Terceira avaliação de Análise no $\mathbb{R}^n$ - 05/12/2024

Professor: Victor Hugo Gonzalez Martinez

Nome: ____

1. a) Defina conjunto de medida nula.
   b) Mostre que união enumerável de conjuntos de medida nula têm medida nula.
2. Seja $f : A \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ uma função integrável sobre o bloco m-dimensional A. Prove que:
   i) Se $f = 0$ q.s. em A, então $\int_A f = 0$.
   ii) Se f é não negativa e $\int_A f = 0$, então $f = 0$ q.s. em A.
3. Utilizando o Teorema de Fubini, encontre o volume do tetraedro limitado pelos planos coordenados e o plano $2x + y + z = 4$.
4. Seja $f : U \to \mathbb{R}^m$ de classe C^1 no aberto $U \subset \mathbb{R}^m$. Se, no ponto $a \in U$, a derivada $f'(a) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ é um isomorfismo, prove que
$$\lim_{r\to 0} \frac{\operatorname{vol} f(B[a;r])}{\operatorname{vol} B[a;r]} = |\det f'(a)|.$$
5. $\Omega = [-1,1] \times [-1,1]$ e $f, g \in C^2(\Omega)$ tais que $f|_{\partial\Omega} = g|_{\partial\Omega} = 0$. Defina $\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$.
   Mostre que
$$\int_\Omega [f(x,y)\Delta g(x,y) - g(x,y)\Delta f(x,y)]\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0.$$

6. (Extra) Seja $m \geq 1$, $r > 0$ e $B_{m+1}(0,r)$ a bola aberta de centro em 0 e raio r em $\mathbb{R}^{m+1}$ na topologia euclidiana. Denote por $V_m(r)$ o volume de $B_m(0,r)$. Resolva os seguintes itens:

   i) Mostre que $x = (x_1, \dots, x_m, x_{m+1}) \in B_{m+1}(0,r) \Leftrightarrow -r < x_{m+1} < r$ e $(x_1, \dots, x_m) \in B_m\left(0, \sqrt{r^2 - x_{m+1}^2}\right)$.

   ii) Defina $A : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ por $Ax = rx$. Utilize o Teorema de Mudança de Variáveis para mostrar que $V_m(r) = r^m V_m(1)$.

   iii) Utilize o Teorema de Fubini para mostrar que $V_{m+1}(r) = V_m(1) \int_{-r}^{r} (r^2 - x_{m+1}^2)^{\frac{m}{2}} \, dx_{m+1}$. (Dica: Utilize os itens i) e ii))

   iv) Mostre que $V_{m+1}(r) = 2V_m(1) \int_0^r (r^2 - t^2)^{\frac{m}{2}} \, dt$.

   v) Considere $I_m = \int_0^1 (1 - t^2)^{\frac{m}{2}} \, dt$. Faça a mudança de variável $t = \operatorname{sen}(x)$ para concluir que $I_m = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(x))^{m+1} dx$. (Dica: $0 = \operatorname{sen}(0)$ e $1 = \operatorname{sen}(\frac{\pi}{2})$.)

   vi) Mostre que $I_1 = \frac{\pi}{4}$. (Dica: $\cos^2(t) = \frac{1+\cos(2t)}{2}$)

   vii) Mostre que $I_2 = \frac{2}{3}$. (Dica: $\cos^3(t) = \operatorname{sen}'(t) \cos^2(t)$ e integração por partes).

   viii) Mostre que $I_3 = \frac{3\pi}{16}$. (Dica: $\cos^4(t) = \operatorname{sen}'(t) \cos^3(t)$ e integração por partes).

   ix) Conclua que $V_4(r) = \frac{\pi^2}{2} r^4$.

   Acabamos de calcular o volume de uma bola de dimensão 4. ☺

Formulário

Definição: Dizemos que uma propriedade vale quase sempre (q.s.) quando o conjunto dos para os quais a propriedade falha, é de medida nula.

Teorema (Integração por Partes) Sejam $f, g : [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ duas funções de classe C^1 em $[a,b]$, isto é f, g, f' e g' são contínuas em $[a,b] \subset \mathbb{R}$. Então,

$$\int_a^b f'(x)g(x)dx = (f(b)g(b) - f(a)g(a)) - \int_a^b f(x)g'(x)dx.$$

Mudança de Variáveis Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua no intervalo fechado e limitado $[a,b]$ e $g : [c,d] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função derivável em $[c,d] \subset \mathbb{R}$ com derivada contínua tal que $g([c,d]) \subset [a,b]$. Então,

$$\int_{g(c)}^{g(d)} f(t)dt = \int_c^d f(g(x))g'(x)dx.$$