Segunda avaliação de Topologia - 17/06/2025

Professor: Victor Hugo Gonzalez Martinez

Nome: ____

1. Prove os seguintes itens:

   (a) Um espaço topológico X é normal se, e somente se, dados um fechado A e um aberto U com $A \subseteq U$ existe um aberto V tal que $A \subseteq V \subseteq \overline{V} \subseteq U$.

   (b) Mostre que se X é normal e A e B são fubconjuntos fechados e disjuntos de X, então existem abertos U_A e U_B tais que $A \subseteq U_A$, $B \subseteq U_B$ e $\overline{U_A} \cap \overline{U_B} = \emptyset$.

2. Prove os seguintes itens:

   (a) Seja X um espaço topológico e $A \subset X$. Tem-se que $x \in \overline{A}$ se, e somente se, existe um filtro $\mathscr{F}$ em X tal que $A \in \mathscr{F}$ e $\mathscr{F} \to x$.

   (b) Seja $f : X \to Y$ um aplicação e $\mathscr{F}$ um filtro. Defina $(f(\mathscr{F}))_0 = \{f(U) : U \in \mathscr{F}\}$. Mostre que $(f(\mathscr{F}))_0$ é uma base de filtro em Y e exiba o filtro $f(\mathscr{F})$ gerado por $(f(\mathscr{F}))_0$.

   (c) Uma aplicação $f : X \to Y$ é contínua em $x_0 \in X$ se, e somente se, sempre que $\mathscr{F} \to x_0$ tem-se que $f(\mathscr{F}) \to f(x_0)$.

3. Mostre que um espaço topológico conexo e localmente conexo por caminhos é conexo por caminhos.

4. Enuncie e demonstre o Teorema de Tychonoff, expondo todos os resultados que foram utilizados na sua demonstração.