theta|H)$. Dito isto, a relação sobre θ será completa se H for suficientemente informativo. Caso a questão de interesse requerer uma precisão elevada na resposta e H não se apresenta como suficiente, a mesma deverá ser aumentada. Para tal é necessário a observação de uma variável X relacionada a θ . Reforça-se que a observação de X é condicionada a uma distribuição amostral de X , dada por $p(x|\theta, H)$.

Posteriormente a observação de X , o quantitativo de informação é acrescido e a informação sobre $p(\theta)$ pode ser novamente resumida como $p(\theta|x, H)$.

Ao denotar por $p(x|\theta, H)$ e $p(\theta|H)$ como as densidades de $(X|\theta, H)$ e $(\theta|H)$, tem-se:

$$p(\theta|x, H) = \frac{p(x, \theta|H)}{p(x|H)} = \frac{p(x, \theta|H)p(\theta|H)}{p(x|H)}, \quad (1)$$

em que:

$$p(x|H) = \int_{\theta}^{\infty} p(x, \theta|H) d\theta .$$

A equação (1) representa o Teorema de Bayes e gera a regra de atualização da probabilidade sobre θ , tendo seu início em $p(\theta)$, uma distribuição a priori, e chegando a $p(\theta|x)$, uma distribuição posteriori. Ademais, posto que $p(x|H)$ independe de θ e H é comum a todos os demais termos, o mesmo pode ser omitido. Com isso, a forma usual da equação (1) é dada por:

$$p(\theta|x) \propto p(x|\theta)p(\theta).$$

O processo bayesiano de graduação admite que a estimação dos parâmetros desconhecidos está conjugada ao conhecimento dos dados iniciais (distribuição a priori) a respeito dos parâmetros em estudo. Logo os mesmos são tidos como valores aleatórios e as inferências ocorrem sobre a distribuição a posteriori dos parâmetros de interesse.

É por meio de tal processo que as probabilidades de morte são calculadas. A inferência se dá por meio da implementação de um algoritmo capaz de gerar amostras da distribuição a posteriori dos parâmetros conhecido como *Monte Carlo Markov Chain* (MCMC), em que se trata de um processo iterativo baseado em cadeias de Markov. As mesmas são produzidas por meio de algoritmo Metropolis-Hastings (MH) (Hastings, 1970). Ressalta-se que uma extensão do algoritmo MH é o Amostrador de Gibbs (GEMAN E GEMAN, 1987). O mesmo é implementado e amplamente utilizado em softwares como o WinBUGS (SPIEGELHALTER et al., 2003).

Para o procedimento de graduação das tábuas de mortalidade deve-se utilizar o MCMC combinado com a verossimilhança Poisson para as mortes observadas (d_i) com as prioris (θ_i), sendo geradas amostras preditivas do número de mortes a cada passo do processo iterativo (Pirollo, 2010). Os estimadores bayesianos dos parâmetros de interesse mais comuns para um processo de graduação são a média, mediana e moda da distribuição preditiva, de modo que na inferência MCMC, trata-se da média das amostras a posteriori.

2.2. Modelos Bayesianos de graduação

O presente estudo apresenta em sua fundamentação teórica paramétrica (global), assumindo que o comportamento da mortalidade segue uma lei de mortalidade, ou seja, baseada em uma certa função de sobrevivência válida para todas as idades. Além disso, destaca-se a existência de modelos não paramétricos (locais), em que a mortalidade é regida pelo próprio comportamento dos dados, inexistindo a adequação a uma lei de mortalidade específica.

As técnicas de graduação globais com estrutura hierárquica bayesiana apresentadas são propostas em Neves (2005), em que se objetivou graduar as taxas brutas de mortalidade em função da força de mortalidade.

Em linha com o autor supracitado, as leis de mortalidade de Gompertz e Makeham foram adaptados para a abordagem bayesiana, constituindo-se como modelos globais. A obtenção das probabilidades de morte são objetivo final da graduação. Logo, deve-se considerar a quantidade central de expostos ao risco (e_i) como constantes conhecidas e as iterações via MCMC para que, dessa forma, sejam obtidas as estimativas das probabilidades de óbito nas respectivas idades em estudo. Essa relação pode ser expressa por:

$$d_i^r | \theta_i \sim \text{Poisson}(e_i \theta_i), \quad (2)$$

em que $\theta_i^r = d_i^r / e_i$ compreende as estimativas das forças de mortalidade futuras e $q_{x+i-1}^r = 1 - \exp(-\theta_i^r)$ como o valor das probabilidades de morte futuras.

2.2.1. Modelo com força de mortalidade tipo Gompertz

De acordo com Sherris (1999), o modelo é regido pela Lei de Gompertz de modo que a força de mortalidade é crescente e caracterizada por uma progressão geométrica, o modelo é expresso por:

$$\mu_x = \beta c^x,$$

com $\beta > 0$, $c \geq 1$ e $x \geq 0$ e x representando a idade em anos. Além do exposto, em Neves (2005), considera-se que $\theta_i = \beta c^{Z_i}$, com $Z_i = x + i - 1$, representando as classes as idades e com i representando as classes de idade.

Conforme Neves (2005), tal estrutura paramétrica assume a forma de um modelo linear generalizado (MLG) bayesiano embasado pelo modelo clássico proposto por Haberman e Renshaw (1996). A função de ligação canônica da distribuição Poisson é

dada por $\log(\lambda_i)$, em seguimento com a estrutura do MLG (DOBSON 1994). Posto isso, a estrutura hierárquica bayesiana do modelo é dada por:

$$d_i|\theta_i \sim \text{Poisson}(\lambda_i), \lambda_i = e_i\theta_i, \text{ com } e_i \text{ conhecidos e } i=1, \dots, \infty;$$

$$\log(\lambda_i) = \log(e_i) + \log(\beta) + Z_i \log(c);$$

$$\theta_i = \beta c^{Z_i};$$

$$\beta \sim \text{Normal}(0; 1000)I_{(0, \infty)}(\beta);$$

$$c \sim \text{Normal}(0; 1000)I_{(1, \infty)}(c)$$

Com predição feita através de (2). Para o modelo em questão, destaca-se que os valores iniciais para a implementação do modelo são tratados no software WinBUGS como nós estocásticos associados aos parâmetros β e c .

2.2.2. Modelo com força de mortalidade tipo Makeham

O modelo do tipo Makeham diferencia-se do modelo anterior pela adoção de outra função de sobrevivência, ou seja, adota a Lei de Makeham como lei de mortalidade. O modelo é representado por:

$$\mu_x = \alpha + \beta c^x,$$

Com $\alpha \geq 0$, $\beta > 0$, $c \geq 1$ e $x \geq 0$ e x representando a idade em anos. Além do exposto, em Neves (2005), considera-se que $\theta_i = \alpha + \beta c^{Z_i}$, com $Z_i = x + i - 1$, representando as classes as idades e com i representando as classes de idade. Assim como o modelo anterior o modelo com força de mortalidade tipo Makeham apresenta a forma de um modelo linear generalizado (MLG) bayesiano com função de ligação canônica da distribuição Poisson. Assim, a estrutura hierárquica bayesiana do modelo é dada por:

$$d_i|\theta_i \sim \text{Poisson}(\lambda_i), \lambda_i = e_i\theta_i, \text{ com } e_i \text{ conhecidos e } i=1, \dots, \infty;$$

$$\log(\lambda_i) = \log(e_i) + \log(\alpha + \beta c^{Z_i});$$

$$\theta_i = \alpha + \beta c^{Z_i};$$

$$\alpha \sim \text{Normal}(0; 1000)I_{(0, \infty)}(\alpha)$$

$$\beta \sim \text{Normal}(0; 1000)I_{(0, \infty)}(\beta);$$

$$c \sim \text{Normal}(0; 1000)I_{(1, \infty)}(c)$$

Com predição feita através de (2). Além do mais, o modelo considera os três parâmetros descritos como nós estocásticos no WinBUGS e as forças de mortalidade são consideradas como nós lógicos em função de tais parâmetros.

2.2.3. Comparação entre modelos de graduação

A avaliação da adequabilidade dos modelos, tornando possível eleger o modelo mais eficiente para a modelagem dos dados, consiste na utilização do DIC (*Deviance Information Criterion*) desenvolvido por Spiegelhalter (1997). De acordo com o autor esse critério é uma generalização bayesiana do método AIC (*Akaike Information Criterion*), caracterando-se como uma métrica bayesiana de ajustamento, penalizado por um termo adicional de complexidade. O mesmo é utilizado para comparar modelos hierárquicos complexos, sob os quais o número de parâmetros pode até mesmo ultrapassar o número de observações.

Nesse contexto, a comparação entre modelos elege como modelo mais adequado aquele cujo DIC apresenta o menor valor, determinando, assim, o modelo de melhor ajuste aos dados e melhor predição.

2.3. O modelo estático global para construção da tábua de mortalidade bayesiana

Embasado no pressuposto de que o modelo obedece a uma força de mortalidade do tipo Makeham, o modelo é similar ao apresentado na seção anterior com uma alteração na estrutura da função de verossimilhança (NEVES, 2005). Dessa forma, a função de verossimilhança para tal modelo é dada por:

$$l(\theta|D_i) \propto \prod_{i=1}^T \prod_{t=1}^{\infty} \theta_i^{d_{i,t}} \exp(-e_{i,t}\theta_i)$$

Dado a estrutura acima, tem-se que θ_i é a força de mortalidade para a classe de idade i , T o número de períodos de observação com $e_{i,t}$ e $d_{i,t}$ já definidos anteriormente.

Dessa forma, resumidamente, o modelo estático global apresenta uma estrutura hierárquica bayesiana é definida por:

$$d_{i,t}|\theta_i \sim \text{Poisson}(\lambda_{i,t}), \lambda_i = e_{i,t}\theta_i, \text{ com } e_{i,t} \text{ conhecidos e } i=1, \dots, \infty, t=1, \dots, T;$$

$$\log(\lambda_{i,t}) = \log(e_{i,t}) + \log(\alpha + \beta\delta^z);$$

$$\theta_i = \alpha + \beta\delta^z;$$

$$\alpha \sim \text{Normal}(0; 1000)I_{(0, \infty)}(\alpha)$$

$$\beta \sim \text{Normal}(0; 1000)I_{(0, \infty)}(\beta);$$

$$\delta \sim \text{Normal}(0; 1000)I_{(1, \infty)}(\delta)$$

Com predição feita através de:

$$d_{i,t}|\theta_i \sim \text{Poisson}(e_{i,t}\theta_i)$$

$$\theta_{i,T+1} = \frac{\sum_{t=1}^T d_{i,t}^r}{\sum_{t=1}^T e_{i,t}}$$

Além disso, $q_{x+i-1,T+1} = 1 - \exp(-\theta_{i,T+1})$.

3. Metodologia

O presente estudo buscou aplicar a metodologia paramétrica apresentada por Neves (2005) para a realização da graduação da mortalidade da população Cearense dos anos de 2008 a 2012. Dessa forma, os dados referentes à mortalidade foram provenientes do Departamento de Informática do Sistema Único de Saúde (DATASUS) e extraídos através do software TabWin (desenvolvido pelo DATASUS), enquanto que os quantitativos populacionais foram oriundos do Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE). Assim, aplicou-se o processo de graduação levando em consideração a taxa central de expostos (e_i) em cada idade (compreendidas entre 18 e 100 anos) de cada ano em estudo para os grupos de sexo: masculino, feminino e ambos os sexos. O mesmo procedimento foi aplicado para a construção da tábua de mortalidade. Buscando garantir uma maior precisão aos dados referentes aos óbitos, aplicou-se a correção dos sub-registros tomando as estimativas resultantes do estudo apresentado em Queiroz et al. (2017). Além disso, buscou-se realizar a comparação entre as tábuas estimadas por meio do processo bayesiano apresentado com tábuas utilizadas pelo mercado segurador brasileiro.

A implementação dos modelos foi realizada por meio do software WinBUGS. O mesmo apresenta-se como uma versão interativa do Windows para o programa BUGS (*Bayesian Inference Using Gibbs Sample*) (Spiegelhalter et al., 2003), programa destinado à aplicação da Inferência Bayesiana em problemas estatísticos, usando o amostrador de Gibbs. O modelo com força de mortalidade tipo Gompertz teve sua implementação realizada em aproximadamente 40 segundos, enquanto que o modelo com força de mortalidade do tipo Makeham foi implementado em aproximadamente 55 segundos. Finalmente, o modelo estático global para construção da tábua de mortalidade levou 5 minutos. Reforça-se que os processos de implementação foram realizados do mesmo computador.

4. Aplicação e resultados

4.1. Análise inicial dos dados

É possível verificar por meio da Tabela 1 o comportamento crescente das taxas brutas de mortalidade para o período analisado.

Tabela 1. Taxas brutas de mortalidade 2008 – 2012.

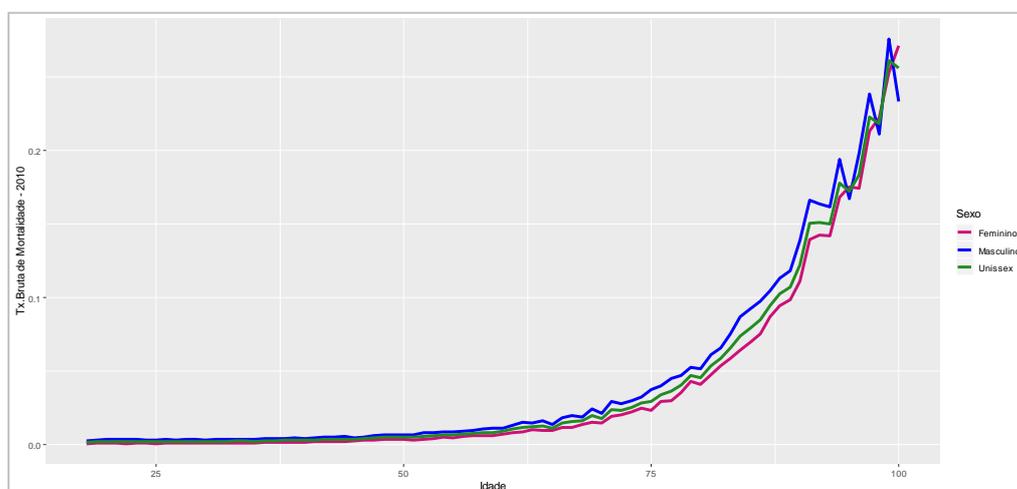
Ano	Taxa Bruta Unissex	Taxa Bruta Masculina	Taxa Bruta Feminina
2008	0,00510	0,00597	0,00427
2009	0,00517	0,00601	0,00436
2010	0,00519	0,00615	0,00427
2011	0,00561	0,00661	0,00466
2012	0,00566	0,00678	0,00460

Fonte: Elaborado pelos autores.

Em linha com o esperado para a população, observou-se que o comportamento da mortalidade masculina, para o período em estudo, foi significativamente superior aos grupos unissex e feminino.

Além disso, tomando como referência o ano de 2010, é possível verificar para o comportamento da mortalidade por idade em cada grupo. Nesse sentido, observa-se que a partir dos 89 anos o comportamento da mortalidade da população Cearense apresenta forte oscilação, principalmente no grupo masculino (Figura 1).

Figura 1: Taxas brutas de mortalidade população Cearense – 2010



Fonte: Elaborado pelos autores.

Outro aspecto é a inversão da probabilidade de morte da população feminina nas idades mais avançadas, passando a ser em algumas idades superior a masculina.

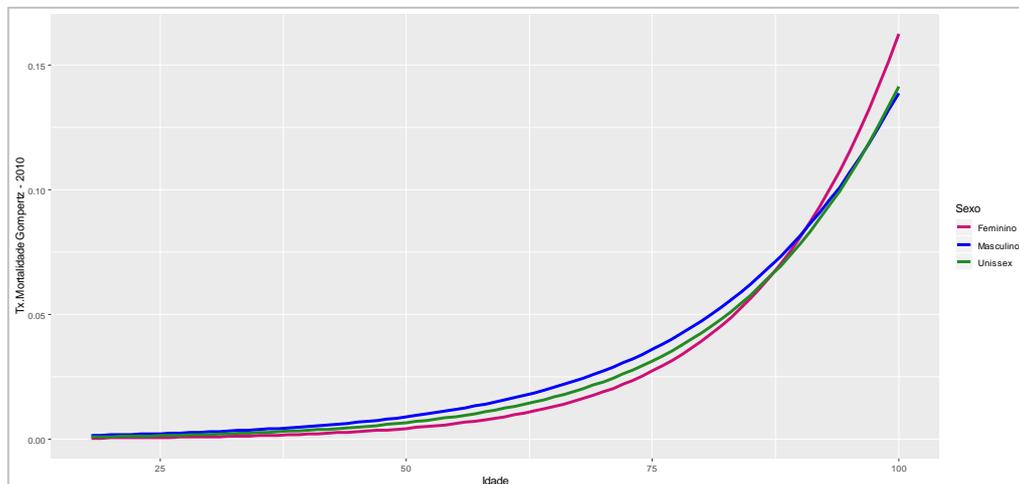
4.2. Modelos Bayesianos de graduação

4.2.1. Modelo com força de mortalidade tipo Gompertz

As taxas graduadas de acordo com o modelo proposto, evidenciaram em todos os períodos (2008 a 2012) um comportamento aproximado da estrutura original da mortalidade para a população, exceto nas idades mais longínquas, em que a taxa de

mortalidade feminina apresentou um índice elevado. Tal fato pode ser observado por meio da Figura 2.

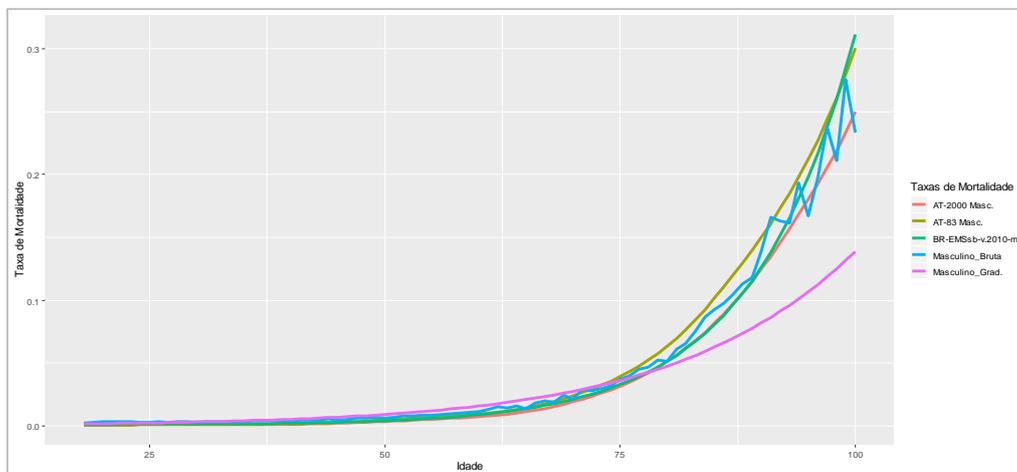
Figura 2: Taxas de mortalidade Gompertz – 2010



Fonte: Elaborado pelos autores.

Além disso, quando comparada com taxas de mortalidades provenientes de outras tábuas, as taxas graduadas pelo modelo com força de mortalidade de tipo

Figura 3: Comparação das taxas de mortalidade – sexo masculino 2010



Fonte: Elaborado pelos autores.

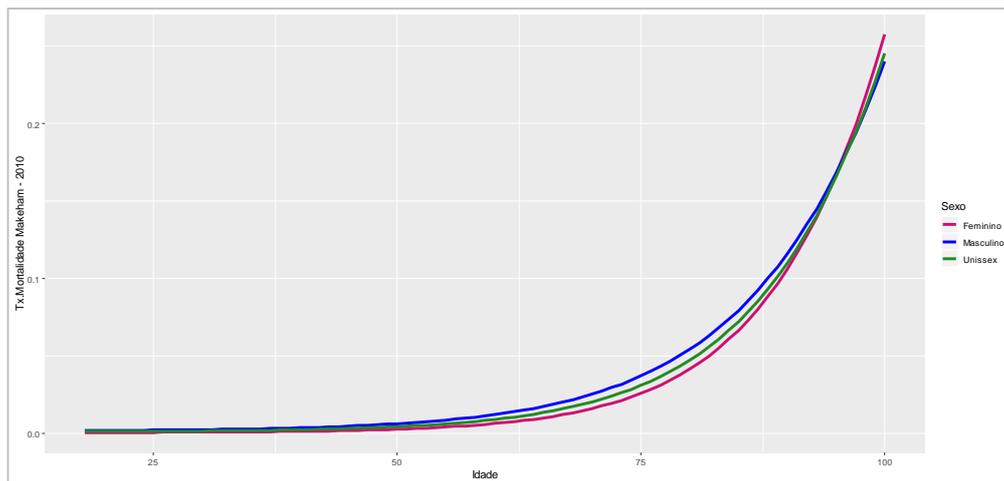
Gompertz com estrutura hierárquica bayesiana para ambos os sexos não apresentou um bom desempenho. Essa inadequabilidade é apresentada na Figura 3, considerando-se a graduação feita para o sexo masculino no ano de 2010

4.2.2. Modelo com força de mortalidade tipo Makeham

O modelo de graduação bayesiano pautado na força de mortalidade do tipo Makeham evidenciou um ajuste mais aproximado ao comportamento das taxas brutas de mortalidade para todos os anos em análise. Novamente, tomando por base o ano de

2010, é possível realizar inferências semelhantes as encontradas na estrutura original das taxas de mortalidade. O alcance da modelagem permitiu a ocorrência do comportamento monotônico dos dados, tornando as probabilidades crescentes em relação às idades. Tal fato pode ser visualizado na Figura 4.

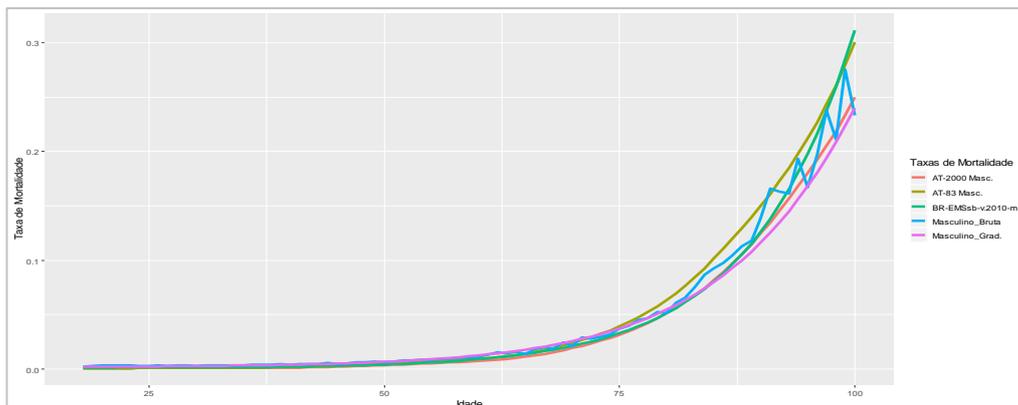
Figura 4: Taxas de mortalidade Makeham – 2010



Fonte: Elaborado pelos autores.

Outro aspecto analisado versou sobre a adequabilidade da modelagem proposta frente ao comportamento das tábuas de mortalidade atualmente vigentes para os grupos masculinos e femininos. Com isso, focando nas idades avançadas, as taxas graduadas pelo modelo com força de mortalidade do tipo Makeham bayesiano apresentaram proximidade com aos valores contidos nas tábuas BR-EMS e At-2000, sendo as taxas graduadas relativamente mais conservadoras a partir dos 88 anos.

Figura 5: Comparação das taxas de mortalidade – sexo masculino 2010



Fonte: Elaborado pelos autores.

Ilustrativamente, a Figura 5 apresenta a comparação entre as taxas brutas, graduadas pelo processo bayesiano e tábuas atualmente utilizadas pelo mercado segurador para o sexo masculino no ano de 2010.

4.2.3. Comparação entre modelos de graduação

A comparação entre os modelos propostos levou em consideração o DIC, em que se observou a relação entre a verossimilhança qualidade do ajuste, dessa forma quanto menor DIC melhor o modelo. Os modelos globais propostos para cada grupo de sexo e ano analisados apresentaram DIC's distintos, mas para as estruturas analisadas o modelo com força de mortalidade tipo Makeham apresentou-se como o modelo de melhor ajuste. Corroborando com a teoria, a sobreposição do modelo de Makeham frente ao de Gompertz pode ser justificada pela presença de um parâmetro constante responsável por considerar óbitos referentes às causas não naturais (fatores externos).

4.3. O modelo estático global para construção da tábua de mortalidade bayesiana

Levando em consideração o processo de ajuste dos modelos de graduação e, conseqüentemente, selecionado o modelo de Makeham para a construção da tábua de mortalidade unissex estática A mesma foi elaborada levando-se em consideração uma janela temporal de cinco anos (2008 a 2012) encontra-se no Apêndice I.

5. Considerações finais

O presente estudo buscou apresentar a utilização dos modelos bayesianos de graduação para as taxas de mortalidade da população residente do Estado do Ceará, através de MCMC. Posto isso, as probabilidades de óbitos foram modeladas supondo que as mesmas seguem uma distribuição de Poisson, conforme apresentado por Neves (2005), bem como comparadas com tábuas de mortalidade praticadas no mercado segurador.

Além disso, por meio de modelos bayesianos globais, foi possível estimar o comportamento da mortalidade para os grupos de sexo e para as idades compreendidas entre as idades 18 e 100, para os anos de 2008 a 2012. Ao comparar as estimativas geradas pelos modelos com força de mortalidade do tipo Gompertz e Makeham, o critério de seleção utilizado (DIC), elegeu o modelo com força de mortalidade do tipo Makeham como o mais adequado, que posteriormente o mesmo foi utilizado na construção da tábua de mortalidade.

Nesse sentido, conclui-se que a modelagem apresentada garante uma boa qualidade de ajuste aos dados utilizados permitindo que os valores apresentados pela modelagem e estimativas convergissem para os resultados confiáveis e aceitáveis da mortalidade da população no estado do Ceará.

Por fim, conclui-se que a modelagem atendeu aos objetivos traçados pelo estudo e que dado o bom ajuste, pode ser utilizada como uma maneira alternativa na graduação de taxas e construção tábuas de mortalidade.

Referências

DOBSON, A.J. **An Introduction to Generalized Linear Models**. Chapman & Hall, London, 1994.

GAMERMAN, D. Simulação estocástica via cadeias de Markov. **ABE**, 1996.

GEMAN, S., & GEMAN, D. Stochastic relaxation, Gibbs distributions, and the Bayesian restoration of images. **In Readings in Computer Vision** (pp. 564-584)., 1987.

GORDON, R. J. **Applying the Gibbs sampler and the metropolis algorithm to bayesian graduation of mortality rates**. M.Sc. dissertation. New York: New York University, 1998.

HABERMAN, S., & RENSHAW, A. E. Generalized linear models and actuarial science. **The Statistician**, 407-436., 1996.

MENDOZA, M.; MADRIGAL, A. M.; GUTIÉRREZ-PEÑA, E. Predictive mortality graduation and the value at risk: a bayesian approach. Working Paper DE-C01.5, **ITAM**, México, 2001.

NEVES, C. R.. **Graduação Bayesiana de Taxas de Mortalidade**. Funenseg, Caderno de Seguros–Teses, 10, 28. 2005.

NEVES, C. R.; MIGON, H. S. Graduação bayesiana de taxas de mortalidade: uma aplicação na cobertura de sobrevivência e na avaliação da provisão matemática. **Revista Brasileira de Risco e Seguro**, v. zero, p. 85-104, 2006.

PIROLLO, G., JR. **Graduação Byesiana e projeção de taxas de mortalidade aplicadas à populações de fundos de pensão do setor elétrico**. Dissertação de mestrado, Universidade Federal do Paraná, Curitiba, PR, Brasil., 2010.

QUEIROZ, B. L. et al. Estimativas do grau de cobertura e da mortalidade adulta (45q15) para as unidades da federação no Brasil entre 1980 e 2010. **Revista Brasileira de Epidemiologia**, [S.L], v. 20, n. 1, p. 21-33, mai. 2017.

RIBEIRO, A. J. F., REIS, E. A., & BARBOSA, J. B. Construção de tábuas de mortalidade de inválidos por meio de modelos estatísticos bayesianos. **Revista Brasileira de Estudos de População**, 27(2), 317-331, 2013.

SPIEGELHALTER, D.J.; RICHARDSON, S.; GILKS, W.R. **Markov Chain Monte Carlo in Practice**. Chapman & Hall, London, 1997.

SPIEGELHALTER, D. et al. Bayesian measures of model complexity and fit. Journal of the **Royal Statistical Society: Series B (Statistical Methodology)**, 64(4), 583-639., 2002.

SPIEGELHALTER, D. et al. **WinBUGS User Manual Version 1.4**. Cambridge University, 2003.

Apêndice

Apêndice I. Tábua de mortalidade bayesiana estática

Idade	Prob. Morte Estimada (Unisex)	Intervalo de Probabilidade	
		2,5%	97,5%
18	0,00222	0,00207	0,00238
19	0,00236	0,00220	0,00253
20	0,00251	0,00233	0,00270
21	0,00266	0,00249	0,00285
22	0,00283	0,00265	0,00301
23	0,00301	0,00283	0,00319
24	0,00319	0,00299	0,00339
25	0,00339	0,00319	0,00360
26	0,00361	0,00340	0,00381
27	0,00383	0,00360	0,00405
28	0,00407	0,00384	0,00430
29	0,00432	0,00408	0,00455
30	0,00459	0,00434	0,00484
31	0,00487	0,00462	0,00512
32	0,00518	0,00489	0,00546
33	0,00549	0,00522	0,00578
34	0,00584	0,00553	0,00615
35	0,00620	0,00589	0,00652
36	0,00659	0,00627	0,00691
37	0,00700	0,00666	0,00733
38	0,00743	0,00708	0,00778
39	0,00790	0,00753	0,00826
40	0,00838	0,00799	0,00877
41	0,00890	0,00853	0,00927
42	0,00945	0,00904	0,00988
43	0,01004	0,00962	0,01046
44	0,01066	0,01022	0,01110
45	0,01132	0,01086	0,01178
46	0,01202	0,01157	0,01248
47	0,01277	0,01228	0,01324
48	0,01356	0,01305	0,01407
49	0,01440	0,01386	0,01496
50	0,01528	0,01470	0,01588

51	0,01624	0,01564	0,01683
52	0,01723	0,01656	0,01792
53	0,01830	0,01764	0,01895
54	0,01943	0,01872	0,02018
55	0,02062	0,01990	0,02135
56	0,02190	0,02115	0,02268
57	0,02324	0,02243	0,02408
58	0,02467	0,02383	0,02553
59	0,02619	0,02534	0,02702
60	0,02780	0,02692	0,02875
61	0,02951	0,02861	0,03040
62	0,03133	0,03031	0,03236
63	0,03324	0,03219	0,03430
64	0,03529	0,03419	0,03644
65	0,03744	0,03622	0,03866
66	0,03972	0,03849	0,04096
67	0,04214	0,04079	0,04347
68	0,04471	0,04334	0,04609
69	0,04742	0,04604	0,04892
70	0,05032	0,04877	0,05187
71	0,05336	0,05193	0,05477
72	0,05660	0,05491	0,05834
73	0,06002	0,05825	0,06182
74	0,06360	0,06172	0,06551
75	0,06744	0,06558	0,06935
76	0,07152	0,06947	0,07362
77	0,07576	0,07349	0,07812
78	0,08031	0,07769	0,08298
79	0,08508	0,08267	0,08747
80	0,09015	0,08737	0,09290
81	0,09547	0,09289	0,09822
82	0,10110	0,09814	0,10420
83	0,10710	0,10390	0,11020
84	0,11340	0,11010	0,11670
85	0,12000	0,11640	0,12360
86	0,12700	0,12330	0,13070
87	0,13430	0,13020	0,13840
88	0,14200	0,13740	0,14680
89	0,15020	0,14500	0,15530
90	0,15880	0,15300	0,16470
91	0,16780	0,16160	0,17390
92	0,17730	0,17000	0,18420
93	0,18710	0,17910	0,19490
94	0,19780	0,18840	0,20700
95	0,20870	0,19820	0,21920
96	0,22000	0,20950	0,23080
97	0,23190	0,21910	0,24470
98	0,24450	0,22980	0,25950
99	0,25780	0,24060	0,27480
100	0,27130	0,25080	0,29210

Fonte: Elaborado pelos autores.