Segunda avaliação de Análise Funcional - 21/02/2025

Professor: Victor Hugo Gonzalez Martinez

Nome: ____

1. Enuncie, demonstre e explique a importância de algum dos seguintes resultados:
   - Teorema de Banach-Alaoglu-Bourbaki;
   - Lema de Helly;
   - Teorema de Goldstein;
   - Teorema de Kakutani.

2. a) Disserte sobre a construção da topologia fraca em espaços topológicos. Considere agora E um espaço de Banach de dimensão infinita e construa as topologias $\sigma(E, E')$ em E e $* - \sigma(E', E)$ em E' e exiba uma base de vizinhanças de um ponto em cada uma dessas topologias.

   b) Mostre que $(E, \sigma(E, E'))$ é um espaço de Hausdorff.

3. Seja E um espaço normado de dimensão infinita e

$$S_E = \{x \in E : \|x\| = 1\}.$$

   Mostre que

$$\overline{S}^{\sigma(E,E')} = B_E = \{x \in E : \|x\| \leqslant 1\}.$$

   Conclua que $\sigma(E, E') \subsetneq \tau_{\|\cdot\|_E}$.

4. Defina $C = \{\xi = (\xi_i)_{i=1}^{\infty} \in \ell^p : |\xi_j| \leq \frac{1}{j}, j \in \mathbb{N}\}$. Assuma que $1 \leq p < \infty$. Mostre que toda sequência que converge fraco em C também converge em norma.

5. a) Defina espaços reflexivos. Por que não estudamos espaços algebricamente reflexivos?

   b) Sejam E e F espaços de Banach e $T : E \to F$ um isomorfismo vetorial topológico. Mostre que E é reflexivo se, e somente se, F é reflexivo.

   c) Seja E uma espaço de Banach reflexivo. Prove que toda sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ limitada em E possui uma subsequência que converge na topologia fraca $\sigma(E, E')$. (Enuncie todos os resultados que utilizou.)