

Professor: Victor Hugo Gonzalez Martinez

Nome: _____

1. (1,0) Considere $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (y + x^2)(x + 1) = 0\}$.
 - (a) E é aberto?
 - (b) E é fechado?
 - (c) E é compacto?
 - (d) E é convexo?
 - (e) E é conexo?
2. (1,0) Seja $K \subset \mathbb{R}^m$. Prove que K é compacto se e somente se toda função contínua $f : K \rightarrow \mathbb{R}^n$ é limitada.
3. (2,0) Sejam $S, T \subset \mathbb{R}^n$ conjuntos não vazios. Defina a distância $d(S, T)$ entre S e T pondo

$$d(S, T) = \inf\{|x - y| : x \in S, y \in T\}.$$

Sejam $K \subset \mathbb{R}^n$ compacto e $F \subset \mathbb{R}^n$ fechado. Prove que existem $x_0 \in K$ e $y_0 \in F$ tais que $d(K, F) = |x_0 - y_0|$. Conclua que se $K \cap F = \emptyset$ então $d(K, F) > 0$.

4. (2,0) Mostre que toda função contínua $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Q}$ é constante.
5. (2,0) Seja $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ uma bijeção. Mostre que f é homeomorfismo se, e somente se, para todo $Y \subset \mathbb{R}^n$ tem-se $f(\overline{Y}) = \overline{f(Y)}$.
6. (2,0) Seja $X \subset \mathbb{R}^n$ enumerável. Prove que $\mathbb{R}^n \setminus X = \{x \in \mathbb{R}^n : x \notin X\}$ é conexo por caminhos.