



UFPE

Mateus Fabrício da Silva

**Formas Diferenciais e Cohomologia de de Rham:**  
Uma introdução elementar à topologia das variedades

Recife  
2025

Mateus Fabrício da Silva

**Formas Diferenciais e Cohomologia de de Rham:**  
Uma introdução elementar à topologia das variedades

Trabalho de conclusão de curso submetido ao programa de bacharelado em matemática da Universidade Federal de Pernambuco.

**Orientador:** Victor Hugo Gonzalez Martinez

Recife  
2025



## **AGRADECIMENTOS**

Aos meus pais, Maria José e Fábio, que sempre me apoiaram.

Aos meus avós, Fátima e Humberto, por me receberem de braços abertos em Recife ao longo de toda a graduação.

Ao Prof. Dr. Victor Hugo Gonzalez Martinez pela orientação, por sua paciência, e pelas conversas sobre matemática.

Ao corpo docente do departamento de matemática da UFPE, alicerce de mais uma etapa da minha formação, e à UFPE, pela infraestrutura que possibilitou isso.

Ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico, o CNPq, cujo apoio financeiro aos meus projetos de iniciação científica foi fundamental para a minha permanência na graduação.

## RESUMO

Esse trabalho consiste em uma concisa introdução às formas diferenciais e à relação delas com a topologia de superfícies, ou variedades diferenciáveis. Essa relação, expressa pela cohomologia de de Rham é apresentada como uma ferramenta para a distinção de espaços topológicos. Assim, ela representa uma poderosa ferramenta para a solução de problemas de topologia, dada a dificuldade de se demonstrar que dois espaços topológicos são distintos. Como aplicação da teoria desenvolvida, são demonstrados o teorema da invariância da dimensão, que afirma que a noção de dimensão de uma variedade topológica está bem definida e, em particular, que  $\mathbb{R}^n$  e  $\mathbb{R}^m$  são topologicamente distintos quando  $n \neq m$ ; e o teorema de Jordan-Brouwer, que consiste em uma generalização do teorema da curva de Jordan, de que toda curva fechada no plano e sem autointerseção o divide em duas componentes.

**Palavras-chaves:** Variedades Diferenciáveis. Topologia das Variedades. Formas Diferenciais. Cohomologia.

## ABSTRACT

The present work is a brief introduction to differential forms and their relationship to the topology of surfaces and manifolds. The de Rham cohomology is an expression of this relationship, which here is introduced as a technique to distinguish between topological spaces. It constitutes a powerful tool in topology, since showing that two topological spaces are distinct through other methods can be rather difficult. As an application of the results here presented, it is proved the theorem of topological invariance of dimension, which states that the dimension of a topological manifold is well defined and, in particular, that  $\mathbb{R}^n$  and  $\mathbb{R}^m$  are topologically different spaces when  $n \neq m$ ; and the Jordan-Brouwer theorem, which is a generalization of the Jordan Curve Theorem, that any non self-intersecting loop in the plane divides it in two components.

**Keywords:** Differentiable Manifolds. Topology of Manifolds. Differential Forms. Cohomology.

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>7</b>
<b>2</b>	<b>PRELIMINARES</b>	<b>9</b>
2.1	SUPERFÍCIES E VARIEDADES	9
<b>2.1.1</b>	<b>Superfícies</b>	<b>9</b>
<b>2.1.2</b>	<b>Variedades</b>	<b>11</b>
<b>2.1.3</b>	<b>Alguns fatos técnicos sobre variedades</b>	<b>15</b>
2.2	O CÁLCULO DAS FORMAS DIFERENCIAIS	17
<b>2.2.1</b>	<b>Tensores</b>	<b>17</b>
<b>2.2.2</b>	<b>Tensores alternados</b>	<b>21</b>
<b>2.2.3</b>	<b>Formas Diferenciais</b>	<b>23</b>
<b>2.2.4</b>	<b>Orientação</b>	<b>26</b>
<b>2.2.5</b>	<b>Integral</b>	<b>27</b>
2.3	COMPLEXOS DE COCADEIAS	29
<b>3</b>	<b>COHOMOLOGIA DE DE RHAM</b>	<b>31</b>
3.1	A RELAÇÃO ENTRE FORMAS DIFERENCIAIS E TOPOLOGIA	31
3.2	DEFINIÇÕES GERAIS	34
3.3	O LEMA DE POINCARÉ E A INVARIÂNCIA HOMOTÓPICA	36
3.4	COMPUTAÇÕES USANDO A INVARIÂNCIA HOMOTÓPICA	40
3.5	O TEOREMA DE MAYER-VIETORIS	41
3.6	COMPUTAÇÕES USANDO A SEQUÊNCIA DE MAYER-VIETORIS	45
<b>4</b>	<b>APLICAÇÕES</b>	<b>49</b>
4.1	TEOREMA DA INVARIÂNCIA DA DIMENSÃO	49
4.2	O TEOREMA DE JORDAN-BROUWER	50
<b>5</b>	<b>CONCLUSÕES</b>	<b>55</b>
	<b>REFERÊNCIAS</b>	<b>56</b>

## 1 INTRODUÇÃO

No presente trabalho, é realizada uma introdução às formas diferenciais e a uma das maneiras com que elas se relacionam com a topologia de seus ambientes: a cohomologia de de Rham. Procurou-se realizar uma apresentação com pré-requisitos matemáticos mínimos para a leitura. Apesar de realizar uma introdução às variedades diferenciáveis, a ênfase desse trabalho está nas propriedades das superfícies.

Enquanto a teoria é válida para ambas, em virtude de toda superfície ser uma variedade e toda variedade poder ser realizada como uma superfície; somente são apresentados exemplos com objetos que são naturalmente superfícies.

No Capítulo 2, são apresentados os pré-requisitos para estudo da cohomologia de de Rham. As noções de superfície e de variedade são revisadas, com esta última podendo ser ignorada pelos leitores não interessados na formulação mais abstrata dos conceitos. Não há perda de generalidade pela exclusão das variedades suaves. Mais importante do que essas noções para o presente trabalho é a noção de forma diferencial, também introduzida nesse capítulo.

As formas diferenciais são apresentadas como um tipo específico de campo tensorial. Assim, as noções de tensor covariante e de tensor alternado são introduzidas a fim de se definir as formas diferenciais. Depois disso, são definidas as integrais sobre formas e a operação de diferenciação exterior, abrindo as portas para a demonstração do Teorema de Stokes. O capítulo é encerrado com uma rápida apresentação da linguagem algébrica utilizada subsequentemente.

É no Capítulo 3 que é introduzida a cohomologia de de Rham. Após as definições iniciais, o Lema de Poincaré é demonstrado como parte do processo necessário para a demonstração de que os grupos de cohomologia de de Rham são invariantes topológicos. Em certo sentido, o Lema de Poincaré é uma afirmação sobre a trivialidade dos grupos de cohomologia do espaço euclidiano. Já a invariância topológica é expressa como uma invariância sob equivalências homotópicas, ou tipo de homotopia. Em seguida, é apresentada uma ferramenta computacional fundamental: o Teorema de Mayer-Vietoris, demonstrado como consequência do lema do zigue-zague, proveniente da álgebra comutativa.

Finalmente, no Capítulo 4 são apresentadas duas aplicações da teoria apresentada no Capítulo 3. A primeira aplicação é o Teorema da Invariância da Dimensão, que mostra que a dimensão de uma variedade topológica é um conceito intrínseco ao objeto: uma  $m$ -variedade topológica não pode ser simultaneamente uma  $n$ -variedade topológica quando  $n \neq m$ . A segunda aplicação é uma generalização do Teorema da Curva de Jordan, que afirma que uma curva fechada e sem autointerseções divide o plano em duas regiões conexas, intuitivamente, “Dentro” e “Fora”.

O Teorema de Jordan-Brouwer, que é essa generalização, substitui a curva sem autointerseções do Teorema da Curva de Jordan por um mergulho topológico de uma hipersuperfície (uma superfície de dimensão  $n$  em  $\mathbb{R}^{n+1}$ ) que é conexa e orientável. A cohomologia aparece nesse problema como um mecanismo para relacionar o que acontece em uma versão suave desse

teorema, demonstrada com as ferramentas de análise no  $\mathbb{R}^n$ , com a sua versão topológica. Por isso, o teorema é demonstrado em duas partes principais, e alguns lemas associados.

## 2 PRELIMINARES

Introduziremos aqui as noções fundamentais usadas no desenvolvimento da teoria da cohomologia de de Rham. Na seção 2.1, a noção de superfície é revisada e a noção de variedade diferenciável é introduzida. Na seção 2.2, são apresentadas as formas diferenciais. A seção 2.3 introduz a terminologia algébrica utilizada no capítulo seguinte.

Presumimos conhecimento de topologia geral e análise no  $\mathbb{R}^n$  na leitura desse capítulo. Conhecimento de álgebra abstrata básica é pressuposto na seção 2.3.

### 2.1 SUPERFÍCIES E VARIEDADES

Baseados no conceito de superfície regular em  $\mathbb{R}^n$ , introduziremos o conceito de variedade diferenciável como a versão intrínseca dessa noção, isto é, independente da existência de um espaço ambiente. Para nós, a importância do conceito de variedade está nas estruturas adicionais, os fibrados, onde são definidos nosso objeto de interesse.

O leitor pouco interessado nas variedades pode assumir, sem perda de generalidade, que todos os resultados da seção 2.2 a seguir dizem respeito a superfícies. O termo variedade será usado quando conceitos intrínsecos estão em consideração. Caso contrário, será usado o termo superfície para significar tanto superfície quanto variedade.

Isso é justificado pelo fato de que toda superfície é uma variedade e, reciprocamente, pelo Teorema do Mergulho de Whitney (cf. (LEE, 2013)), toda variedade pode ser realizada como uma superfície em um espaço euclidiano de dimensão suficientemente alta.

#### 2.1.1 Superfícies

**Definição 2.1.1.** Um subconjunto  $M$  de  $\mathbb{R}^n$  é uma  $k$ -superfície regular de classe  $C^r$  ( $r \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ ) quando, para cada  $p \in M$ , existem um aberto  $V$  de  $\mathbb{R}^n$  e uma aplicação bijetiva  $\varphi : U \subseteq \mathbb{R}^k \rightarrow M \cap V \subseteq \mathbb{R}^n$  de classe  $C^r$  cujo posto é constante e igual a  $k$ . Chamamos a aplicação  $\varphi$  de uma parametrização de  $M$  em torno de  $p$ .

Nesse caso, dizemos que a dimensão de  $M$  é  $r$  e sua codimensão é  $n - r$ . Superfícies regulares de codimensão 1 são chamadas de hiperfícies.

Quando as parametrizações  $\varphi$  podem ter como domínio um subconjunto aberto (na topologia de subespaço) do semiespaço superior

$$\mathbb{H}^n = \{(x^1, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n : x^n \geq 0\},$$

dizemos que  $M$  trata-se de uma superfície com bordo. Nesse caso, o que significa dizer que  $\varphi : U \subseteq \mathbb{H}^k \rightarrow M \subseteq \mathbb{R}^n$  é diferenciável de classe  $C^r$ ? Quando  $p \in U$  é um ponto interior, a

noção de diferenciabilidade é a usual. Quando  $p \in U$  é um ponto do bordo

$$\partial\mathbb{H}^n = \{(x^1, \dots, x^k) \in \mathbb{R}^k : x^k = 0\},$$

dizemos que  $\varphi$  é de classe  $C^r$  em  $p$  quando admite uma extensão de classe  $C^r$  a uma vizinhança de  $p$  em  $\mathbb{R}^n$ .

A inversa de uma parametrização é chamada de uma carta. Denotamos uma carta por  $(U, \varphi)$ , onde  $U$  é a imagem da parametrização  $\varphi^{-1}$ . Nesse trabalho, dá-se preferência ao uso de cartas por consistência com as variedades diferenciáveis. Além disso, também suporemos que todas as superfícies são suaves, isto é, de classe  $C^\infty$ .

**Proposição 2.1.1.** *Sejam  $\varphi : U \subseteq \mathbb{R}^k \rightarrow M \subseteq \mathbb{R}^n$  e  $\psi : V \subseteq \mathbb{R}^k \rightarrow M \subseteq \mathbb{R}^n$  duas parametrizações (suaves) da superfície  $M$  tais que  $W = \varphi(U) \cap \psi(V) \neq \emptyset$ . Então,  $\varphi^{-1} \circ \psi : \psi^{-1}(\varphi(U) \cap \psi(V)) \rightarrow \mathbb{R}^k$  é suave.*

*Demonstração.* Seja  $p \in U$  um ponto tal que  $\varphi(p) \in W$ . A matriz jacobiana de  $\varphi$  é

$$D\varphi_p = \begin{bmatrix} \frac{\partial\varphi^1}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial\varphi^1}{\partial x^k} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial\varphi^k}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial\varphi^k}{\partial x^k} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial\varphi^n}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial\varphi^n}{\partial x^k} \end{bmatrix}$$

Sem perda de generalidade, suponhamos que o menor superior é não nulo. Definimos

$$\begin{aligned} \Phi : \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ (x^1, \dots, x^n) &\longmapsto (\varphi^1(x^1, \dots, x^k), \dots, \varphi^k(x^1, \dots, x^k), x^{k+1}, \dots, x^n). \end{aligned}$$

A sua matriz jacobiana é

$$D\Phi_p = \begin{bmatrix} \frac{\partial\varphi^1}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial\varphi^1}{\partial x^k} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial\varphi^1}{\partial x^k} & \cdots & \frac{\partial\varphi^k}{\partial x^k} & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{\partial\varphi^1}{\partial x^k} & \cdots & \frac{\partial\varphi^k}{\partial x^k} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial\varphi^n}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial\varphi^n}{\partial x^k} & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix},$$

cujo determinante é

$$\frac{\partial(\varphi^1, \dots, \varphi^k)}{\partial(x^1, \dots, x^k)} \neq 0.$$

Pelo teorema da função inversa, existem abertos  $U_0$  e  $V_0$  tais que  $\Phi : U_0 \subseteq U \times \mathbb{R}^{n-k} \rightarrow V_0$  é um difeomorfismo suave. Então,  $\Phi^{-1} \circ \psi|_{\psi^{-1}(V_0)} = \varphi^{-1} \circ \psi|_{\psi^{-1}(V_0)}$  é uma aplicação suave. Como  $\varphi^{-1} \circ \psi$  é suave em uma vizinhança de cada ponto de  $U \cap \varphi^{-1}(W)$ , concluímos que a aplicação de transição  $\varphi^{-1} \circ \psi$  é suave.  $\square$

**Definição 2.1.2.** O espaço tangente de  $p$  em  $M$ , denotado por  $T_pM$ , é a imagem da derivada de  $\varphi : U \subseteq \mathbb{R}^k \rightarrow V \subseteq \mathbb{R}^n$  em  $p$ . Assim,

$$T_pM = \text{im } D\varphi_p.$$

Geometricamente, pensamos nele como a variedade afim que passa pelo ponto  $p \in M$ .

**Definição 2.1.3.** Seja  $M$  uma  $k$ -superfície regular. Uma aplicação  $F : M \rightarrow \mathbb{R}^m$  é dita ser suave se, para toda parametrização  $\varphi : U \subseteq \mathbb{R}^k \rightarrow M$ , a aplicação composta  $F \circ \varphi$  é suave.

Uma discussão mais detalhada sobre superfícies pode ser encontrada em (LIMA, 2014b), (LIMA, 2014a), e (DO CARMO, 2005).

## 2.1.2 Variedades

A definição de variedade diferenciável tem origem em se destacar as propriedades abstratas básicas satisfeitas por superfícies. Primeiro, notamos que uma superfície em  $\mathbb{R}^n$  é um espaço topológico, munido com a topologia induzida pelo ambiente. Essa noção nos leva à primeira definição:

**Definição 2.1.4.** Um conjunto  $M$  é dito ser uma  $k$ -variedade topológica quando:

1. É um espaço de Hausdorff: um espaço topológico tal que, para quaisquer  $p, q \in M$  distintos, existem abertos  $U$  e  $V$  tais que  $p \in U$ ,  $q \in V$  e  $U \cap V = \emptyset$ .
2. Tem uma base enumerável.
3. É localmente euclidiano: para todo  $p \in M$ , existem um aberto  $U \subseteq M$  e um homeomorfismo  $\varphi : U \rightarrow V$  entre  $U$  e um subconjunto aberto  $V \subseteq \mathbb{R}^k$ . Cada um desses homeomorfismos é chamado de uma carta de  $M$ , e denotamos  $\varphi : U \rightarrow V$  por  $(U, \varphi)$ .

Em princípio, a noção de dimensão de uma variedade topológica é uma artificialidade da definição. Mostraremos na Seção 4.1 que uma  $m$ -variedade topológica não pode ser uma  $n$ -variedade topológica a não ser que  $m = n$ . Ou seja, a dimensão de uma variedade topológica está bem definida.

O segundo elemento da definição de variedade diferenciável, ou suave, está em observar a importância da Proposição 2.1.1 e elevá-la à definição do objeto:

**Definição 2.1.5.** Um atlas  $C^k$  ( $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ ) sobre uma  $n$ -variedade topológica  $M$  é uma coleção  $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$  de cartas de  $M$  tal que:

1. A coleção dos domínios  $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$  é uma cobertura aberta de  $M$ .

2. Dados  $\alpha, \beta \in A$ , então  $U_\alpha \cap U_\beta = \emptyset$  ou a aplicação de transição

$$\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1} : \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$$

é diferenciável de classe  $C^k$ . Quando essa propriedade vale para duas cartas, dizemos que elas são compatíveis.

A coleção de todos os atlas suaves de  $M$  é um conjunto parcialmente ordenado por inclusão. Dado um atlas de  $M$ , há um único atlas maximal que o contém. Esse atlas maximal é chamado de uma estrutura diferenciável. Uma variedade  $n$ -diferenciável de ordem  $C^k$ , ou simplesmente uma  $n$ -variedade  $C^k$ , é uma  $n$ -variedade topológica  $M$  munida de um atlas  $C^k$  maximal  $\mathcal{A}$ . Diremos que a variedade é suave quando é de classe  $C^\infty$ .

Uma carta suave  $(U, \varphi)$  de  $M$  é simplesmente um elemento do atlas maximal do qual  $M$  é munida.

Toda superfície é uma variedade de modo natural como consequência da Proposição 2.1.1. Reciprocamente, toda variedade pode ser realizada como uma superfície em um espaço euclidiano de dimensão suficientemente alta.

**Definição 2.1.6.** Uma aplicação  $F : M \rightarrow N$  entre variedades suaves é dita ser suave em  $p \in M$  se existem cartas suaves  $(U, \varphi)$  de  $M$ , com  $p \in U$ , e  $(V, \psi)$  de  $N$  tais que  $F(U) \subseteq V$  e  $\psi \circ F \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \rightarrow \psi(V)$  é suave. Se  $F$  é suave em todos os pontos de  $M$ , dizemos simplesmente que  $F$  é suave.

Quando uma aplicação suave tem codomínio  $\mathbb{R}$ , chamaremos-a de uma função suave. Assim, o termo “função” é mais especializado do que os termos “mapa” e “aplicação” na presente discussão.

Não é difícil mostrar que essa definição é independente da escolha das cartas. É uma consequência direta dos mapas de transição serem suaves.

A definição intrínseca de variedade não deixa claro como definir vetores tangentes. Para isso, interpretaremos os vetores como operadores que atuam sobre funções suaves: dada uma função suave  $f$ , a ação de um vetor  $v$  sobre  $f$  é a derivada direcional

$$\frac{\partial f}{\partial v} = \left. \frac{d}{dt} f(x + tv) \right|_{t=0}.$$

Isso estabelece vetores como um certo tipo de aplicação.

**Definição 2.1.7.** Sejam  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  um aberto e  $p \in U$ . A álgebra das funções suaves definidas em  $U$  é denotada por  $C^\infty(U)$ . Uma derivação em  $p$  é uma aplicação

$$v : C^\infty(U) \rightarrow \mathbb{R}$$

que é linear e satisfaz à regra de Leibnitz:

$$v(f \cdot g) = f(p) \cdot v(g) + g(p) \cdot v(f)$$

para todos  $f, g \in C^\infty(U)$ .

Cada vetor geométrico  $v \in T_p\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^n$  determina uma derivação

$$v : C^\infty(U) \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$f \longmapsto \frac{\partial f}{\partial v}(p) = \langle \text{grad } f, v \rangle.$$

Ela consiste na associação da derivada direcional de  $f$  na direção de  $v$  em  $p$  para cada função suave  $f$ .

Como essa definição não faz referência ao ambiente no qual os vetores se encontram (compare com a Definição 2.1.2), essa estratégia é apropriada para a generalização em variedades:

**Definição 2.1.8.** Sejam  $M$  uma variedade suave e  $p \in M$ . A álgebra das funções suaves definidas em  $M$  é denotada por  $C^\infty(M)$ . Um vetor tangente a  $p$  é uma derivação em  $p$ , isto é, uma aplicação linear  $v : C^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R}$  que satisfaz à regra de Leibnitz:

$$v(f \cdot g) = f(p) \cdot v(g) + g(p) \cdot v(f).$$

O espaço de todos os vetores tangentes em  $p$  é denotado por  $T_pM$ .

Seja  $v \in T_pM$ , é possível provar que o valor de  $v(f)$  depende somente dos valores de  $f \in C^\infty(M)$  é uma vizinhança  $U$  de  $p$  em  $M$ . Assim, se  $U \subseteq M$  é aberto, há uma identificação natural entre  $T_pU$  e  $T_pM$ .

**Definição 2.1.9.** Seja  $F : M \rightarrow N$  uma aplicação suave entre variedades. Para cada  $p \in M$ , a aplicação induz um mapa  $F_* : T_pM \rightarrow T_{F(p)}N$ , chamado de *pushforward*, por  $[F_*(v)](f) = v(f \circ F)$  para toda função suave  $f$  em  $N$ .

**Proposição 2.1.2** (Propriedades básicas dos *pushforward*). *Vale que:*

1. Se  $F : M \rightarrow N$  e  $G : N \rightarrow P$  são aplicações suaves, então  $(G \circ F)_* = G_* \circ F_*$ .
2.  $(\text{id}_M)_* = \text{id}_{T_pM}$ .
3. Se  $F$  é um difeomorfismo, então  $F_*$  é um isomorfismo.

*Demonstração. Item 1.* Seja  $v \in T_pM$ . Para qualquer função  $f \in C^\infty(N)$ , temos que

$$[(G \circ F)_*v](f) = v(f \circ (G \circ F)) = v((f \circ G) \circ F) = [F_*v](f \circ G) = [G_*(F_*v)](f),$$

de modo que  $(G \circ F)_*v = G_* \circ F_*v$  para todo  $v$ .

**Item 2.** Basta notar que

$$[(\text{id}_M)_*v](f) = v(f \circ \text{id}_M) = v(f)$$

para todo  $f \in C^\infty(M)$ , de modo que  $(\text{id}_M)_*v = v$  para cada  $v \in T_pM$ .

**Item 3.** Seja  $F : M \rightarrow N$  e  $G : N \rightarrow M$  um difeomorfismo e sua inversa. Fixado  $p \in M$ , segue que

$$\begin{aligned}(G \circ F)_* &= \text{id}_M \Rightarrow G_* \circ F_* = \text{id}_{T_p M}, \\ (F \circ G)_* &= \text{id}_N \Rightarrow F_* \circ G_* = \text{id}_{T_p N}.\end{aligned}$$

Portanto,  $F_*$  tem uma inversa, que é  $G_*$ , e portanto é um isomorfismo.  $\square$

Assim, dada uma carta  $\varphi : U \subseteq M \rightarrow \mathbb{R}^n$ , há uma identificação natural entre  $T_p M$  e  $T_{\varphi(p)} \mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^n$  dada por  $\varphi_*$ . Se escrevemos  $\varphi$  em termos de suas funções coordenadas  $\varphi = (x^1, \dots, x^n)$ , temos as derivações

$$\left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_p := (\varphi_*)^{-1}(e_i) = (\varphi^{-1})_* e_i,$$

que formam uma base para  $T_p M$  porque a imagem de uma base por um isomorfismo linear é uma base. Note que

$$\left. \frac{\partial x^j}{\partial x^i} \right|_p = \left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_p (x^j) = ((\varphi^{-1})_* (e_i)) x^j = e_i(x^j \circ \varphi^{-1}) = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases}$$

porque  $x^j \circ \varphi^{-1}(p^1, \dots, p^n) = p^j$ .

Assim, um vetor  $v \in T_p M$  pode ser escrito como

$$v = \sum_{i=1}^n v^i \left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_p,$$

para certos números reais  $v^1, \dots, v^n \in \mathbb{R}$ .

**Definição 2.1.10.** O fibrado tangente  $TM$  de  $M$  é a união disjunta dos espaços tangentes de  $M$ :

$$TM = \bigsqcup_{p \in M} T_p M.$$

Um elemento de  $TM$  é denotado por  $(p, v)$ , onde  $p \in M$  e  $v \in T_p M$ . Há uma projeção natural  $\pi : TM \rightarrow M$  dada por  $\pi(p, v) = p$ .

O fibrado tangente  $TM$  é uma variedade suave. Dada uma carta  $(U, \varphi)$  de  $M$ , definimos uma carta em  $TM$  por

$$\begin{aligned}\tilde{\varphi} : \pi^{-1}(U) &\longrightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \\ \left( p, \sum_{i=1}^n v^i \left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_p \right) &\longmapsto (\varphi(p), (v^1, \dots, v^n)).\end{aligned}$$

**Definição 2.1.11.** Um campo vetorial é uma aplicação que associa a cada ponto  $p \in M$  um vetor  $X_p$ . Mais precisamente, um campo tensorial  $X$  é uma seção de  $TM$ : uma aplicação suave  $X : M \rightarrow TM$  tal que  $\pi \circ X = \text{id}_M$ . O conjunto de todos os campos vetoriais é denotado por  $\mathfrak{X}(M)$ .

Em um sistema de coordenadas  $(U, \varphi = (x^1, \dots, x^n))$ , podemos escrever

$$X = \sum_{i=1}^n X^i \frac{\partial}{\partial x^i},$$

onde  $\frac{\partial}{\partial x^i}$  é o campo que associa a cada ponto  $p \in U$  o vetor  $\frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p$  e  $X^i : U \rightarrow \mathbb{R}$  são aplicações chamadas de funções componentes do campo vetorial.

**Proposição 2.1.3.** *O campo  $X$  é suave se, e somente se, as suas componentes são suaves.*

*Demonstração.* Seja  $(U, \varphi = (x^1, \dots, x^n))$  uma carta para  $M$ . O campo  $X \in \mathfrak{X}(M)$  expressa-se nesse sistema de coordenadas como

$$X = \sum_i^n X^i \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

Esse campo  $X$  é suave se, e somente se,  $\tilde{\varphi} \circ X \circ \varphi^{-1}$  é suave. Ora,

$$\tilde{\varphi} \circ X \circ \varphi^{-1}(p) = \tilde{\varphi} \left( \sum_{i=1}^n X^i(\varphi^{-1}(p)) \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p \right) = (p, (X^1(\varphi^{-1}(p)), \dots, X^n(\varphi^{-1}(p)))).$$

O lado direito corresponde a uma função suave quando cada componente é suave. Ora,  $X^i \circ \varphi^{-1}$  é suave se, e só se,  $X^i$  é suave.  $\square$

### 2.1.3 Alguns fatos técnicos sobre variedades

Agora, enunciaremos alguns resultados importantes da teoria das variedades, que aceitaremos sem demonstração. As demonstrações podem ser encontradas em (LEE, 2013) e (LIMA, 2011).

**Teorema 2.1.1.** *Seja  $M$  uma superfície ou variedade. Dada  $\{U_i\}_{i=1}^\infty$  uma cobertura aberta de  $M$ , existe uma coleção de funções suaves  $\{\psi_i\}_{i=1}^\infty$  tais que*

1.  $\text{supp } \psi_i \subseteq U_i$ .
2. A coleção de seus suportes  $\{\text{supp } \psi_i\}_{i=1}^\infty$  é localmente finita. Mais precisamente, para todo  $p \in M$ , existe uma vizinhança  $V \ni p$  tal que  $V \cap \text{supp } \psi_i = \emptyset$  para todo  $i$ , exceto por uma quantidade finita.
3. Vale que

$$\sum_{i=1}^\infty \psi_i \equiv 1.$$

Note que a soma é finita em cada ponto como consequência do item 2.

*Demonstração.* Vide (LEE, 2013) ou (TU, 2011).  $\square$

Os invariantes que veremos a seguir são definidos em termos da estrutura suave. Eles são, porém, invariantes topológicos. Os seguintes dois resultados são fundamentais para o processo de correlação de propriedades topológicas com essa estrutura suave.

**Teorema 2.1.2** (Aproximação de Whitney). *Sejam  $M$  uma superfície com ou sem sem bordo,  $N$  uma superfície sem bordo, e  $F : M \rightarrow N$  uma aplicação contínua. Então,  $F$  é homotópica a uma aplicação suave. Se  $F$  já é suave e  $A \subseteq M$ , então a homotopia pode ser tomada relativa a  $A$ .*

*Demonstração.* A demonstração é uma consequência do estudo de conjuntos de medida nula em variedades. Vide (LEE, 2013).  $\square$

Além de toda aplicação contínua ser homotópica a uma função suave, toda homotopia entre aplicações suaves pode ser promovida a uma homotopia suave:

**Teorema 2.1.3.** *Suponha que  $M$  é uma superfície com ou sem bordo,  $N$  é uma superfície sem bordo e  $F, G : M \rightarrow N$  são aplicações suaves. Se  $F$  e  $G$  são homotópicas, então elas são suavemente homotópicas. Se  $F$  e  $G$  são homotópicas relativamente a algum conjunto fechado  $A \subseteq M$ , então elas são suavemente homotópicas relativamente a  $A$ .*

*Demonstração.* Vide (LEE, 2013).  $\square$

Outro tipo de construção importante são as vizinhanças tubulares. Seja  $M$  uma  $k$ -superfície regular em  $\mathbb{R}^n$ . Uma bola normal de  $p \in M$  é um conjunto da forma

$$B^\perp(x, \varepsilon) = \{x + v \in \mathbb{R}^n : v \in T_p M^\perp, |v| < \varepsilon\},$$

onde  $T_p M^\perp$  é o complemento ortogonal em  $\mathbb{R}^n$  do espaço tangente. Uma bola normal fechada é simplesmente

$$B^\perp[x, \varepsilon] = \{x + v \in \mathbb{R}^n : v \in T_p M^\perp, |v| \leq \varepsilon\},$$

**Teorema 2.1.4.** *Seja  $M$  uma  $k$ -superfície regular suave em  $\mathbb{R}^n$ . Existe uma função contínua positiva  $\varepsilon : M \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$  tal que  $B^\perp(x, \varepsilon(x)) \cap B^\perp(y, \varepsilon(y)) = \emptyset$  para quaisquer  $x \neq y$  em  $M$ . A união*

$$V_\varepsilon(M) = \bigcup_{x \in M} B^\perp(x, \varepsilon(x)),$$

*chamada de vizinhança tubular de  $M$  com raio  $\varepsilon$ , é um aberto de  $\mathbb{R}^n$ . Além disso, a aplicação  $\pi : V_\varepsilon(M) \rightarrow M$ , definida por  $\pi(x) = y$  se  $x \in B^\perp(y, \varepsilon(y))$ , é suave.*

*Demonstração.* Vide (LIMA, 2014a).  $\square$

## 2.2 O CÁLCULO DAS FORMAS DIFERENCIAIS

Agora, introduzimos o conceito de forma diferencial. Trata-se da definição apropriada da noção de objeto que pode ser integrado. Notacionalmente, consiste da boa definição dos abusos de notação realizados no cálculo vetorial. Assim, daremos sentido a expressões da forma

$$\int_C Pdx + Qdy$$

vistas no cálculo vetorial. O símbolo acima representará a integral de um objeto, uma 1-forma,  $\omega$  que será denotado por

$$\omega = Pdx + Qdy.$$

Veremos que o desenvolvimento apropriado desse conceito facilita grandemente a demonstração dos teoremas clássicos do cálculo vetorial, que poderão ser escritos simplesmente por meio de uma única fórmula:

$$\int_{\partial M} \omega = \int_M d\omega,$$

assim que ficar entendido o que significa  $\omega$ ,  $d\omega$ ,  $\partial M$  e tais integrais.

A fim disso, precisamos começar estabelecendo rudimentos da linguagem de tensores e campos tensoriais necessários para a definição das formas e suas propriedades básicas.

### 2.2.1 Tensores

Existem diferentes pontos de vista para os tensores.<sup>1</sup> Aqui, estamos interessados no ponto de vista de que tensores são tipos especiais de aplicações definidas em espaços vetoriais.

**Definição 2.2.1.** Sejam  $V_1, \dots, V_k, W$  espaços vetoriais (reais). Uma aplicação

$$f : V_1 \times \dots \times V_k \rightarrow W$$

é dita ser  $k$ -multilinear quando, para cada  $i = 1, \dots, k$ , tem-se

$$f(v_1, \dots, \alpha v_i + \beta v'_i, \dots, v_k) = \alpha f(v_1, \dots, v_i, \dots, v_k) + \beta f(v_1, \dots, v'_i, \dots, v_k),$$

para todos,  $v_j \in V_j$ , com  $j \neq i$ , e  $v_i, v'_i \in V_i$  e  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ . Em outras palavras,  $f$  é multilinear quando é linear em cada uma das entradas, quando as outras são mantidas fixadas:

$$x \mapsto f(v_1, \dots, v_{i-1}, x, v_{i+1}, \dots, v_k), \quad v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_k \text{ fixados,}$$

é linear.

<sup>1</sup> Usualmente, os tensores podem ser vistos como um conjunto de grandezas invariantes sob mudanças de coordenadas; como aplicações multilineares, como vemos aqui; ou como elementos do produto tensorial de espaços vetoriais.

Denotamos o conjunto dessas aplicações multilineares por  $\mathcal{L}(V_1, \dots, V_k; W)$ . Esse conjunto não é sem estrutura. Com as operações naturais de adição

$$\begin{aligned} +_{\mathcal{L}} : \mathcal{L}(V_1, \dots, V_k; W) \times \mathcal{L}(V_1, \dots, V_k; W) &\longrightarrow \mathcal{L}(V_1, \dots, V_k; W) \\ (f, g) &\longmapsto (f + g) : V_1 \times \dots \times V_k \rightarrow W \\ (f + g)(v_1, \dots, v_k) &= f(v_1, \dots, v_k) +_W g(v_1, \dots, v_k) \end{aligned}$$

e de multiplicação por escalar

$$\begin{aligned} \cdot_{\mathcal{L}} : \mathbb{R} \times \mathcal{L}(V_1, \dots, V_k; W) &\longrightarrow \mathcal{L}(V_1, \dots, V_k; W) \\ (a, f) &\longmapsto (a \cdot f) : V_1 \times \dots \times V_k \rightarrow W \\ (a \cdot f)(v_1, \dots, v_k) &= a \cdot_W f(v_1, \dots, v_k), \end{aligned}$$

o conjunto  $\mathcal{L}(V_1, \dots, V_k; W)$  é um espaço vetorial. Esse espaço vetorial também tem uma base natural.

**Proposição 2.2.1.** *Sejam  $B_i = \{v_1, \dots, v_{n_i}\}$ ,  $i = 1, \dots, k$ , bases para  $V_i$  e  $B = \{w_1, \dots, w_n\}$  uma base para  $W$ . Uma aplicação multilinear  $f \in \mathcal{L}(V_1, \dots, V_k; W)$  é completamente determinada pelos valores que assume nas bases  $B_i$ . Além disso, o conjunto das aplicações multilineares  $f_{i_1 \dots i_k}^j \in \mathcal{L}(V_1, \dots, V_k; W)$ , onde temos índices  $i_l \in \{1, \dots, n_l\}$  e  $j \in \{1, \dots, n\}$ , definida por*

$$f_{i_1 \dots i_k}^j(v_{l_1}, \dots, v_{l_k}) = \begin{cases} w_j, & \text{se } i_1 = l_1, \dots, i_k = l_k, \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

forma uma base para  $\mathcal{L}(V_1, \dots, V_k; W)$ .

*Demonstração.* A demonstração desse resultado é direta. Vide (LIMA, 2012).  $\square$

Agora, podemos definir os tensores. Trata-se de aplicações multilineares com codomínio  $\mathbb{R}$  e domínio definido em produtos de um mesmo espaço vetorial e seu dual. Mais precisamente:

**Definição 2.2.2.** *Seja  $V$  um espaço vetorial. Um  $k$ -tensor covariante em  $V$  é uma aplicação  $k$ -multilinear*

$$f : \underbrace{V \times \dots \times V}_{k \text{ vezes}} \rightarrow \mathbb{R}.$$

O espaço dos  $k$ -tensores covariantes é denotado por  $T^k(V)$ . Um  $l$ -tensor contravariante em  $V$  é uma aplicação  $l$ -multilinear

$$f : \underbrace{V^* \times \dots \times V^*}_{l \text{ vezes}} \rightarrow \mathbb{R}.$$

O espaço dos  $l$ -tensores contravariantes é denotado por  $T_l(V)$ . Um tensor do tipo  $(k, l)$  em  $V$  é uma aplicação multilinear da forma

$$f : \underbrace{V \times \dots \times V}_{k \text{ vezes}} \times \underbrace{V^* \times \dots \times V^*}_{l \text{ vezes}} \rightarrow \mathbb{R}.$$

O espaço dos tensores de tipo  $(k, l)$  é denotado por  $T_l^k(V)$  ou  $T^{(k,l)}(V)$ .

Estamos interessados especialmente nos tensores covariantes. Além da adição e multiplicação por escalares, há uma terceira uma operação natural no espaço dos tensores: o produto tensorial.

**Definição 2.2.3.** Sejam  $f \in T^k(V)$  e  $g \in T^l(V)$ . Definimos  $f \otimes g \in T^{k+l}(V)$ , que é chamado de produto tensorial de  $f$  e  $g$ , por

$$(f \otimes g)(v_1, \dots, v_{k+l}) = f(v_1, \dots, v_k) \cdot g(v_{k+1}, \dots, v_{k+l}),$$

onde  $v_1, \dots, v_{k+l} \in V$ .

**Observação 2.2.1.** A operação  $\otimes : T^k(V) \times T^l(V) \rightarrow T^{k+l}(V)$  é bilinear e associativa, como consequência do produto de dois números reais ser bilinear e associativo. Em geral, ela não é comutativa.

Como  $\otimes$  é associativa, escreveremos  $f \otimes g \otimes h$  no lugar de  $(f \otimes g) \otimes h$  e  $f \otimes (g \otimes h)$ .

Isso nos permite construir tensores de grau mais elevado a partir de tensores de graus menores. Em particular, podemos construir  $k$ -tensores covariantes a partir de  $k$  funcionais lineares. Qualquer  $k$ -tensor pode ser escrito de alguma forma como produto de funcionais lineares? Tentaremos responder a essa questão.

**Definição 2.2.4.** Um  $k$ -tensor covariante  $T$  é dito ser decomponível se existem  $f_1, \dots, f_k \in V^*$  tais que

$$T = f_1 \otimes f_2 \otimes \dots \otimes f_k.$$

Não é difícil notar que nem todo  $k$ -tensor é decomponível:

**Exemplo 2.2.1.** Sejam  $V = \mathbb{R}^2$  e  $\{f^1, f^2\}$  a base dual à base canônica  $\{e_1, e_2\}$ , ou seja,

$$f^i(e_j) = \delta_j^i = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

Então, o 2-tensor  $T$ , definido por

$$T(e_1, e_1) = 0, \quad T(e_1, e_2) = 1, \quad T(e_2, e_1) = -1, \quad \text{e} \quad T(e_2, e_2) = 0 \quad (2.1)$$

não é decomponível. Sejam  $f = af^1 + bf^2$  e  $g = cf^1 + df^2$  dois funcionais lineares. Note que o produto tensorial entre eles é dado por

$$f \otimes g = ac f^1 \otimes f^1 + ad f^1 \otimes f^2 + bc f^2 \otimes f^1 + bd f^2 \otimes f^2.$$

Se  $T = f \otimes g$ , pela Equação 2.1 vale que

$$ab = 0, \quad ad = 1, \quad bc = -1, \quad bd = 0. \quad (2.2)$$

Como  $ad \neq 0$ ,  $a \neq 0$  e então  $b = 0$ . Ora, isso leva a um absurdo porque  $bc \neq 0$ . Consequentemente, a Equação 2.2 não admite solução. Portanto,  $T$  não é decomponível. De fato,  $T = f^1 \otimes f^2 - f^2 \otimes f^1$ . ▷

Assim, temos que nem todo  $k$ -tensor covariante é produto de funcionais lineares. Ainda assim, tensores decomponíveis são úteis na descrição dos  $k$ -tensores covariantes. Isso se dá porque eles geram  $T^k(V)$ .

**Proposição 2.2.2.** *Sejam  $V$  um espaço vetorial,  $V^*$  seu dual e  $B = \{f^1, \dots, f^n\}$  uma base para  $V^*$ . Então, o conjunto*

$$\mathcal{B} = \{f^{i_1} \otimes f^{i_2} \otimes \dots \otimes f^{i_k} : i_1, \dots, i_k \in \{1, \dots, n\}\}$$

*forma uma base para  $T^k(V)$ . Consequentemente,  $\dim T^k(V) = (\dim V)^k$ .*

*Demonstração.* Compare com a Proposição 2.2.1. Vide (LIMA, 2012). □

Ou seja, enquanto nem todo  $k$ -tensor covariante é decomponível, todos eles são combinação linear de elementos decomponíveis.

Um campo tensorial é uma associação de um tensor a cada ponto de uma superfície. A fim de definir essa noção de maneira apropriada, vamos considerar a construção abstrata do fibrado tensorial.

**Definição 2.2.5.** *Seja  $M$  uma superfície em  $\mathbb{R}^n$ . Seu fibrado  $k$ -tensorial é o conjunto*

$$T^k M = \bigsqcup_{p \in M} T^k(T_p M)$$

formado pela união disjunta dos espaços de  $k$ -tensores definidos em cada espaço tangente. Um elemento de  $T^k M$  é denotado por  $(p, \eta)$ , onde  $p \in M$  e  $\eta \in T^k(T_p M)$ . Há uma operação natural de projeção  $\pi : T^k M \rightarrow M$ ,  $(p, \eta) \mapsto p$ , chamada de projeção canônica.

Seja  $(U, \varphi = (x^1, \dots, x^n))$  um sistema de coordenadas. Associado a ele, temos a base

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial x^1} \Big|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n} \Big|_p \right\}$$

de  $T_p M$ . A base dual a ela em  $T_p^* M := (T_p M)^*$  é denotada por  $\{dx^1|_p, \dots, dx^n|_p\}$  e caracterizada pelas relações

$$dx^j|_p \left( \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p \right) = \delta_i^j = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

Com isso, também ficam definidos os campos tensoriais  $dx^i$  que associam a cada ponto  $p \in U$  o elemento  $dx^i|_p$ .

O fibrado dos  $k$ -tensores  $T^k(M)$  é uma variedade de dimensão  $n + n^k$ . Seu atlas é definido da seguinte forma. Dada uma carta  $(V, \varphi = (x^1, \dots, x^n))$  de  $M$ , definimos

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi} : \pi^{-1}(V) &\longrightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n^k} \\ \left( p, \sum f_{i_1 \dots i_k} dx^{i_1}|_p \otimes \dots \otimes dx^{i_k}|_p \right) &\longmapsto (\varphi(p), (f_{i_1 \dots i_k})). \end{aligned} \tag{2.3}$$

Por construção,  $dx^1, \dots, dx^n$  são campos 1-tensoriais suaves, e os produtos  $dx^{i_1} \otimes \dots \otimes dx^{i_k}$  (que são campos definidos pontualmente associando  $dx^{i_1}|_p \otimes \dots \otimes dx^{i_k}|_p$  a cada  $p \in U$ ) também são suaves.

**Definição 2.2.6.** Um campo  $k$ -tensorial covariante  $T$  definido em  $M$  é uma aplicação que associa a cada ponto  $p \in M$  o tensor  $T_p \in T^k(T_p M)$ . De forma mais precisa, um campo  $T$  é uma aplicação  $T : M \rightarrow T^k M$  tal que  $\pi \circ T = \text{id}_M$ . Dizemos que trata-se de uma seção do fibrado dos  $k$ -tensores covariantes.

Um campo tensorial  $T$  pode ser representado em um sistema de coordenadas  $(U, \varphi = (x^1, \dots, x^n))$  por

$$\sum f_{i_1 \dots i_k} dx^{i_1} \otimes \dots \otimes dx^{i_k}.$$

As funções  $f_{i_1 \dots i_k} : U \rightarrow \mathbb{R}$  são as funções componentes de  $T$ . O campo  $T$  é suave se, e somente, se as suas funções componentes são suaves. A demonstração disso é análoga à Proposição 2.1.3.

## 2.2.2 Tensores alternados

**Definição 2.2.7.** Um  $k$ -tensor covariante  $f$  é dito ser alternado quando, dados  $1 \leq i < j \leq k$ , temos que

$$f(v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_k) = -f(v_1, \dots, v_j, \dots, v_i, \dots, v_k)$$

para quaisquer  $v_1, \dots, v_k \in V$ .

O conjunto dos  $k$ -tensores alternados é denotado por  $\mathcal{A}^k(V)$  e é um subespaço vetorial de  $T^k(V)$ : dados  $\omega, \eta \in \mathcal{A}^k(V)$  e  $a, b \in \mathbb{R}$ , temos que

$$\begin{aligned} & (\alpha\omega + \beta\eta)(v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_k) \\ &= \alpha \omega(v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_k) + \beta \eta(v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_k) \\ &= -\alpha \omega(v_1, \dots, v_j, \dots, v_i, \dots, v_k) - \beta \eta(v_1, \dots, v_j, \dots, v_i, \dots, v_k) \\ &= -(\alpha\omega + \beta\eta)(v_1, \dots, v_j, \dots, v_i, \dots, v_k) \end{aligned}$$

para todos  $v_1, \dots, v_k \in V$  e  $1 \leq i < j \leq k$ , de modo que  $\alpha\omega + \beta\eta \in \mathcal{A}^k(V)$ . Note que  $\mathcal{A}^1(V) = V^*$  porque funcionais lineares são aplicações alternadas vacuosamente. Veremos que há um operador de projeção sobre esse subespaço.

Dado um  $k$ -tensor covariante  $f$  e uma permutação  $\sigma \in S_k$ , definimos o tensor  $f^\sigma \in T^k(V)$  por

$$f^\sigma(v_1, \dots, v_k) = f(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)})$$

para todos  $v_1, \dots, v_k \in V$ . Nota-se que  $f \in \mathcal{A}^k(V)$  se, e somente se,  $f^\sigma = (\text{sign } \sigma)f$  para toda permutação  $\sigma$ , onde  $\text{sign } \sigma$  é o sinal da permutação.

**Observação 2.2.2.** A operação  $(\sigma, f) \mapsto f^\sigma$  é uma ação de grupo de  $S_k$  sobre  $T^k(V)$ . Além disso, ela é linear na segunda entrada.

**Definição 2.2.8.** Seja  $S_k$  o grupo simétrico. O seguinte operador

$$\begin{aligned} \text{Alt} : T^k(V) &\longrightarrow \mathcal{A}^k(V) \\ f &\longmapsto \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} (\text{sign } \sigma) f^\sigma \end{aligned}$$

é chamado de operador de alternância.

Observe que, se  $f \in \mathcal{A}^k(V)$ , então temos que

$$\text{Alt}(f) = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} (\text{sign } \sigma) f^\sigma = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} (\text{sign } \sigma)^2 f = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} f = \frac{k!}{k!} f = f.$$

Por outro lado, temos que

$$\begin{aligned} \text{Alt}(f)^\tau &= \left( \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} (\text{sign } \sigma) f^\sigma \right)^\tau = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} (\text{sign } \sigma) f^{\tau\sigma} \\ &= \frac{1}{k!} \sum_{\nu \in S_k} (\text{sign } \tau^{-1}\nu) f^\nu \\ &= \frac{1}{k!} \sum_{\nu \in S_k} (\text{sign } \tau)(\text{sign } \nu) f^\nu \\ &= (\text{sign } \tau) \frac{1}{k!} \sum_{\nu \in S_k} (\text{sign } \nu) f^\nu \\ &= (\text{sign } \tau) \text{Alt}(f), \end{aligned}$$

de modo que  $\text{Alt}(f)$  é um  $k$ -tensor alternado.

**Observação 2.2.3.** Temos que  $\mathcal{A}^k(V)$  é o quociente de  $T^k(V)$  pela ação de grupo de  $S_k$ .

Vimos que dados, dados dois tensores  $\omega$  e  $\eta$ , podemos produzir um novo tensor  $\omega \otimes \eta$ , chamado de produto tensorial de  $\omega$  e  $\eta$ . Em geral, mesmo que  $\omega$  e  $\eta$  são tensores alternados, não é o caso de que  $\omega \otimes \eta$  é um tensor alternado. Podemos produzir uma operação semelhante, que é o produto alternado, ou produto wedge, definido a seguir.

**Definição 2.2.9.** Sejam  $\omega \in \mathcal{A}^k(V)$  e  $\eta \in \mathcal{A}^l(V)$ . Definimos  $\omega \wedge \eta \in \mathcal{A}^{k+l}(V)$  por

$$\omega \wedge \eta = \frac{(k+l)!}{k!l!} \text{Alt}(\omega \otimes \eta).$$

**Proposição 2.2.3.** As propriedades básicas dessa operação são:

1. (Antissimetria) Temos que  $\omega \wedge \eta = -\eta \wedge \omega$ .
2. (Bilinearidade) Dados  $\omega_1, \omega_2 \in T^k(V)$  e  $a, b \in \mathbb{R}$ , temos que

$$(a\omega_1 + b\omega_2) \wedge \eta = a(\omega_1 \wedge \eta) + b(\omega_2 \wedge \eta).$$

*Demonstração.* A verificação dessa proposição é consequência direta da definição. Ela pode ser encontrada em (LEE, 2013).  $\square$

**Proposição 2.2.4.** *Sejam  $V$  um espaço vetorial,  $V^*$  seu dual e  $B = \{f^1, \dots, f^n\}$  uma base para  $V^*$ . Então, o conjunto*

$$\mathcal{B} = \{f^{i_1} \wedge f^{i_2} \wedge \dots \otimes f^{i_k} : 1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n\}$$

*forma uma base para  $T^k(V)$ . Consequentemente,  $\dim T^k(V) = \binom{\dim V}{k}$ .*

*Demonstração.* Vide (LEE, 2013) e (LIMA, 2012).  $\square$

### 2.2.3 Formas Diferenciais

Formas diferenciais são tipos especiais de campos tensoriais.

**Definição 2.2.10.** *Seja  $\mathcal{A}^k(M)$  o fibrado dos  $k$ -tensores alternados de  $M$ , isto é, o conjunto*

$$\mathcal{A}^k(M) = \bigsqcup_{p \in M} \mathcal{A}^k(T_p M)$$

formado pela união disjunta dos espaços dos  $k$ -tensores alternados definidos em cada um dos espaços tangentes de  $M$ . Um elemento de  $\mathcal{A}^k(M)$  é denotado por  $(p, \omega)$ , onde  $p \in M$  e  $\omega \in \mathcal{A}^k(M)$ . Há uma projeção natural  $\pi : \mathcal{A}^k(M) \rightarrow M$  dada por  $\pi(p, \omega) = p$ .

Esse conjunto é uma variedade suave de dimensão  $n + \binom{n}{k}$ . Suas cartas são definidas da seguinte forma. Dada uma carta  $(U, \varphi)$  de  $M$ , temos

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi} : \pi^{-1}(U) &\longrightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{\binom{n}{k}} \\ \left( p, \sum_{i_1 < \dots < i_k} \omega_{i_1 \dots i_k} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} \right) &\longmapsto (p, (\omega_{i_1 \dots i_k})). \end{aligned}$$

Compare com a Definição 2.2.5 e com a Equação 2.3.

**Definição 2.2.11.** *Uma forma diferencial  $\omega$  em  $M$  é uma seção de  $\mathcal{A}^k(M)$ , ou seja, é uma aplicação que associa a cada ponto de  $M$  um  $k$ -tensor alternado. O conjunto de todas as  $k$ -formas será denotado por  $\Omega^k(M)$ .*

Escolhida uma carta  $(U, \varphi = (x^1, \dots, x^n))$  de  $M$ , uma  $k$ -forma  $\omega$  pode ser apresentada pela expressão

$$\omega = \sum_{i_1 < \dots < i_k} \omega_{i_1 \dots i_k} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}.$$

A forma  $\omega$  é suave quando todas as suas componentes  $\omega_{i_1 \dots i_k}$  são suaves. Se  $(V, \psi = (y^1, \dots, y^n))$  é outra carta tal que  $U \cap V \neq \emptyset$ , temos que

$$dy^i = d(y^i \circ \varphi^{-1}) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial y^i}{\partial x^j} dx^j.$$

Então, segue que

$$\begin{aligned}
\omega &= \sum_{i_1 < \dots < i_k} \omega_{i_1 \dots i_k} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} \\
&= \sum_{j_1 < \dots < j_k} \tilde{\omega}_{j_1 \dots j_k} dy^{j_1} \wedge \dots \wedge dy^{j_k} \\
&= \sum_{j_1 < \dots < j_k} \tilde{\omega}_{j_1 \dots j_k} \left( \sum_{i=1}^n \frac{\partial y^{j_1}}{\partial x^i} dx^i \right) \wedge \dots \wedge \left( \sum_{i=1}^n \frac{\partial y^{j_k}}{\partial x^i} dx^i \right) \\
&= \sum_{j_1 < \dots < j_k} \tilde{\omega}_{j_1 \dots j_k} \sum_{i_1, \dots, i_k} \frac{\partial y^{j_1}}{\partial x^{i_1}} \cdot \dots \cdot \frac{\partial y^{j_k}}{\partial x^{i_k}} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} \\
&= \sum_{\substack{i_1 < \dots < i_k \\ j_1 < \dots < j_k}} \tilde{\omega}_{j_1 \dots j_k} \frac{\partial(y^{j_1}, \dots, y^{j_k})}{\partial(x^{i_1}, \dots, x^{i_k})} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} \\
&= \sum_{i_1 < \dots < i_k} \left( \sum_{j_1 < \dots < j_k} \tilde{\omega}_{j_1 \dots j_k} \frac{\partial(y^{j_1}, \dots, y^{j_k})}{\partial(x^{i_1}, \dots, x^{i_k})} \right) dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}
\end{aligned}$$

de modo que

$$\omega_{i_1 \dots i_k} = \sum_{j_1 < \dots < j_k} \tilde{\omega}_{j_1 \dots j_k} \frac{\partial(y^{j_1}, \dots, y^{j_k})}{\partial(x^{i_1}, \dots, x^{i_k})}.$$

**Definição 2.2.12.** Seja  $F : M \rightarrow N$  uma aplicação suave entre superfícies. Então, para cada  $k$ ,  $F$  induz uma aplicação  $F^* : \Omega^k(N) \rightarrow \Omega^k(M)$  dada por

$$(F^*\omega)_p(v_1, \dots, v_p) = \omega_{F(p)}(F_*v_1, \dots, F_*v_k).$$

**Definição 2.2.13.** Seja  $\omega$  uma  $k$ -forma diferencial. Definimos a  $(k+1)$ -forma diferencial  $d\omega$ , que é dita ser a sua derivada exterior da seguinte forma. Fixado um sistema de coordenadas, seja

$$\omega = \sum_{i_1 < \dots < i_k} \omega_{i_1 \dots i_k} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}.$$

Pomos, nesse mesmo sistema de coordenadas,

$$d\omega = \sum_{i_1 < \dots < i_k} d\omega_{i_1 \dots i_k} \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k},$$

onde  $d\omega_{i_1 \dots i_k}$  é a diferencial da função componente  $\omega_{i_1 \dots i_k}$ .

A fim de que  $d\omega$  esteja bem definida, é necessário provar que essa definição é independente da escolha do sistema de coordenadas. De fato, sejam  $(U, (x^1, \dots, x^n))$  e  $(U, (y^1, \dots, y^n))$  duas cartas com  $U \cap V \neq \emptyset$ . Temos que

$$\omega = \sum_{i_1 < \dots < i_k} \omega_{i_1 \dots i_k} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} = \sum_{i_1 < \dots < i_k} \tilde{\omega}_{i_1 \dots i_k} dy^{i_1} \wedge \dots \wedge dy^{i_k}.$$

Nesse caso,

$$\begin{aligned}
d\omega &= \sum_{i_1 < \dots < i_k} d\tilde{\omega}_{i_1 \dots i_k} \wedge dy^{i_1} \wedge \dots \wedge dy^{i_k} \\
&= \sum_{\substack{i_1 < \dots < i_k \\ j_1 < \dots < j_k}} d\tilde{\omega}_{i_1 \dots i_k} \wedge \left( \frac{\partial(y^{i_1}, \dots, y^{i_k})}{\partial(x^{j_1}, \dots, x^{j_k})} dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_k} \right) \\
&= \sum_{\substack{i_1 < \dots < i_k \\ j_1 < \dots < j_k}} d \left( \tilde{\omega}_{i_1 \dots i_k} \frac{\partial(y^{i_1}, \dots, y^{i_k})}{\partial(x^{j_1}, \dots, x^{j_k})} \right) \wedge dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_k} \\
&= \sum_{j_1 < \dots < j_k} d\omega_{j_1 \dots j_k} \wedge dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_k}.
\end{aligned}$$

Portanto,  $d\omega$  está bem definida.

**Proposição 2.2.5.** *A composta das derivadas exteriores é nula, isto é,  $d(d\omega) = 0$  para toda  $\omega \in \Omega^k(M)$ .*

*Demonstração.* Fixando um sistema de coordenadas  $(U, \varphi = (x^1, \dots, x^n))$ , podemos escrever

$$\omega = \sum_{i_1 < \dots < i_k} \omega_{i_1 \dots i_k} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}.$$

Então, temos que

$$d\omega = \sum_{i_1 < \dots < i_k} d\omega_{i_1 \dots i_k} \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} = \sum_{i_1 < \dots < i_k} \sum_{j=1}^n \frac{\partial \omega_{i_1 \dots i_k}}{\partial x^j} dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}.$$

Temos que

$$\begin{aligned}
d(d\omega) &= d \left( \sum_{i_1 < \dots < i_k} \sum_{j=1}^n \frac{\partial \omega_{i_1 \dots i_k}}{\partial x^j} dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} \right) \\
&= \sum_{i_1 < \dots < i_k} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 \omega_{i_1 \dots i_k}}{\partial x^k \partial x^j} dx^k \wedge dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} \\
&= \sum_{i_1 < \dots < i_k} \sum_{j < k}^n \left( \frac{\partial^2 \omega_{i_1 \dots i_k}}{\partial x^k \partial x^j} - \frac{\partial^2 \omega_{i_1 \dots i_k}}{\partial x^j \partial x^k} \right) dx^k \wedge dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

A última igualdade é uma consequência do teorema de Clairaut: a comutatividade das derivadas parciais de aplicações suaves.  $\square$

**Proposição 2.2.6** (Propriedades dos pullback). *1. Seja  $F : M \rightarrow N$  uma aplicação suave entre superfícies. O pullback  $F^* : \Omega^k(N) \rightarrow \Omega^k(M)$  é linear.*

*2. Sejam  $\omega \in \Omega^k(N)$  e  $\eta \in \Omega^l(M)$ . Vale que  $F^*(\omega \wedge \eta) = F^*\omega \wedge F^*\eta$ .*

*3. Sejam  $F : M \rightarrow N$  e  $G : N \rightarrow P$  aplicações suaves entre superfícies. Temos que  $(G \circ F)^* = F^* \circ G^*$ .*

4. Tem-se  $id_M^* = id_{\Omega^k(M)}$ .

5. Em qualquer carta coordenada  $(V, (y^1, \dots, y^n))$  para  $N$ , tem-se

$$F^* \left( \sum_{i_1 < \dots < i_k} \omega_{i_1 \dots i_k} dy^{i_1} \wedge \dots \wedge dy^{i_k} \right) = \sum_{i_1 < \dots < i_k} (\omega_{i_1 \dots i_k} \circ F) d(y^{i_1} \circ F) \wedge \dots \wedge d(y^{i_k} \circ F).$$

*Demonstração.* Esse resultado é uma consequência imediata das definições e sua demonstração pode ser encontrada em (LEE, 2013), em (LIMA, 2014a), em (LIMA, 2012) e em (LIMA, 2011).  $\square$

## 2.2.4 Orientação

**Definição 2.2.14.** Seja  $M \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$  uma hiperfície, isto é, uma superfície de codimensão 1. Dizemos que  $M$  é orientada se existe um campo vetorial  $w : M \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  tal que  $w(p)$  é não nulo e perpendicular a  $T_p M$  para todo  $p \in M$ .

**Definição 2.2.15.** Um atlas  $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$  para a variedade  $M$  é dito ser orientado quando, para todos  $\alpha, \beta \in A$ , as aplicações de transição  $\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}$  tem jacobiano positivo. Dizemos que  $M$  é uma variedade orientada quando munimos com um atlas orientado.

Para cada  $p \in M$ ,  $T_p M$  tem uma orientação induzida pela base

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial x^1}(p), \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}(p) \right\}$$

associada a uma carta  $(U, \varphi = (x^1, \dots, x^n))$  de um atlas orientado de  $M$ .

**Proposição 2.2.7.** Quando a  $n$ -variedade suave  $M$  é orientada. Há uma  $n$ -forma não nula  $\omega$  que é positivamente orientada em cada ponto, isto é, tal que

$$\omega_p \left( \frac{\partial}{\partial x^1}(p), \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}(p) \right) > 0$$

para todo  $p \in M$ . Reciprocamente, se  $\omega$  é uma forma positivamente orientada, então ela define uma orientação de  $M$ . Qualquer  $n$ -forma não nula é chamada de forma orientação.

*Demonstração.* Vide (LEE, 2013).  $\square$

**Proposição 2.2.8.** Seja  $M$  uma  $n$ -variedade orientada,  $S$  uma  $(n-1)$ -variedade contida em  $M$  e  $N$  um campo vetorial que é transversal a  $S$ , isto é,  $T_p M$  é gerado por  $T_p S$  e  $N_p$  para todo  $p \in S$ .

1.  $S$  admite uma única orientação tal que, para cada  $p \in S$ ,  $\{E_1, \dots, E_{n-1}\}$  é uma base orientada para  $T_p S$  se, e somente se,  $\{N_p, E_1, \dots, E_{n-1}\}$  é uma base orientada para  $T_p M$ .

2. Se  $\omega$  é uma forma orientação para  $M$ , então a  $(n-1)$ -forma diferencial  $(N \lrcorner \omega)|_S$  dada por

$$(N \lrcorner \omega)|_S(E_1, \dots, E_{n-1}) = \omega(N, E_1, \dots, E_{n-1})$$

é uma forma orientação para  $S$ .

*Demonstração.* Vide (LEE, 2013). □

O bordo de uma superfície  $M$  é satisfaz às hipóteses da proposição. A orientação de  $\partial M$  induzida por  $M$  é chamada de orientação de Stokes.

## 2.2.5 Integral

A definição da integral é feita interpretando  $dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$  como  $dx^1 \dots dx^n$ , que aparece como delimitador da integral múltipla. Mais precisamente:

**Definição 2.2.16.** Seja  $D \subseteq \mathbb{R}^n$  um domínio. Definimos

$$\int_D f dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n := \int_D f(x^1, \dots, x^n) dx^1 \dots dx^n.$$

Essa definição é invariante sob mudanças de coordenadas:

**Proposição 2.2.9.** Sejam  $F : D_1 \rightarrow D_2$  um difeomorfismo entre dois domínios  $D_1$  e  $D_2$  em  $\mathbb{R}^n$ , e  $\omega$  uma  $n$ -forma definida em  $D_2$ . Se  $F$  preserva orientação, então

$$\int_{D_1} F^* \omega = \int_{D_2} \omega.$$

Se  $F$  inverte orientação, então

$$\int_{D_1} F^* \omega = - \int_{D_2} \omega.$$

*Demonstração.* Essa é uma consequência da fórmula de mudança de coordenadas em integrais múltiplas. Vide (LEE, 2013). □

Como a integral de uma forma é invariante sob *pullback* por difeomorfismo que preserva a orientação, a seguinte definição de integral em uma variedade é apropriada:

**Definição 2.2.17.** Seja  $M$  uma  $n$ -variedade suave orientada e  $\omega$  uma  $n$ -forma em  $M$  cujo suporte é contido no domínio da carta positivamente orientada  $(U, \varphi)$ . Definimos

$$\int_M \omega := \int_{\varphi(U)} (\varphi^{-1})^* \omega.$$

Quanto o suporte da forma a ser integrada não está contido no domínio de uma carta, é necessário particioná-la utilizando as partições da unidade (cf. Teorema 2.1.1).

**Definição 2.2.18.** Seja  $M$  uma  $n$ -variedade suave orientada e  $\omega$  uma  $n$ -forma em  $M$ . Consideremos  $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i=1}^{\infty}$  um conjunto de cartas positivamente orientadas para  $M$  cujos domínios cobrem  $M$ . Tomando  $\{\psi_i\}_{i=1}^{\infty}$  uma partição da unidade subordinada de  $\{U_i\}_{i=1}^{\infty}$ , definimos

$$\int_M \omega := \sum_{i=1}^{\infty} \int_M \psi_i \omega.$$

**Teorema de Stokes.** *Seja  $M$  uma superfície e  $\omega$  uma  $(n-1)$ -forma com suporte compacto. Então,*

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega. \quad (2.4)$$

*Quando  $M$  é uma superfície sem bordo, interpretamos o lado direito como sendo nulo. Quando  $M$  é uma superfície com bordo, o lado direito é interpretado como a integral do pullback  $i^*\omega$ , onde  $i: \partial M \rightarrow M$  é a inclusão do bordo.*

*Demonstração.* Como a Equação 2.4 é linear, podemos sem perda de generalidade assumir que  $\omega$  tem seu suporte no domínio de uma carta  $(U, \varphi = (x^1, \dots, x^n))$ . Daí, o problema de fazer a integral sobre  $M$  é reduzido a uma integração em  $\mathbb{R}^n$ . Portanto, basta considerar o caso em  $M = \mathbb{R}^n$  ou o caso em que  $M = \mathbb{H}^n$ .

Com isso, podemos escrever

$$\omega = \sum_{i=1}^n a_i dx^1 \wedge \dots \widehat{dx^i} \wedge \dots \wedge dx^n,$$

onde  $\widehat{dx^i}$  indica a omissão do termo  $dx^i$ . As aplicações  $a_i$  têm suporte compacto.

**Caso 1.** Suponhamos que  $M = \mathbb{R}^n$ . Tomamos  $C = [-b, b] \times \dots \times [-b, b]$  um cubo de  $\mathbb{R}^n$  que contém  $\text{supp } \omega$ . Note que

$$\begin{aligned} \int_M d\omega &= \int_M \sum_{i=1}^n da_i \wedge dx^1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \dots \wedge dx^n \\ &= \int_M \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} \frac{\partial a_i}{\partial x^i} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n \\ &= \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} \int_C \frac{\partial a_i}{\partial x^i} dV \\ &= \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} \int_{-b}^b \dots \int_{-b}^b \frac{\partial a_i}{\partial x^i} dx^i dx^1 \dots \widehat{dx^i} \dots dx^n \\ &= \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} \int_{-b}^b \dots \int_{-b}^b \left[ a_i(x^1, \dots, x^{i-1}, s, x^{i+1}, \dots, x^n) \Big|_{-b}^b \right] dx^1 \dots \widehat{dx^i} \dots dx^n \\ &= \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} \int_{-b}^b \dots \int_{-b}^b 0 dx^1 \dots \widehat{dx^i} \dots dx^n \\ &= 0. \end{aligned}$$

**Caso 2.** Suponhamos que  $M = \mathbb{H}^n$ . Nesse caso, tomamos o retângulo  $C = [-b, b] \times \dots \times [-b, b] \times [0, b]$  de forma que  $\text{supp } \omega \subseteq M$ . Nesse caso, temos que

$$\begin{aligned} \int_M d\omega &= \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^{i-1} \int_0^b \int_{-b}^b \dots \int_{-b}^b \frac{\partial a_i}{\partial x^i} dx^1 \dots dx^n \\ &\quad + (-1)^{n-1} \int_0^b \int_{-b}^b \dots \int_{-b}^b \frac{\partial a_n}{\partial x^n} dx^1 \dots dx^n. \end{aligned} \quad (2.5)$$

O primeiro termo do lado direito da Equação 2.5 é nulo assim como no caso anterior. Então,

$$\begin{aligned} \int_M d\omega &= (-1)^{n-1} \int_0^b \int_{-b}^b \dots \int_{-b}^b \frac{\partial a_n}{\partial x^n} dx^1 \dots dx^n \\ &= (-1)^{n-1} \int_{-b}^b \dots \int_{-b}^b \left( \int_0^b \frac{\partial a_n}{\partial x^n} dx^n \right) dx^1 \dots dx^{n-1} \\ &= (-1)^n \int_{-b}^b \dots \int_{-b}^b a_n(x^1, \dots, x^{n-1}, 0) dx^1 \dots dx^{n-1}. \end{aligned}$$

Observe que, se  $i : \partial\mathbb{H}^n \rightarrow \mathbb{H}^n$  é inclusão do bordo em  $M$ , então  $i^* dx^n = 0$ . Com isso, temos que

$$\begin{aligned} \int_{\partial M} \omega &= \int_{\partial M} i^* \omega = \int_{\partial M} i^* \left( \sum_{i=1}^n a_i dx^1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \dots \wedge dx^n \right) \\ &= \int_{\partial M} a_n(x^1, \dots, x^{n-1}, 0) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^{n-1} \\ &= (-1)^n \int_{-b}^b \dots \int_{-b}^b a_n(x^1, \dots, x^{n-1}, 0) dx^1 \dots dx^{n-1}. \end{aligned}$$

O termo  $(-1)^n$  é devido à orientação induzida em  $\partial\mathbb{H}^n$ , que é positiva ou negativa a depender da dimensão. Com isso, temos a igualdade.  $\square$

### 2.3 COMPLEXOS DE COCADEIAS

Ao longo do capítulo seguinte, será utilizada a terminologia da álgebra comutativa, sumariada a seguir.

**Definição 2.3.1.** Seja  $A$  um anel comutativo com unidade. Um complexo de cadeias com coeficientes em  $A$  é uma seqüência  $\mathcal{C} = (C^p, \partial_p)_{p \in \mathbb{Z}}$  de  $A$ -módulos  $C_p$  e homomorfismos  $\partial_p : C_p \rightarrow C_{p-1}$  tais que  $\partial_p \circ \partial_{p-1} = 0$ . Escreve-se

$$\mathcal{C} : 0 \longrightarrow C^0 \xrightarrow{\partial_0} C^1 \xrightarrow{\partial_1} C^2 \longrightarrow \dots \longrightarrow C^{k-1} \xrightarrow{\partial_{k-1}} C^k \xrightarrow{\partial_k} \dots$$

Cada elemento  $x \in C_p$  é chamado de  $p$ -cocadeia.

Se  $\partial_p x = 0$ , diz-se que  $x$  é um  $p$ -ciclo, ou simplesmente um ciclo. O conjunto  $Z^p$  dos  $p$ -ciclos é um submódulo de  $C^p$ : é núcleo de  $\partial_p$ .

Se  $y = \partial_{p-1} x$ , dizemos que a  $p$ -cadeia  $y$  é o bordo da  $(p+1)$ -cadeia  $x$ . O conjunto dos bordos  $B^p$  das  $(p-1)$ -cadeias é um submódulo de  $C^p$ . Note que trata-se da imagem do homomorfismo  $\partial_{p+1} : C_{p+1} \rightarrow C_p$ .

Como, por hipótese,  $\partial_p \circ \partial_{p-1} = 0$ , temos que  $B^p \subseteq Z^p$ . O módulo quociente  $H^p(\mathcal{C}) = Z^p/B^p$  chama-se grupo<sup>2</sup> de cohomologia  $p$ -dimensional do complexo  $\mathcal{C}$  com coeficientes em  $A$ . Se  $[z] = [z']$  em  $H_p$  dizemos que as  $p$ -formas  $z$  e  $z'$  são homólogas.

Um complexo determina um complexo em homologia com o morfismo induzido

$$\begin{aligned} \partial_p : H_p(\mathcal{C}) &\longrightarrow H_{p-1}(\mathcal{C}) \\ [x] &\longmapsto [\partial_p x]. \end{aligned}$$

Note que  $\partial_d : H^p(\mathcal{C}) \rightarrow H^{p+1}(\mathcal{C})$  está bem definido:

$$[x] = [y] \Rightarrow \exists z \in C_{p-1}, \quad y = x + \partial_{p-1}z \Rightarrow \partial_p y = \partial_p x + \partial_p \partial_{p-1}z = \partial_p x \Rightarrow \partial_p[x] = \partial_p[y].$$

Além disso, tem-se para todo  $p \in \mathbb{Z}$  e  $x \in H^{p-1}(\mathcal{C})$

$$\partial_p \circ \partial_{p-1}[x] = \partial_p[\partial_{p-1}x] = [\partial_p \circ \partial_{p-1}x] = [0] = 0.$$

Logo,  $\partial_p \circ \partial_{p+1} = 0$ .

**Definição 2.3.2** (Morfismo entre complexos). Sejam  $\mathcal{X} = (X^p, d_p)_{p \in \mathbb{Z}}$  e  $\mathcal{Y} = (Y^p, \partial_p)_{p \in \mathbb{Z}}$  dois complexos de cocadeias. Um morfismo entre  $\mathcal{X}$  e  $\mathcal{Y}$ , denotado por  $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ , é uma sequência de homomorfismos de módulos  $f_p : X^p \rightarrow Y^p$  tais que  $f_{p+1}(d_p(x)) = \partial_d(f_p(x))$ . Ou seja, o seguinte diagrama é comutativo:

$$\begin{array}{ccccccc} \mathcal{X} : & \dots & \xrightarrow{d_{p-1}} & X^p & \xrightarrow{d_p} & X^{p+1} & \xrightarrow{d_{p+1}} \dots \\ & & & \downarrow f_p & & \downarrow f_{p+1} & \\ \mathcal{Y} : & \dots & \xrightarrow{\partial_{p-1}} & Y^p & \xrightarrow{\partial_p} & Y^{p+1} & \xrightarrow{\partial_{p+1}} \dots \end{array}$$

Um morfismo entre complexos determina um morfismo entre os complexos de homologia.

**Definição 2.3.3.** Sejam  $M$ ,  $N$  e  $P$   $A$ -módulos. A sequência

$$0 \rightarrow M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P \rightarrow 0$$

é dita ser uma sequência exata curva se

1.  $f$  é injetiva.
2.  $\ker g = \text{im } f$ .
3.  $g$  é sobrejetiva.

<sup>2</sup> Apesar de ser um módulo ou, no caso da cohomologia de de Rham, um espaço vetorial, é tradicional chamar as homologias e cohomologias de grupos. Isso é consistente com as teorias mais gerais, em que os complexos de cadeia são realizados sobre grupos abelianos.

### 3 COHOMOLOGIA DE DE RHAM

#### 3.1 A RELAÇÃO ENTRE FORMAS DIFERENCIAIS E TOPOLOGIA

Começaremos entendendo como as formas diferenciais estão relacionadas com a topologia do domínio. Dizemos que uma  $k$ -forma  $\omega$  é fechada quando sua derivada exterior  $d\omega$  é nula. Também dizemos que a  $k$ -forma  $\omega$  é exata quando existe uma  $(k-1)$ -forma  $\eta$  tal que  $\omega = d\eta$ . Toda forma exata é fechada:

$$\omega = d(d\eta) = (d \circ d)\omega = 0 \cdot \omega = 0,$$

como vimos na Proposição 2.2.5.

A informação topológica encontra-se na recíproca: toda forma fechada é exata? A resposta depende do ambiente. Na linguagem das formas diferenciais, um teorema clássico do cálculo pode ser enunciado da seguinte forma:

**Teorema 3.1.1.** *Seja  $\omega$  uma 1-forma fechada em um aberto  $U \subseteq \mathbb{R}^n$ . São equivalentes:*

1. *A forma  $\omega$  é exata.*
2. *A integral  $\int_{\gamma} \omega$  depende somente do ponto inicial e final do caminho diferenciável  $\gamma$ .*
3. *Para toda curva diferenciável fechada  $\gamma$ , tem-se  $\oint_{\gamma} \omega = 0$ .*

*Demonstração.*  $1 \Rightarrow 2$ . Seja  $\omega = d\eta$  para alguma função suave  $\eta$ . Seja  $\gamma : [a, b] \rightarrow U$  um caminho que, sem perda de generalidade, é suave em  $M$ . Temos que

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \omega &= \int_{\gamma} d\eta = \int_{[a,b]} \gamma^* d\eta = \int_{[a,b]} d(\eta \circ \gamma) \\ &= \int_a^b d\eta(\gamma'(t)) dt \\ &= \int_a^b \frac{d}{dt}(\eta \circ \gamma) dt \\ &= \eta(\gamma(b)) - \eta(\gamma(a)). \end{aligned} \tag{3.1}$$

Assim, a integral só depende dos pontos  $p = \gamma(a)$  e  $q = \gamma(b)$ .

$2 \Rightarrow 1$ . Inversamente, suponhamos que a integral depende somente dos pontos iniciais e finais. Fixamos  $a \in U$ . Dado  $x \in U$ , tomamos um caminho  $\gamma_{a \rightarrow x} : [0, 1] \rightarrow U$  que liga  $a$  a  $x$ , e definimos  $\eta : U \rightarrow \mathbb{R}$  por

$$\eta(x) = \int_{\gamma_{a \rightarrow x}} \omega.$$

Vejamos que  $d\eta = \omega$ . Para isso, escreveremos  $\omega(x) = a_1(x)dx^1 + \dots + a_n(x)dx^n$  e mostraremos que

$$a_i(x) = \frac{d\eta}{dx^i}(x).$$

De fato, seja  $\gamma : [0, 1] \rightarrow U$  o caminho dado por  $\gamma(t) = (x^1, \dots, x^i + t, \dots, x^n)$ . Temos que

$$\frac{d\eta}{dx^i}(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\eta(x + te_i) - \eta(x)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \int_{\gamma} \omega,$$

onde  $\gamma$  é qualquer caminho que liga  $x$  a  $x + te_i$ . Então, tomemos  $\gamma : [0, 1] \rightarrow U$  dado por  $\gamma(s) = x + ste_i$ . Note que  $\gamma'(s) = te_i$ . Com isso,

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \int_{\gamma} \omega &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \int_{[0,1]} \gamma^* \omega = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \int_{[0,1]} \sum_{j=1}^n a_j(\gamma(s)) d(x^j \circ \gamma) \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \int_{[0,1]} a_i(\gamma(s)) d(x^i + st) \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \int_0^1 a_i(x + ste_i) ds \\ &= \int_0^1 \lim_{t \rightarrow 0} a_i(x + ste_i) ds \\ &= \int_0^1 a_i(x) ds = a_i(x), \end{aligned}$$

o que estabelece a igualdade desejada.

2  $\Rightarrow$  3. Seja  $\gamma : [a, b] \rightarrow U$  um caminho fechado. Podemos escrever  $\gamma = \gamma_1 * \gamma_2$  a concatenação de dois caminhos. Temos que

$$\oint_{\gamma} \omega = \int_{\gamma_1} \omega + \int_{\gamma_2} \omega = \int_{\gamma_1} \omega - \int_{\overline{\gamma_2}} \omega = 0,$$

porque ambos os caminhos  $\gamma_1$  e  $\overline{\gamma_2}$ , que é o caminho oposto a  $\gamma_2$ , ligam os mesmos pontos.

3  $\Rightarrow$  2. Reciprocamente, sejam  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  caminhos que ligam os pontos  $p$  e  $q$ . Denotamos por  $\overline{\gamma_2}$  o caminho obtido ao percorrer  $\gamma_2$  no sentido contrário. A concatenação  $\gamma_1 * \overline{\gamma_2}$  de  $\gamma_1$  com  $\overline{\gamma_2}$  é um caminho fechado, com ponto base  $p$ . Daí,

$$0 = \oint_{\gamma_1 * \overline{\gamma_2}} \omega = \int_{\gamma_1} \omega + \int_{\overline{\gamma_2}} \omega = \int_{\gamma_1} \omega - \int_{\gamma_2} \omega \quad \therefore \int_{\gamma_1} \omega = \int_{\gamma_2} \omega.$$

Portanto, a integral de  $\omega$  ao longo de um caminho depende apenas dos pontos iniciais e final.  $\square$

Lembre-se que um aberto é dito ser simplesmente conexo quando o seu grupo fundamental é trivial. Em outras palavras, dois caminhos com mesmos pontos iniciais e finais são homotópicos. Em particular, um caminho fechado é homotópico a um caminho constante. Como a integral de uma forma fechada sobre dois caminhos homotópicos tem o mesmo valor, segue que, em um aberto simplesmente conexo, a integral de curvas fechadas sempre é nula em abertos simplesmente conexos.

Além disso, é possível provar que

**Teorema 3.1.2.** *Em  $\mathbb{R}^n$ , toda forma fechada é exata.*

*Demonstração.* Esse teorema é um caso particular do lema de Poincaré, que será demonstrado na próxima seção. Uma demonstração direta pode ser encontrada em (LIMA, 2014a).  $\square$

**Exemplo 3.1.1.** Considere em  $M = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  a 1-forma

$$\omega = \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}.$$

Essa forma é fechada:

$$\begin{aligned} d\omega &= d\left(\frac{x}{x^2 + y^2}dy - \frac{y}{x^2 + y^2}dx\right) \\ &= d\left(\frac{x}{x^2 + y^2}\right) \wedge dy - d\left(\frac{y}{x^2 + y^2}\right) \wedge dx \\ &= \left[\left(\frac{1}{x^2 + y^2} - \frac{2x^2}{(x^2 + y^2)^2}\right)dx - \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}dy\right] \wedge dy \\ &\quad - \left[\frac{-2xy}{(x^2 + y^2)^2}dx + \left(\frac{1}{x^2 + y^2} - \frac{2y^2}{(x^2 + y^2)^2}\right)dy\right] \wedge dx \\ &= \frac{x^2 + y^2 - 2x^2}{(x^2 + y^2)^2}dx \wedge dy - \frac{x^2 + y^2 - 2y^2}{(x^2 + y^2)^2}dy \wedge dx \\ &= \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}dx \wedge dy - \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}dy \wedge dx \\ &= \left(\frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}\right)dx \wedge dy = 0. \end{aligned}$$

Porém, ela não é exata. De fato, consideramos o caminho fechado  $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  dado por  $\gamma(t) = (\cos(t), \text{sen}(t))$ . Temos que

$$\begin{aligned} \oint_{\gamma} \omega &= \int_{[0, 2\pi]} \gamma^* \omega = \int_{[0, 2\pi]} \gamma^* \left(\frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}\right) \\ &= \int_{[0, 2\pi]} \frac{(x \circ \gamma)d(y \circ \gamma) - (y \circ \gamma)d(x \circ \gamma)}{(x \circ \gamma)^2 + (y \circ \gamma)^2} \\ &= \int_{[0, 2\pi]} \frac{\cos(t)d(\text{sen}(t)) - \text{sen}(t)d(\cos(t))}{(\cos(t))^2 + (\text{sen}(t))^2} \\ &= \int_{[0, 2\pi]} \cos^2(t)dt + \text{sen}^2(t)dt \\ &= \int_{[0, 2\pi]} dt = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi - 0 = 2\pi. \end{aligned}$$

Pelo Teorema 3.1.1, esse só pode ser o caso quando  $\omega$  não é fechada. ▷

Ora, se em  $\mathbb{R}^2$  toda forma fechada é exata, a remoção da origem permite com que, em  $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ , existam formas fechadas que não são exatas. Todos os múltiplos de  $\omega$  também são formas fechadas que não são exatas. Há, portanto, infinitas formas fechadas que não são exatas.

Veremos que essa discrepância pode ser facilmente descrita usando um pouco de álgebra linear.

Seja  $Z^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$  o conjunto de todas as 1-formas fechadas em  $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ . Um elemento desse espaço vetorial é dito ser um cociclo. Como subespaço dele, temos  $B^1(\mathbb{R} \setminus \{0\})$  o

conjunto de todas as formas exatas. Se considerarmos o espaço quociente

$$H^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}) := \frac{Z^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})}{B^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})},$$

a existência de formas fechadas que não são exatas significa que  $H^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$  é não trivial. Esse quociente será chamado de primeiro grupo de cohomologia de de Rham. Seus elementos são as classes de equivalência

$$[\omega] = \omega + B^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}) = \{\omega + d\eta : \eta : M \rightarrow \mathbb{R} \text{ é suave}\}.$$

Quando  $[\omega_1] = [\omega_2]$ , caso em que  $\omega_1 - \omega_2 = d\eta$  para alguma função  $\eta$ , dizemos que  $\omega_1$  e  $\omega_2$  são formas cohomólogas.

Como  $H^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$  descreve a discrepância entre as formas exatas e fechadas? Vimos que a forma

$$\omega = \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$$

é fechada, mas não é exata. Assim,  $[\omega] \neq 0$  em  $H^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$ . Provaremos a seguir que  $H^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}) \cong \mathbb{R}$ . (cf. Exemplo 3.6.2). Assim, dada uma forma fechada  $\eta$ , temos que

$$[\eta] = \lambda[\omega], \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Ou seja, podemos escrever  $\eta = \lambda\omega + d\xi$  para alguma função  $\xi$ . Em outras palavras, toda forma fechada pode ser escrita como uma combinação linear entre alguma forma fechada mas não exata, como a dada no exemplo, e uma forma exata.

De forma mais geral, se  $H^1(M)$  tem dimensão  $n$ , uma forma fechada pode ser expressa como a combinação linear de  $n$  formas fechadas mas não exatas linearmente independentes no quociente e uma forma exata.

Agora, vamos para as definições mais gerais.

### 3.2 DEFINIÇÕES GERAIS

**Definição 3.2.1.** Seja  $M$  uma  $n$ -superfície suave em  $\mathbb{R}^m$  ou uma  $n$ -variedade diferenciável. Seja  $\Omega^k(M)$  o conjunto das  $k$ -formas diferenciais definidas em  $M$ . A diferencial exterior estabelece um complexo de cadeias

$$\Omega^*(M) : \quad 0 \rightarrow \Omega^0(M) \xrightarrow{d} \Omega^1(M) \xrightarrow{d} \dots \xrightarrow{d} \Omega^{n-1}(M) \xrightarrow{d} \Omega^n(M) \rightarrow 0,$$

que é chamado de complexo de de Rham. As homologias desse complexo, que são os espaços vetoriais

$$H_{dR}^p(M) = \frac{\ker(d : \Omega^p(M) \rightarrow \Omega^{p+1}(M))}{\operatorname{im}(d : \Omega^{p-1}(M) \rightarrow \Omega^p(M))},$$

chamados de grupos de cohomologia de de Rham.

**Definição 3.2.2.** Seja  $F : M \rightarrow N$  uma aplicação suave entre superfícies. O *pullback*  $F^* : \Omega^p(N) \rightarrow \Omega^p(M)$  induz uma aplicação em cohomologia  $F^* : H_{dR}^p(N) \rightarrow H_{dR}^p(M)$  por  $F^*[\omega] = [F^*\omega]$ .

De fato, se  $[\omega_1] = [\omega_2]$ , então  $\omega_1 = \omega_2 + d\eta$  para alguma  $(p-1)$ -forma  $\eta$ . Daí,

$$F^*\omega_1 = F^*(\omega_2 + d\eta) = F^*\omega_2 + F^*d\eta = F^*\omega_2 + d(F^*\eta),$$

de modo que  $[F^*\omega_1] = [F^*\omega_2]$ . Da linearidade de  $F^* : \Omega^p(N) \rightarrow \Omega^p(M)$ , segue que a induzida  $F^* : H_{dR}^p(N) \rightarrow H_{dR}^p(M)$  é um homomorfismo.

Como o *pullback* comuta com a derivada exterior,  $F^* : H_{dR}^*(N) \rightarrow H_{dR}^*(M)$  é um morfismo de complexos de cocadeias.

**Proposição 3.2.1.** *Sejam  $F : M \rightarrow N$  e  $G : N \rightarrow P$  duas aplicações suaves entre superfícies. Temos que  $(G \circ F)^* = F^* \circ G^* : H_{dR}^p(P) \rightarrow H_{dR}^p(M)$ . Além disso,  $\text{id}_M^*$  é a identidade de  $H_{dR}^p(M)$ . Em particular, se  $F : M \rightarrow N$  é um difeomorfismo, então  $F^*$  é um isomorfismo em cohomologia.*

*Demonstração.* Seja  $\omega \in H_{dR}^p(P)$  arbitrária, temos que

$$(G \circ F)^*[\omega] = [(G \circ F)^*\omega] = [F^*G^*\omega] = F^*[G^*\omega] = F^* \circ G^*[\omega].$$

Então,  $(G \circ F)^* = F^* \circ G^*$ . Agora, para cada  $\omega \in H_{dR}^p(M)$ , temos que

$$\text{id}_M^*[\omega] = [\text{id}_M^*\omega] = [\omega],$$

de modo que  $\text{id}_M^*$  é a identidade de  $H_{dR}^p(M)$ .

Finalmente, se  $F : M \rightarrow N$  é um difeomorfismo e  $H : N \rightarrow M$  é sua inversa, temos que

$$\begin{aligned} H \circ F &= \text{id}_M & \Rightarrow & F^* \circ H^* = \text{id}_{H_{dR}^p(M)} \\ F \circ H &= \text{id}_N & \Rightarrow & H^* \circ F^* = \text{id}_{H_{dR}^p(N)} \end{aligned}$$

e portanto  $F^*$  e  $H^*$  são inversas uma da outra. Com isso,  $F^*$  é um isomorfismo.  $\square$

No desenvolvimento dos próximos resultados, será sempre realizada a suposição de que as superfícies são conexas. Isso se dá em consequência do seguinte fato, que corresponde à capacidade de decompor os grupos de cohomologia de uma superfície geral nos grupos de suas componentes.

**Exemplo 3.2.1.** Seja  $M$  uma superfície desconexa. Podemos escrever

$$M = \bigsqcup_{k=1}^n M_k,$$

onde cada  $M_k$  é uma componente conexa de  $M$ . Para cada  $k \in \mathbb{Z}^+$ , essa decomposição estabelece um isomorfismo

$$\begin{aligned} \varphi : \Omega^k(M) &\longrightarrow \prod_{k=1}^n \Omega^k(M_k) \\ \omega &\longmapsto (\omega|_{M_1}, \dots, \omega|_{M_n}), \end{aligned}$$

onde  $\omega|_{M_k}$  é a restrição da forma  $\omega$  à componente conexa  $M_k$ . Ou seja, o isomorfismo consiste simplesmente na observação de que uma forma em  $M$  decompõe-se na soma de  $n$  formas, uma em cada componente conexa. Esse isomorfismo imediatamente se manifesta em cohomologia:

$$\begin{aligned} \varphi : H_{dR}^r(M) &\longrightarrow \prod_{k=1}^n H_{dR}^r(M_k) \\ [\omega] &\longmapsto ([\omega|_{M_1}], \dots, [\omega|_{M_n}]). \end{aligned}$$

Isso justifica o estudo dos grupos de cohomologia de de Rham limitado ao caso em que as superfícies são conexas: basta computar os grupos de cada parte conexa para descrever completamente os grupos de uma superfície geral.  $\triangleright$

### 3.3 O LEMA DE POINCARÉ E A INVARIÂNCIA HOMOTÓPICA

Estabeleceremos a invariância homotópica da Cohomologia de de Rham. Para isso, usaremos o Lema de Poincaré, que aponta a existência de um isomorfismo

$$H_{dR}^r(M) \cong H_{dR}^r(M \times \mathbb{R}).$$

Note que, seguindo o caminho contrário, o lema de Poincaré é uma consequência imediata da invariância homotópica:  $M$  e  $M \times \mathbb{R}$  são homotopicamente equivalentes. Basta notar que o segundo termo do produto pode ser colapsado da seguinte forma. Considerando  $\pi : M \times \mathbb{R} \rightarrow M$ , a projeção sobre o primeiro termo, e  $i : M \rightarrow M \times \mathbb{R}$ , a inclusão de  $M$  no produto dada por  $i(p) = (p, 0)$ ; temos que  $\pi \circ i = \text{id}_M$  e  $i \circ \pi$  é homotópica à identidade pela aplicação

$$\begin{aligned} H : (M \times \mathbb{R}) \times I &\longrightarrow M \times \mathbb{R} \\ (p, x), t &\longmapsto (p, tx). \end{aligned}$$

Veremos que a invariância homotópica é uma consequência direta do lema de Poincaré, que é facilmente demonstrado por meio de técnicas elementares.

**Lema de Poincaré.** *Seja  $M$  uma superfície. Há um isomorfismo*

$$H_{dR}^k(M) \cong H_{dR}^k(M \times \mathbb{R})$$

para todo  $k \in \mathbb{N}$ .

*Demonstração.* Considere as aplicações de inclusão e de projeção

$$\begin{aligned} i : M &\longrightarrow M \times \mathbb{R}, & i(p) &= (p, 0) \\ \pi : M \times \mathbb{R} &\longrightarrow M, & \pi(p, x) &= p \end{aligned}$$

Como  $\pi \circ i = \text{id}_M$ , para cada  $k \in \mathbb{N}$ ,  $i^* \circ \pi^*$  é a identidade de  $H_{dR}^k(M)$ . Resta provar que o mesmo também vale para  $\pi^* \circ i^*$ . A fim de fazer isso, mostraremos que existe uma aplicação

$$\Phi : \mathcal{A}^k(M \times \mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{A}^{k-1}(M \times \mathbb{R}),$$

para cada  $k \in \mathbb{N}$ , tal que

$$\text{id} - \pi^* \circ i^* = d\Phi + \Phi d,$$

onde  $d$  é a derivada exterior. Essa aplicação é chamada de aplicação de homotopia algébrica.

Se essas funções  $\Phi$  existem, para cada forma  $\omega \in \mathcal{A}^k(M \times \mathbb{R})$  fechada, vale que

$$\omega - (\pi^* \circ i^*)(\omega) = (\text{id} - \pi^* \circ i^*)(\omega) = d\Phi(\omega),$$

de modo que  $\text{id} - \pi^* \circ i^* = 0$  em cohomologia. Daí, segue o teorema:  $i^*$  e  $\pi^*$  são isomorfismos entre os grupos de cohomologia, um inverso do outro.

Agora, definiremos as aplicações  $\Phi$ . Seja  $(U, (x^1, \dots, x^n))$  uma carta para uma região da superfície  $M$ . Ela induz em  $M \times \mathbb{R}$  uma carta  $(U \times \mathbb{R}, (x^1, \dots, x^n, t))$ , onde  $t$  é a coordenada usual de  $\mathbb{R}$ , a identidade. Em expressão local, uma  $k$ -forma  $\omega$  pode escrita como

$$\omega = \sum_{i_1 < \dots < i_k} a_{i_1 \dots i_k}(x, t) dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} + \sum_{j_1 < \dots < j_{k-1}} b_{j_1 \dots j_{k-1}}(x, t) dt \wedge dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_{k-1}}.$$

Definimos  $\Phi\omega$  pondo

$$\Phi\omega = \sum_{j_1 < \dots < j_{k-1}} \left( \int_0^t b_{j_1 \dots j_{k-1}}(x, s) ds \right) dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_{k-1}}.$$

A fim de que  $\Phi$  esteja bem definida, precisamos mostrar que a definição acima é independente da escolha de coordenadas. Para isso, lembramos da fórmula de mudança de coeficientes de formas diferenciais. (Referenciar a seção sobre formas diferenciais). Seja  $(V, (y^1, \dots, y^n))$  uma outra carta de  $M$  tal que  $U \cap V \neq \emptyset$ . Nessa outra carta,  $\omega$  tem a expressão

$$\omega = \sum_{i_1 < \dots < i_k} \tilde{a}_{i_1 \dots i_k}(y, t) dy^{i_1} \wedge \dots \wedge dy^{i_k} + \sum_{j_1 < \dots < j_{k-1}} \tilde{b}_{j_1 \dots j_{k-1}}(y, t) dt \wedge dy^{j_1} \wedge \dots \wedge dy^{j_{k-1}}.$$

Observe que

$$\tilde{b}_{j_1 \dots j_{k-1}} = \sum_{i_1 < \dots < i_{k-1}} b_{i_1 \dots i_{k-1}} \frac{\partial(t, x^{i_1}, \dots, x^{i_{k-1}})}{\partial(t, y^{j_1}, \dots, y^{j_{k-1}})} = \sum_{i_1 < \dots < i_{k-1}} b_{i_1 \dots i_{k-1}} \frac{\partial(x^{i_1}, \dots, x^{i_{k-1}})}{\partial(y^{j_1}, \dots, y^{j_{k-1}})}.$$

Por definição,  $\Phi\omega$  tem a expressão

$$\Phi\omega = \sum_{j_1 < \dots < j_{k-1}} \left( \int_0^t \tilde{b}_{j_1 \dots j_{k-1}}(x, s) ds \right) dy^{j_1} \wedge \dots \wedge dy^{j_{k-1}}.$$

Com isso, temos que

$$\begin{aligned} \Phi\omega &= \sum_{j_1 < \dots < j_{k-1}} \left( \int_0^t \tilde{b}_{j_1 \dots j_{k-1}}(x, s) ds \right) dy^{j_1} \wedge \dots \wedge dy^{j_{k-1}} \\ &= \sum_{j_1 < \dots < j_{k-1}} \sum_{i_1 < \dots < i_{k-1}} \left( \int_0^t \tilde{b}_{j_1 \dots j_{k-1}}(x, s) ds \right) \frac{\partial(y^{j_1}, \dots, y^{j_{k-1}})}{\partial(x^{i_1}, \dots, x^{i_{k-1}})} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_{k-1}} \\ &= \sum_{i_1 < \dots < i_{k-1}} \left( \int_0^t \sum_{j_1 < \dots < j_{k-1}} \tilde{b}_{j_1 \dots j_{k-1}}(x, s) \frac{\partial(y^{j_1}, \dots, y^{j_{k-1}})}{\partial(x^{i_1}, \dots, x^{i_{k-1}})} ds \right) dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_{k-1}} \\ &= \sum_{i_1 < \dots < i_{k-1}} \left( \int_0^t b_{i_1 \dots i_{k-1}}(x, s) ds \right) dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_{k-1}} = \Phi\omega. \end{aligned}$$

Portanto, a definição dada para  $\Phi\omega$  é independente das coordenadas. Desse modo,  $\Phi\omega$  está bem definida. Agora, mostraremos que  $\Phi$  satisfaz a propriedade desejada.

Mostraremos que  $\text{id} - \pi^* \circ i^* = d\Phi + \Phi d$  por computação direta. Por linearidade, basta considerar dois casos:

1.  $\omega$  tem a forma  $a(x, t)dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$ .
2.  $\omega$  tem a forma  $b(x, t)dt \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_{k-1}}$ .

No primeiro caso, temos que

$$\begin{aligned}
 (d\Phi + \Phi d)\omega &= (d\Phi + \Phi d)(a(x, t)dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}) \\
 &= d(0) + \Phi d(a(x, t)dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}) \\
 &= \Phi \left( \sum_{j=1}^n \frac{\partial a}{\partial x^j}(x, t)dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} + \frac{\partial a}{\partial t}(x, t)dt \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} \right) \\
 &= \left( \int_0^t \frac{\partial a}{\partial s}(x, s) ds \right) dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} \\
 &= [a(x, t) - a(x, 0)]dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} \\
 &= \text{id}(a(x, t)dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}) - \pi^*(a(x, 0)dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}) \\
 &= \text{id}(a(x, t)dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}) - \pi^* \circ i^*(a(x, t)dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}) \\
 &= (\text{id} - \pi^* \circ i^*)(a(x, t)dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}) \\
 &= (\text{id} - \pi^* \circ i^*)(\omega).
 \end{aligned}$$

Já no segundo caso, começamos observando que  $i^*(dt) = d(t \circ i) = 0$  porque  $t \circ i$  é constante. Com isso, temos

$$\begin{aligned}
 (\text{id} - \pi^* \circ i^*)(b(x, t)dt \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_{k-1}}) &= b(x, t)dt \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_{k-1}} - \pi^*(0) \\
 &= b(x, t)dt \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_{k-1}}.
 \end{aligned}$$

Por outro lado, temos

$$\begin{aligned}
& (d\Phi + \Phi d)(\omega) \\
&= (d\Phi + \Phi d)(b(x, t)dt \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_{k-1}}) \\
&= d\left(\left(\int_0^t b(x, s) ds\right) dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_{k-1}}\right) + \\
&\quad \Phi \left( \sum_{j=1}^n \frac{\partial b}{\partial x^j} dx^j \wedge dt \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_{k-1}} + \underbrace{\frac{\partial b}{\partial t} dt \wedge dt \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_{k-1}}}_{=0} \right) \\
&= \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x^j} \left(\int_0^t b(x, s) ds\right) dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_{k-1}} \\
&\quad + b(x, t) dt \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_{k-1}} \\
&\quad - \sum_{j=1}^n \left(\int_0^t \frac{\partial b}{\partial x^j}(x, s) ds\right) dx^j dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_{k-1}} \\
&= \sum_{j=1}^n \left[ \frac{\partial}{\partial x^j} \left(\int_0^t b(x, s) ds\right) - \int_0^t \frac{\partial b}{\partial x^j}(x, s) ds \right] dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_{k-1}} \\
&\quad + b(x, t) dt \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_{k-1}} \\
&= b(x, t) dt \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_{k-1}},
\end{aligned}$$

o que estabelece a igualdade.  $\square$

A técnica por trás da construção de  $\Phi$  é chamada de integração sobre fibras, como aponta (TU; BOTT, 1982).

A fim de demonstrar a invariância homotópica da Cohomologia de de Rham, começamos demonstrando que aplicações suaves que são (suavemente) homotópicas induzem os menos *pullbacks* em cohomologia. Nesse passo, é utilizado o Lema de Poincaré. Depois disso, trata-se da aplicação de alguns resultados de aproximação apontados na Seção 2.1.3.

**Corolário 3.3.1.** *Sejam  $f, g : M \rightarrow N$  aplicações suaves e  $H : f \cong g$  uma homotopia suave, com domínio em  $M \times \mathbb{R}$ . Então, os pullbacks  $f^*$  e  $g^*$  são iguais.*

*Demonstração.* Considere as aplicações de inclusão  $i_1 : M \rightarrow M \times \mathbb{R}$ , dada por  $i_1(p) = (p, 1)$ , e  $i_0 : M \rightarrow M \times \mathbb{R}$ . Pelo Lema de Poincaré, essas duas aplicações são isomorfismos em cohomologia. Note que  $i_1$  é a composição de  $i_0$  com um homeomorfismo de translação em  $M \times \mathbb{R}$  que imediatamente é um isomorfismo em cohomologia.

Além disso, pelo Lema de Poincaré, temos que

$$i_1^* \circ \pi^* = \text{id}_{H_{dR}^r(M)}, \quad i_0^* \circ \pi^* = \text{id}_{H_{dR}^r(M)}, \quad \pi^* \circ i_1^* = \text{id}_{H_{dR}^r(M \times \mathbb{R})}, \quad \pi^* \circ i_0^* = \text{id}_{H_{dR}^r(M \times \mathbb{R})}.$$

Assim, pela unicidade da inversa, temos que  $i_0^* = i_1^*$ .

Temos que  $f = H \circ i_1$  e  $g = H \circ i_0$ . Então, temos que

$$f^* = (H \circ i_1)^* = i_1^* \circ H^* = i_0^* \circ H^* = (H \circ i_0)^* = g^*,$$

como queríamos demonstrar.  $\square$

### 3.4 COMPUTAÇÕES USANDO A INVARIÂNCIA HOMOTÓPICA

Discutimos, agora, algumas consequências imediatas da invariância homotópica da cohomologia de de Rham.

**Exemplo 3.4.1** (Cohomologia de grau 0). Seja  $M$  uma superfície conexa qualquer. Como não existe  $(-1)$ -forma não trivial,  $B^0(M) = 0$ . Assim,  $H_{dR}^0(M) = Z^0(M)$ . Uma 0-forma em  $M$  é uma aplicação suave  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ . Dizer que  $f$  é uma forma fechada é dizer que sua diferencial é nula,  $df = 0$ . Com isso,  $f$  deve ser uma aplicação constante.

De fato, se  $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$  é uma curva suave qualquer ligando os pontos  $p$  e  $q$  de  $M$ , então

$$\frac{d}{dt}(f \circ \gamma)(t) = df_{\gamma(t)}(\gamma'(t)) = 0,$$

para todo  $t \in [0, 1]$ , porque  $df = 0$ . Com isso, a aplicação suave  $f \circ \gamma$  tem derivada nula e deve ser constante. Isso significa que  $f(p) = f(q)$  para quaisquer  $p, q \in M$ , de modo que  $f$  é constante. Reciprocamente, toda aplicação suave constante tem diferencial nula. Logo,  $Z^0(M)$  é o espaço das funções constantes.

Há uma identificação natural entre o espaço das funções constantes e  $\mathbb{R}$ , que é dada pela avaliação em um ponto  $p \in M$  fixado:  $f \mapsto f(p)$  é uma bijeção entre  $Z^0(M)$  e  $\mathbb{R}$ . Consequentemente,  $H_{dR}^0(M) \cong \mathbb{R}$ . ▷

**Exemplo 3.4.2.** Considere a superfície 0-dimensional formada por um único ponto  $M = \{p\}$ . Os conjuntos  $\Omega^k(M)$  são triviais para todo  $k \neq 0$ . Assim,  $H_{dR}^k(M) = 0$  para todo  $k > 0$ . Como consiste de um único ponto,  $M$  é conexa. Assim,  $H_{dR}^0(M) = 0$  ▷

Um complexo de cohomologia cujos grupos são iguais aos grupos de um ponto é dito ser acíclico.

**Exemplo 3.4.3.** Um espaço topológico é dito ser contrátil quando tem o mesmo tipo de homotopia que um ponto. Superfícies contráteis têm os mesmo grupos de cohomologia do exemplo anterior.

Um subconjunto  $U \subseteq \mathbb{R}$  é dito ser estrelado quando existe um ponto  $p \in U$  tal que todo  $q \in U$  pode ser ligado a  $p$  por meio de um segmento de reta contido em  $U$ . Em particular, todo conjunto convexo é estrelado. Todo conjunto estrelado tem o mesmo tipo de homotopia que um ponto. ▷

**Exemplo 3.4.4** (Cohomologia de  $\mathbb{R}^n$ ). É claro que  $\mathbb{R}^n$  é estrelado. Como consequência disso, os grupos de cohomologia de  $\mathbb{R}^n$  são

$$H_{dR}^k(\mathbb{R}^n) = \begin{cases} \mathbb{R}, & k = 0, \\ 0, & k \neq 0. \end{cases}$$

Observe que essa também é uma consequência direta do Lema de Poincaré:

$$H_{dR}^k(\mathbb{R}^n) \cong H_{dR}^k(\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}) \cong H_{dR}^k(\mathbb{R}^{n-1}) \cong \dots \cong H_{dR}^k(\mathbb{R}) \cong H_{dR}^k(\{0\} \times \mathbb{R}) \cong H_{dR}^k(\{0\}),$$

onde identificamos  $\{0\} \times \mathbb{R}$  com  $\mathbb{R}$ . ▷

### 3.5 O TEOREMA DE MAYER-VIETORIS

Apresentamos agora uma técnica importante para o cálculo dos grupos de cohomologia de uma superfície arbitrária por meio da decomposição dela em duas subsuperfícies abertas. Essa técnica consiste no estabelecimento de uma sequência exata longa, chamada de sequência de Mayer-Vietoris, entre os grupos de cohomologia, com a qual os grupos desejados podem ser computados.

A fim de fazer isso, começaremos estabelecendo um resultado algébrico importante, que pode ser visto como uma fábrica de sequências de Mayer-Vietoris. A técnica da demonstração dele é um exemplo daquilo que é chamado de “*diagram chasing*”.

**Lema do Zigue-Zague.** *Seja uma sequência exata curta de complexos de cocadeias*

$$0 \rightarrow \mathcal{C}_1 \xrightarrow{i} \mathcal{C}_2 \xrightarrow{j} \mathcal{C}_3 \rightarrow 0$$

Para cada  $p > 0$ , existe um homomorfismo  $\partial_* : H^p(\mathcal{C}_3) \rightarrow H^{p+1}(\mathcal{C} + 1)$  tal que a sequência

$$\dots \rightarrow H^p(\mathcal{C}_1) \xrightarrow{i} H^p(\mathcal{C}_2) \xrightarrow{j} H^p(\mathcal{C}_3) \xrightarrow{\partial} H^{p+1}(\mathcal{C}_1) \xrightarrow{i} H^{p+1}(\mathcal{C}_2) \rightarrow \dots$$

é exata.

**Demonstração. Passo 1.** Começamos especificando o morfismo  $\partial : H^p(\mathcal{C}_3) \rightarrow H^{p+1}(\mathcal{C}_1)$ .

$$\begin{array}{ccc} y & \longmapsto & z \\ \mathcal{C}_2^p & \xrightarrow{j} & \mathcal{C}_3^p \\ & \downarrow d_p & \\ \mathcal{C}_1^{p+1} & \xrightarrow{i} & \mathcal{C}_2^{p+1} \\ x & \longmapsto & d_p y \end{array}$$

Dada a classe  $[z] \in H^p(\mathcal{C}_3)$ , da sobrejetividade de  $j$  existe  $y \in \mathcal{C}_2^p$  tal que  $j(y) = z$ . Daí,  $d_p y$  está no núcleo de  $j$  porque  $j d_p y = d_p j(y) = d_p z = 0$  porque  $z \in Z^p(\mathcal{C}_3)$ . Portanto, existe um (único)  $x$  tal que  $i(x) = d_p y$ . Definimos  $\partial[z] = [x]$ . Ou seja,  $\partial_* = i^{-1} d_p j^{-1}$  em cohomologia.

**Passo 2.** Agora, o leitor pode verificar que  $\partial$  está bem definido, isto é, não depende das escolhas realizadas nesse processo de definição.

**Passo 3.** Vejamos que a sequência é exata em  $H^p(C_2)$ . Seja  $[y] \in \text{im } i$ . Então, existe  $x \in C_1^p$  tal que  $[y] = i[x] = [i(x)]$ . Então,  $j[y] = j[i(x)] = [j(i(x))] = [0] = 0$ . Logo,  $\text{im } i \subseteq \ker j$ .

Inversamente, se  $[y] \in \ker j$ , temos que  $[j(y)] = j[y] = 0$ , de modo que  $j(y) = d_{p-1}z$  para algum  $z \in C_3^p$ . Existe  $y' \in C_2^{p-1}$  tal que  $j(y') = z$ . Assim,  $d_{p-1}z = d_{p-1}j(y') = jd_{p-1}y'$ . Assim,

$$j(y - d_{p-1}y') = 0.$$

Por exatidão, há  $x \in C_1^p$  tal que  $i(x) = y - d_{p-1}y'$ . Nesse caso,  $i[x] = [y - d_{p-1}y'] = [y]$ , de modo que  $[y] \in \text{im } i$ . Logo,  $\ker j \subseteq \text{im } i$ , o que estabelece a igualdade.

**Passo 4.** Vejamos que a sequência é exata em  $H^p(C_3)$ . Seja  $[z] \in \text{im } j$ . Nesse caso, existe  $[y] \in H^p(C_2)$  tal que  $[z] = j[y] = [j(y)]$ . Então, temos que

$$\partial[z] = \partial j[y] = \partial[j(y)].$$

Temos que  $d_p y = 0$ . Assim,  $\partial[z] = [i^{-1}d_p j^{-1}j(y)] = [i^{-1}d_p y] = [i^{-1}0] = [0] = 0$ , admitindo um certo abuso de notação. Logo,  $\text{im } j \subseteq \ker \partial$ .

Inversamente, seja  $[z] \in \ker \partial$ . Nesse caso,  $\partial[z] = [x] = 0$  significa que  $x = d_p x'$  para algum  $x' \in C_1^p$ . Tomando  $y \in C_2^p$  tal que  $j(y) = z$ , temos que

$$d_p(y) = i(x) = i(d_p x') = d_p i(x'),$$

de onde  $d_p(y - i(x')) = 0$ . Temos que  $y - i(x')$  é um ciclo de  $C_2^p$  tal que

$$j[y - i(x')] = [j(y - i(x'))] = [j(y) - j(i(x'))] = [j(y)] = [z].$$

Daí,  $[z] \in \text{im } j$ . Logo,  $\ker \partial \subseteq \text{im } j$ , o que estabelece a igualdade.

**Passo 5.** Vejamos que a sequência é exata em  $H^{p+1}(C_1)$ . Seja  $[x] \in \text{im } \partial$ . Então, há  $[z]$  em  $C_3^p$  tal que  $[x] = \partial[z]$ . Nesse caso, pela construção do morfismo há  $y \in C_2^p$  tal que  $j(y) = z$  e  $i(x) = d_p y$ . Então,  $i[x] = [i(x)] = [d_p y] = 0$ , de modo que  $[x] \in \ker i$ . Logo,  $\text{im } \partial \subseteq \ker i$ .

Reciprocamente, suponhamos que  $[x] \in \ker i$ . Nesse caso,  $i[x] = [i(x)] = 0$ , de modo que  $i(x) = d_p y$  para algum  $y \in C_2^p$ . Tomando  $z = j(y)$ , temos que

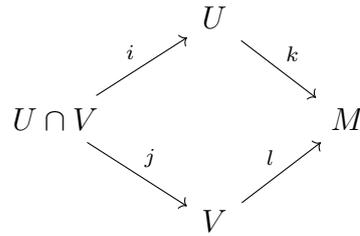
$$d_p z = d_p j(y) = j d_p(y) = j(i(x)) = 0,$$

de onde  $\partial[z] = [x]$ . Com isso,  $[x] \in \text{im } \partial$ . Logo,  $\ker i \subseteq \text{im } \partial$ , o que estabelece a igualdade.  $\square$

Agora, seja  $M$  uma superfície e  $U, V \subseteq M$  dois abertos tais que  $M = U \cup V$ . Nessa situação, ficam definidos quatro morfismos de inclusão:

$$i : U \cap V \rightarrow U, \quad j : U \cap V \rightarrow V, \quad k : U \rightarrow M, \quad l : V \rightarrow M,$$

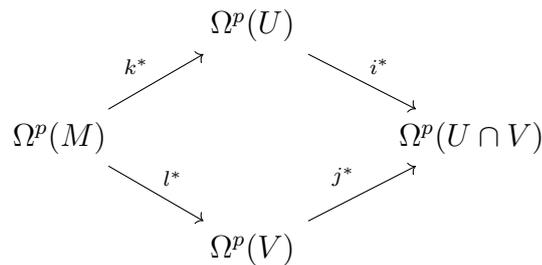
Que podem ser arranjados esquematicamente no diagrama



Esses morfismos, induzem morfismos entre os espaços das  $p$ -formas por meio dos *pullbacks*, que agem por restrição:

- $i^* : \Omega^p(U) \rightarrow \Omega^p(U \cap V)$ , que é dado por  $i^*\omega = \omega|_{U \cap V}$ .
- $j^* : \Omega^p(V) \rightarrow \Omega^p(U \cap V)$ , que é dado por  $j^*\omega = \omega|_{U \cap V}$ .
- $k^* : \Omega^p(M) \rightarrow \Omega^p(U)$ , que é dado por  $k^*\omega = \omega|_U$ .
- $l^* : \Omega^p(M) \rightarrow \Omega^p(V)$ , que é dado por  $l^*\omega = \omega|_V$ .

Eles podem ser arranjados esquematicamente como



**Proposição 3.5.1.** Para cada  $p \in \mathbb{Z}^+$ , a sequência

$$0 \rightarrow \Omega^p(M) \xrightarrow{k^* \oplus l^*} \Omega^p(U) \oplus \Omega^p(V) \xrightarrow{i^* - j^*} \Omega^p(U \cap V) \rightarrow 0,$$

onde

$$\begin{aligned}
 k^* \oplus l^*(\omega) &= (k^*\omega, l^*\omega) = (\omega|_U, \omega|_V) \\
 (i^* - j^*)(\omega, \eta) &= i^*\omega - j^*\eta = \omega|_{U \cap V} - \eta|_{U \cap V},
 \end{aligned}$$

é exata.

**Demonstração. Passo 1.**  $k^* \oplus l^*$  é injetivo. Ora, seja  $\omega \in \ker k^* \oplus l^*$ . Temos que

$$(0, 0) = (\omega|_U, \omega|_V) = (k^* \oplus l^*)(\omega).$$

Como  $M = U \cup V$ , esse só pode ser o caso se a forma  $\omega$  for identicamente nula. Portanto,  $\ker k^* \oplus l^* = \{0\}$ , de modo que  $k^* \oplus l^*$  é injetivo.

**Passo 2.** A seqüência é exata em  $\Omega^p(U) \oplus \Omega^p(V)$ , isto é,  $\text{im } k^* \oplus l^* = \ker(i^* - j^*)$ . De fato, se  $(\omega, \eta) \in \text{im } k^* \oplus l^*$ , é porque existe  $\zeta \in \Omega^p(M)$  tal que

$$\omega = \zeta|_U, \quad \eta = \zeta|_V.$$

Daí,  $(i^* - j^*)(\omega, \eta) = \zeta|_{U \cap V} - \zeta|_{U \cap V} = 0$ . Portanto,  $\text{im } k^* \oplus l^* \subseteq \ker(i^* - j^*)$ .

Reciprocamente, se  $(\omega, \eta) \in \ker(i^* - j^*)$ , então  $\omega|_{U \cap V} = \eta|_{U \cap V}$ . Nesse caso, a expressão

$$\zeta(x) = \begin{cases} \omega(x), & x \in U \setminus U \cap V, \\ \omega(x) = \eta(x), & x \in U \cap V \\ \eta(x), & x \in V \setminus U \cap V, \end{cases}$$

define a forma  $\zeta \in \Omega^p(M)$  porque para cada  $x$ , há uma vizinhança em que  $\zeta$  coincide com  $\omega$  ou com  $\eta$ , de modo que  $\zeta$  é uma forma suave. Por construção, temos que  $\zeta|_U = \omega$  e  $\zeta|_V = \eta$ , isto é, temos que  $(k^* \oplus l^*)(\zeta) = (\omega, \eta)$ . Portanto,  $(\omega, \eta) \in \text{im } k^* \oplus l^*$ . Logo,  $\ker(i^* - j^*) \subseteq \text{im } k^* \oplus l^*$ , de onde segue a igualdade desejada.

**Passo 3.** A aplicação  $i^* - j^*$  é sobrejetiva. Como  $\{U, V\}$  é uma cobertura aberta de  $M$ , há uma partição da unidade  $\{\varphi, \psi\}$  subordinada a ela. Os mapas  $\varphi$  e  $\psi$  são suaves,  $\text{supp } \varphi \subseteq U$ ,  $\text{supp } \psi \subseteq V$ , e  $\varphi + \psi = 1$ .

Dada  $\omega \in \Omega^p(U \cap V)$ , temos que

$$\omega = 1 \cdot \omega = (\varphi + \psi)\omega = \varphi\omega + \psi\omega.$$

Definimos

$$\zeta = \begin{cases} \psi\omega, & \text{em } U \cap V, \\ 0, & \text{em } U \setminus \text{supp } \psi, \end{cases} \quad \eta = \begin{cases} -\varphi\omega, & \text{em } U \cap V, \\ 0, & \text{em } U \setminus \text{supp } \varphi. \end{cases}$$

Temos que  $i^* - j^*(\zeta, \eta) = \psi\omega - (-\varphi\omega) = (\varphi + \psi)\omega = \omega$ , de modo que  $\omega \in \text{im } (i^* - j^*)$ , como queríamos demonstrar.  $\square$

**Corolário 3.5.1.** *Dessa proposição, concluímos que há uma seqüência exata de complexos de de Rham*

$$0 \rightarrow \Omega^*(M) \xrightarrow{k^* \oplus l^*} \Omega^*(U) \oplus \Omega^*(V) \xrightarrow{i^* - j^*} \Omega^*(U \cap V) \rightarrow 0.$$

*Demonstração.* De fato, notando que a derivada exterior é local e portanto comuta com a tomada de restrições, temos que

$$d \circ (k^* \oplus l^*)(\omega) = d(\omega|_U, \omega|_V) = (d(\omega|_U), d(\omega|_V)) = (d\omega|_U, d\omega|_V) = (k^* \oplus l^*)(d\omega),$$

de modo que  $d \circ (k^* \oplus l^*) = (k^* \oplus l^*) \circ d$ , e também

$$\begin{aligned} d \circ (i^* - j^*)(\omega, \eta) &= d(\omega|_{U \cap V} - \eta|_{U \cap V}) \\ &= d(\omega|_{U \cap V}) - d(\eta|_{U \cap V}) = d\omega|_{U \cap V} - d\eta|_{U \cap V} = (i^* - j^*)(d\omega), \end{aligned}$$

de modo que  $d \circ (i^* - j^*) = (i^* - j^*) \circ d$ .

Portanto, realmente tratam-se de morfismos entre complexos.  $\square$

Agora, resta reunir todos os resultados demonstrados como um único enunciado:

**Teorema 3.5.1** (Mayer-Vietoris). *Seja  $M$  uma superfície e  $U, V \subseteq M$  dois abertos tais que  $M = U \cup V$ . Para cada  $p$ , existe um mapa  $\partial^* : H_{dR}^p(U \cap V) \rightarrow H_{dR}^p(M)$  tal que a seguinte seqüência*

$$\dots \xrightarrow{\partial^*} H_{dR}^p(M) \xrightarrow{k^* \oplus l^*} H_{dR}^p(U) \oplus H_{dR}^p(V) \xrightarrow{i^* - j^*} H_{dR}^p(U \cap V) \xrightarrow{\partial^*} H_{dR}^{p+1}(M) \xrightarrow{k^* \oplus l^*} \dots,$$

chamada *seqüência de Mayer-Vietoris*, é uma *seqüência exata longa*.

*Demonstração.* Basta aplicar o lema do zigue-zague à seqüência exata curta do corolário.  $\square$

### 3.6 COMPUTAÇÕES USANDO A SEQUÊNCIA DE MAYER-VIETORIS

**Exemplo 3.6.1** (Circunferência). Seja  $\mathbb{S}^1$  a circunferência unitária em  $\mathbb{R}^2$ . Sejam  $N = (0, 1)$  o polo norte e  $S = (0, -1)$  o polo sul da circunferência  $\mathbb{S}^1$ . Tomando  $U = \mathbb{S}^1 \setminus \{S\}$  e  $V = \mathbb{S}^1 \setminus \{N\}$ , temos que  $\mathbb{S}^1 = U \cup V$ ,  $U \cong \mathbb{R}$ ,  $V \cong \mathbb{R}$  e  $U \cap V$  é a união disjunta de duas retas. Assim,

$$H_{dR}^1(U) \cong H_{dR}^1(V) \cong H_{dR}^1(U \cap V) \cong 0, \quad H_{dR}^0(U) \cong H_{dR}^0(V) \cong \mathbb{R}, \quad H_{dR}^0(U \cap V) \cong \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}.$$

A última igualdade é consequência de  $U \cap V$  ter duas componentes conexas.

A seqüência de Mayer-Vietoris escreve-se

$$0 \rightarrow H_{dR}^0(\mathbb{S}^1) \rightarrow H_{dR}^0(U) \oplus H_{dR}^0(V) \rightarrow H_{dR}^0(U \cap V) \rightarrow \\ H_{dR}^1(\mathbb{S}^1) \rightarrow H_{dR}^1(U) \oplus H_{dR}^1(V) \rightarrow H_{dR}^1(U \cap V) \rightarrow 0.$$

Como  $\mathbb{S}^1$  é conexo, sabemos que  $H_{dR}^0(\mathbb{S}^1) \cong \mathbb{R}$ . Então, temos que

$$0 \rightarrow \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \rightarrow H_{dR}^1(\mathbb{S}^1) \rightarrow 0.$$

A dimensão de  $H_{dR}^1(\mathbb{S}^1)$  pode ser calculada por meio meio das somas alternadas:

$$1 - 2 + 2 - \dim H_{dR}^1(\mathbb{S}^1) = 0,$$

de modo que  $\dim H_{dR}^1(\mathbb{S}^1) = 1$ , isto é,  $H_{dR}^1(\mathbb{S}^1) \cong \mathbb{R}$ .

Em suma, temos que

$$H_{dR}^k(\mathbb{S}^1) = \begin{cases} \mathbb{R}, & k = 0, 1, \\ 0, & k \neq 0, 1. \end{cases}$$

$\triangleright$

Esse exemplo pode ser generalizado, por indução, para o caso da esfera  $\mathbb{S}^n$ . Tomando a circunferência como caso base, temos:

**Exemplo 3.6.2** (Esferas). Seja  $\mathbb{S}^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$  a esfera unitária centrada na origem. Mostraremos por indução que os únicos grupos de cohomologia de  $\mathbb{S}^n$  não triviais são os de ordem 0 e  $n$ .

De fato, sejam  $N = (0, \dots, 0, 1)$  o polo norte e  $S = (0, \dots, 0, -1)$  o polo sul da esfera  $\mathbb{S}^n$ . Sejam  $U = \mathbb{S}^n \setminus \{S\}$  e  $V = \mathbb{S}^n \setminus \{N\}$ . Temos que  $\mathbb{S}^n = U \cup V$ .

Pela projeção estereográfica,  $U \cong \mathbb{R}^n$  e  $V \cong \mathbb{R}^n$ . Além disso,  $U \cap V \cong \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ , que tem o mesmo tipo de homotopia que  $\mathbb{S}^{n-1}$ . Isso nos permite calcular os grupos de cohomologia por indução. A sequência de Mayer-Vietoris escreve-se

$$\dots \rightarrow H_{dR}^p(U) \oplus H_{dR}^p(V) \rightarrow H_{dR}^p(\mathbb{S}^{n-1}) \rightarrow H_{dR}^{p+1}(\mathbb{S}^n) \rightarrow H_{dR}^{p+1}(U) \oplus H_{dR}^{p+1}(V) \rightarrow \dots,$$

de modo que, para  $p > 0$ , temos

$$0 \rightarrow H_{dR}^p(\mathbb{S}^{n-1}) \rightarrow H_{dR}^{p+1}(\mathbb{S}^n) \rightarrow 0,$$

de modo que  $H_{dR}^p(\mathbb{S}^{n-1}) \cong H_{dR}^{p+1}(\mathbb{S}^n)$ . Considerar  $p = 0$  não é necessário porque, como  $\mathbb{S}^n$  é conexo, temos  $H_{dR}^0(\mathbb{S}^n) \cong \mathbb{R}$ .

Dessa relação de recorrência, temos que

$$H_{dR}^n(\mathbb{S}^n) \cong H_{dR}^{n-1}(\mathbb{S}^{n-1}) \cong \dots \cong H_{dR}^1(\mathbb{S}^1) \cong \mathbb{R}.$$

Para  $0 < k < n$ , temos que

$$H_{dR}^k(\mathbb{S}^n) \cong H_{dR}^{k-1}(\mathbb{S}^{n-1}) \cong \dots \cong H_{dR}^1(\mathbb{S}^{n+1-k}) \cong 0$$

porque  $\mathbb{S}^{n+1-k}$  é simplesmente conexa.

Consequentemente, temos que

$$H_{dR}^p(\mathbb{S}^n) \cong \begin{cases} \mathbb{R}, & p = 0, n, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

▷

**Exemplo 3.6.3** (Cohomologia do espaço euclidiano perfurado). Seja  $p \in \mathbb{R}^n$ . Temos que

$$H_{dR}^p(\mathbb{R}^n \setminus \{p\}) \cong \begin{cases} \mathbb{R}, & k = 0, n-1, \\ 0, & k \neq 0, n-1. \end{cases}$$

Adicionalmente, uma  $(n-1)$ -forma fechada  $\omega$  é exata se, e somente se,

$$\int_S \omega = 0$$

para alguma esfera centrada em  $p$ .

Por translação, podemos supor sem perda de generalidade que  $p = 0$ . Considere  $S = \mathbb{S}^{n-1}$  a esfera unitária em torno da origem. O mapa de projeção radial

$$\begin{aligned} \pi : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} &\longrightarrow S \\ x &\longmapsto \frac{x}{|x|} \end{aligned}$$

e o mapa de inclusão  $i : S \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  formam um par de equivalência homotópica. De fato,  $\pi \circ i = \text{id}_S$  e  $i \circ \pi \cong \text{id}_{\mathbb{R}^n \setminus \{0\}}$  pela homotopia

$$H : (\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \times [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$$

$$(x, t) \longmapsto tx + (1 - t)\frac{x}{|x|},$$

que é tal que  $H(x, 0) = \pi(x)$  e  $H(x, 1) = x = \text{id}(x)$ .

Conseqüentemente, pela invariância homotópica da cohomologia de de Rham, temos que

$$H_{dR}^p(\mathbb{R}^n \setminus \{p\}) \cong H_{dR}^p(\mathbb{S}^{n-1}) \cong \begin{cases} \mathbb{R}, & k = 0, n - 1, \\ 0, & k \neq 0, n - 1. \end{cases}$$

Agora, consideramos o homomorfismo de grupos

$$\Phi : Z^{n-1}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\omega \longmapsto \int_S i^* \omega.$$

Note que  $\Phi$  é um homomorfismo não nulo: considere uma carta  $(U, \varphi)$  de  $S$ . Em  $\varphi(U)$  tomamos uma  $(n - 1)$ -forma  $\xi$  de suporte compacto e integral não nula, por exemplo o produto de uma função suave  $\psi$  de suporte compacto contido em  $\varphi(U)$  pela forma volume de  $\varphi(U) \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$ . Daí, definimos  $\zeta$  em  $S$  como  $(\varphi)^* \xi$  estendida a zero, e tomamos  $\pi^*(\zeta)$  em  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ .

Portanto,  $\Phi$  é sobrejetivo. Como  $H_{dR}^{n-1}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \cong \mathbb{R}$ , a forma  $\omega \in Z^{n-1}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$  pode ser escrita como

$$\omega = \lambda \zeta + d\eta,$$

onde  $\eta$  é uma  $(n - 2)$ -forma,  $\lambda \in \mathbb{R}$ , e  $\zeta$  é uma forma não exata. Temos que

$$0 = \Phi(\omega) = \int_S i^*(\lambda \zeta + d\eta) = \lambda \int_S i^* \zeta + \int_S i^*(d\eta) = \lambda \int_S i^* \zeta + \int_S d(i^* \eta) = \lambda \int_S i^* \zeta,$$

de onde  $\lambda = 0$ . Conseqüentemente,  $\omega = d\eta$  é exata. ▷

**Exemplo 3.6.4 (Toro).** Considere o toro  $\mathbb{T} = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ , que pode ser realizado em  $\mathbb{R}^3$  como a superfície dada pela pré-imagem do valor regular 0 é

$$(\sqrt{x^2 + y^2} - R)^2 + z^2 = r^2, \quad R > r.$$

Seja  $\frac{r}{2} > \delta > 0$ . Considere

$$U = T \cap \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x < \delta\}, \quad V = T \cap \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x > -\delta\}.$$

Temos que  $\mathbb{T} = U \cup V$ . Temos que  $U \cong V \cong \mathbb{R} \times \mathbb{S}^1$ , cada um dos dois abertos são homeomorfos a cilindros. Além disso,  $U \cap V$  é desconexo, com cada componente também

homeomorfa ao cilindro  $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^1$ . Notando que  $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^1$  tem o mesmo tipo de homotopia que  $\mathbb{S}^1$ , temos que

$$\begin{aligned} H_{dR}^0(U) &\cong H_{dR}^0(V) \cong \mathbb{R}, & H_{dR}^0(U \cap V) &\cong \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}, \\ H_{dR}^1(U) &\cong H_{dR}^1(V) \cong \mathbb{R}, & H_{dR}^1(U \cap V) &\cong \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}, \\ H_{dR}^2(U) &\cong H_{dR}^2(V) \cong H_{dR}^2(U \cap V) \cong 0. \end{aligned}$$

Como  $T$  é conexo, é imediato que  $H_{dR}^0(\mathbb{T}) \cong \mathbb{R}$ .

A sequência de Mayer-Vietoris escreve-se

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow H_{dR}^0(\mathbb{T}) \rightarrow H_{dR}^0(U) \oplus H_{dR}^0(V) \rightarrow H_{dR}^0(U \cap V) \rightarrow \\ H_{dR}^1(\mathbb{T}) \rightarrow H_{dR}^1(U) \oplus H_{dR}^1(V) \rightarrow H_{dR}^1(U \cap V) \rightarrow \\ H_{dR}^2(\mathbb{T}) \rightarrow H_{dR}^2(U) \oplus H_{dR}^2(V) \rightarrow H_{dR}^2(U \cap V) \rightarrow 0, \end{aligned}$$

e assim, temos

$$0 \rightarrow \mathbb{R} \xrightarrow{A} \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \xrightarrow{B} \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \xrightarrow{C} H_{dR}^1(\mathbb{T}) \xrightarrow{D} \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \xrightarrow{E} \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \xrightarrow{F} H_{dR}^2(\mathbb{T}) \rightarrow 0,$$

onde  $A(x) = (x, x)$ ,  $B(x, y) = (x - y, x - y)$ ,  $E(x, y) = (x - y, x - y)$ , depois das identificações.

O mapa  $A$  é injetivo. Assim,  $\dim \operatorname{im} A = 1$ . Por exatidão,  $\dim \ker B = 1$ . Similarmente,  $\dim \operatorname{im} B = 1$  de onde  $\dim \ker C = 1$ . Pelo teorema do núcleo e da imagem,

$$\dim \operatorname{im}(C) = \dim(\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}) - \dim \ker(C) = 2 - 1 = 1.$$

Por exatidão,  $\dim \ker D = 1$ . Por outro lado,  $\dim \ker E = 1$ . Com isso, por exatidão segue que  $\dim \operatorname{im} D = 1$ . Pelo teorema do núcleo e da imagem,

$$\dim H_{dR}^1(\mathbb{T}) = \dim \ker D + \dim \operatorname{im}(D) = 1 + 1 = 2.$$

Portanto,  $H_{dR}^1(\mathbb{T}) \cong \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$ .

Determinar a dimensão de  $H_{dR}^2(\mathbb{T})$  é simples: basta utilizar a soma alternada de dimensões em sequência exata. Com isso,

$$1 - 2 + 2 - 2 + 2 - 2 + \dim H_{dR}^2(\mathbb{T}) = 0.$$

De modo que  $\dim H_{dR}^2(\mathbb{T}) = 1$ .

Consequentemente, temos que

$$H_{dR}^k(\mathbb{T}) = \begin{cases} \mathbb{R}, & k = 0, 2, \\ \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}, & k = 1, \\ 0, & \text{para outros valores de } k. \end{cases}$$

▷

## 4 APLICAÇÕES

Agora, serão descritas duas aplicações da cohomologia de de Rham na demonstração de resultados topológicos aparentemente simples. O primeiro deles, na seção 4.1, consiste na afirmação de que a noção de dimensão de uma variedade topológica está bem definida.

### 4.1 TEOREMA DA INVARIÂNCIA DA DIMENSÃO

Primeiro, começamos com um lema sobre abertos perfurados do espaço euclidiano. Depois demonstramos o resultado principal.

**Lema 4.1.1** (Cohomologia de um aberto perfurado). *Seja  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  aberto, com  $n \geq 2$ , e  $p \in U$  um ponto arbitrário fixado. Então,  $H_{dR}^{n-1}(U \setminus \{p\}) \neq 0$ .*

*Demonstração.* Por translação e dilatação homogênea, podemos sem perda de generalidade assumir que  $p$  é a origem e que  $\mathbb{S}^{n-1} \subseteq U$ .

Consideramos  $i : \mathbb{S}^{n-1} \rightarrow U \setminus \{0\}$  a inclusão e  $\pi : U \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{S}^{n-1}$ , dada por  $x \mapsto \frac{x}{|x|}$  a projeção radial. Ambas as aplicações são suaves e  $\pi \circ i = \text{id}_{\mathbb{S}^{n-1}}$ . Note que não necessariamente é o caso de que  $i \circ \pi \cong \text{id}_{U \setminus \{0\}}$  porque  $U$  pode ter qualquer formato. (Uma condição suficiente para isso é que  $U$  seja estrelado em relação a origem.)

Como  $i^* \circ \pi^* \cong \text{id}_{H_{dR}^{n-1}(\mathbb{S}^{n-1})}$ , segue que  $\pi^* : H_{dR}^{n-1}(\mathbb{S}^{n-1}) \rightarrow H_{dR}^{n-1}(U \setminus \{0\})$  é injetiva. Como  $H_{dR}^{n-1}(\mathbb{S}^{n-1}) \cong \mathbb{R}$ , temos que  $H_{dR}^{n-1}(U \setminus \{0\}) \neq 0$  é necessariamente um grupo não trivial.  $\square$

**Teorema da Invariância da Dimensão.** *Um espaço topológico  $M$  não pode ser simultaneamente uma  $m$ -variedade topológica e uma  $n$ -variedade topológica quando  $n \neq m$ .*

*Demonstração.* Suponhamos que  $m < n$ . Como  $M$  é uma  $n$ -variedade, seja  $U_0 \subseteq M$  um aberto de  $M$  que é homeomorfo a um aberto  $U$  de  $\mathbb{R}^n$  por um mapa  $\varphi : U_0 \rightarrow U$ . Como abertos de  $m$ -variedades ainda são  $m$ -variedades,  $U_0$  é uma  $m$ -variedade. Há em  $U_0$  um aberto  $V_0$  que é homeomorfo a  $\mathbb{R}^m$  por meio do mapa  $\psi : V_0 \rightarrow \mathbb{R}^m$ .

Portanto,  $V_0$  é homeomorfo a  $\mathbb{R}^m$  por um lado, mas homeomorfo ao aberto  $W = \varphi(V_0) \subseteq U \subseteq \mathbb{R}^n$  por outro. Seja  $p \in V_0$  um ponto qualquer. Segue que  $V_0 \setminus \{p\}$  é homeomorfo a  $\mathbb{R}^m \setminus \{0\}$  e a  $W \setminus \{\varphi(p)\}$ .

Ora, pelo Lema 4.1.1 segue que  $H_{dR}^{n-1}(V_0 \setminus \{p\}) \neq 0$ , o que é um absurdo porque vimos no Exemplo 3.6.3 que os únicos grupos de cohomologia não triviais de  $V_0 \setminus \{p\} \cong \mathbb{R}^m \setminus \{0\}$  são  $H_{dR}^0(V_0 \setminus \{p\}) \cong \mathbb{R}$  e  $H_{dR}^{m-1}(V_0 \setminus \{p\}) \cong \mathbb{R}$ .  $\square$

Lembrando da Definição 2.1.4, lá postula-se que os abertos da variedade topológica  $M$  são homeomorfos a abertos de  $\mathbb{R}^n$ . Quando  $M$  é conexa, esse teorema implica que não há

abertos que são homeomorfos a abertos de  $\mathbb{R}^n$  e outros que são homeomorfos a abertos de  $\mathbb{R}^m$ , com  $n \neq m$ .

De fato, se isso ocorresse, como  $M$  é conexa, deveria existir um aberto  $U_0$  de  $M$  homeomorfo a  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  e outro aberto  $V_0$  homeomorfo a  $V \subseteq \mathbb{R}^m$  tais que  $U_0 \cap V_0 \neq \emptyset$ . (Caso contrário, poderíamos fazer uma cisão de  $M$ , agrupando, de um lado, abertos homeomorfos a abertos de  $\mathbb{R}^n$  e, do outro, abertos homeomorfos a abertos de  $\mathbb{R}^m$ ). Ora, daí teríamos um aberto de  $\mathbb{R}^n$ , que é uma  $n$ -variedade topológica trivialmente, que é homeomorfo a um aberto de  $\mathbb{R}^m$ , uma contradição com o teorema que acabamos de demonstrar.

## 4.2 O TEOREMA DE JORDAN-BROUWER

Uma curva de Jordan em  $\mathbb{R}^2$  é uma curva obtida como imagem de mergulho topológico da circunferência unitária  $\mathbb{S}^1$ .

O teorema de curva de Jordan é a afirmação, aparentemente óbvia, de que, dada uma curva de Jordan  $C$  em  $\mathbb{R}^2$ , o conjunto  $\mathbb{R}^2 \setminus C$  tem duas componentes conexas, com  $C$  constituindo a fronteira entre as duas componentes.

Demonstraremos uma generalização desse resultado, chamado de teorema de Jordan-Brouwer. Com ele substituímos  $C$  por um mergulho topológico de uma superfície  $M$  de dimensão  $n$  em  $\mathbb{R}^{n+1}$  que é orientável, conexa e fechada.

Começaremos demonstrando uma versão diferenciável desse resultado, e depois, com a ajuda de outros resultados, a sua versão topológica.

**Teorema de Jordan-Brouwer (Versão suave).** *Seja  $M \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$  uma hipersuperfície conexa orientável e suave, que é um conjunto fechado de  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Então,  $\mathbb{R}^{n+1} \setminus M = A \cup B$  é a união de abertos conexos disjuntos, dos quais  $M$  é a fronteira comum a ambos.*

*Demonstração.* Consideramos  $\varepsilon : M \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  uma função suave tal que  $V_{2\varepsilon}(M)$  é uma vizinhança tubular de  $M$ , que contém a vizinhança tubular fechada  $V_\varepsilon[M]$ . (cf. Teorema 2.1.4) Como  $M$  é orientável e de codimensão 1, existe um campo vetorial  $w : M \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  que é normal, isto é,  $w(p)$  é ortogonal a  $T_p M$  para todo  $p \in M$ , e que não se anula.

Substituindo  $w(x)$  por

$$\varepsilon(x) \frac{w(x)}{|w(x)|}$$

se necessário, podemos admitir que  $|w(x)| = \varepsilon(x)$  para todo  $x \in M$ .

A aplicação

$$\begin{aligned} h : M \times (-2, 2) &\longrightarrow V_{2\varepsilon}(M) \\ (x, t) &\longmapsto x + tw(x) \end{aligned}$$

é um difeomorfismo, cujo inversa é a projeção natural  $\pi : V_{2\varepsilon}(M) \rightarrow M$  da vizinhança tubular sobre  $M$ . Note que  $h(M \times \{0\}) = M$ .

O complementar de  $M \times \{0\}$  em  $M \times (-2, 2)$  tem duas componentes conexas:  $M \times (-2, 0)$  e  $M \times (0, 2)$ . Consequentemente,  $V_{2\varepsilon}(M) \setminus M$  tem duas componentes conexas. Elas são os conjuntos

$$P = \{x + tw(x) : x \in M, 0 < t < 2\}, \quad N = \{x + tw(x) : x \in M, -2 < t < 0\}.$$

Agora, consideramos uma função  $\lambda : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  suave tal que

$$\lambda(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 1, \\ \lambda(t) \in (0, 1), & -1 < t < 1, \\ -1, & t \leq -1, \end{cases}$$

$\lambda(t) = 0$  se, e somente se,  $t = 0$ , e  $\lambda'(t) > 0$  para todo  $t \in (0, 1)$ . Um exemplo dessa construção é a seguinte. Tomamos a função  $a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$a(t) = \begin{cases} e^{\frac{1}{t^2-1}}, & t \in (-1, 1), \\ 0, & t \notin (-1, 1), \end{cases}$$

que é suave e definimos

$$\lambda(t) = \frac{\int_{-\infty}^t a(s) ds}{\int_{-\infty}^{\infty} a(s) ds}.$$

Definimos  $g : V_{2\varepsilon}(M) \rightarrow \mathbb{R}$  pondo  $g(x + tw(x)) = \lambda(t)$ , isto é,  $g = \lambda \circ \pi_2 \circ h^{-1}$ , onde  $\pi_2$  é a projeção de  $M \times (-2, 2)$  sobre a segunda coordenada. A aplicação  $g$  é suave, positiva em  $P$ , negativa em  $N$  e nula em  $M$ .

Para todo  $(x, t) \in V_\varepsilon(M)$ , temos que  $\text{grad } g(x) = \lambda'(t) \cdot w(x) \neq 0$ . Por outro lado, como  $g$  é constante nos conjuntos

$$P_1 = \{x + tw(x) : x \in M, 1 \leq t < 2\}, \quad N_1 = \{x + tw(x) : x \in M, -2 < t \leq 1\},$$

temos que  $\text{grad } g(x) = 0$  para  $x \in V_{2\varepsilon}(M) \setminus V_\varepsilon(M)$ .

Agora, seja  $v : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  definido por

$$v(x) = \begin{cases} \text{grad } g(x), & x \in V_{2\varepsilon}(M), \\ 0, & x \notin V_{2\varepsilon}(M). \end{cases}$$

Então,  $v$  é suave e, sendo nulo ou igual ao gradiente de uma função, satisfaz as condições de integrabilidade. Como  $\mathbb{R}^{n+1}$  é simplesmente conexo, existe uma função  $f : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $v = \text{grad } f$ . Como os gradientes de  $f$  e de  $g$  coincidem em  $V_{2\varepsilon}(M)$ , somando uma constante se necessário temos  $f = g$  em  $V_{2\varepsilon}(M)$ .

Observe que  $f$  não se anula fora de  $M$ . Seja  $x \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus M$ . Se  $x \in V_{2\varepsilon}(M)$ , então  $x \in P$  ou  $x \in N$ . Em ambos os casos,  $f(x) = g(x) \neq 0$ . Por outro lado, se  $x \notin V_{2\varepsilon}(M)$ , seja  $y \in V_\varepsilon[M]$  o ponto do fechado  $V_\varepsilon[M]$  mais próximo de  $x$ :  $|x - y| = d(x, V_\varepsilon[M])$ . Assim,

todos os pontos do segmento de reta semiaberto  $[x, y)$  estão mais próximos de  $x$  do que de  $V_\varepsilon[M]$ . Nesse caso, o gradiente de  $f$  é nulo em  $[x, y]$ , de modo que  $f(x) = f(y) = \pm 1$ .

Sejam  $A = f^{-1}((-\infty, 0))$  e  $B = f^{-1}((0, \infty))$ . Temos que  $\mathbb{R}^{n+1} \setminus M = A \cup B$  é a união desses dois abertos. Temos que  $\bar{A} = f^{-1}((-\infty, 0])$ , de modo que  $\bar{A} = A \cup M$ . O mesmo vale para  $B$ . Portanto, temos que  $\partial A = \partial B = M$ .

Finalmente, para concluir o teorema precisamos mostrar que  $A$  e  $B$  são conexos. Dado  $x \in A$ , temos que  $f(x) > 0$ . Se  $x \notin P \in V_{2\varepsilon}(M)$ , o ponto  $y \in V_\varepsilon[M]$  mais próximo de  $x$  é tal que  $f(y) = 1$ , e assim  $y \in P$ . O segmento  $[x, y]$  está contido em  $A$  porque  $y$  é o ponto de  $V_\varepsilon[M]$  mais próximo de cada ponto de  $[x, y)$ . Assim, todo ponto de  $A$  pode ser ligado por um caminho a algum ponto de  $P$ , que é conexo, logo conexo por caminhos. Consequentemente,  $A$  é conexo por caminhos. O mesmo argumento vale para  $B$ .  $\square$

Assumimos o seguinte resultado da topologia:

**Teorema de Extensão de Tietze.** *Seja  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  um subconjunto fechado de  $\mathbb{R}^n$ . Todo mapa contínuo de  $A$  em  $\mathbb{R}$  pode ser estendido a um mapa contínuo de  $\mathbb{R}^n$  em  $\mathbb{R}$ . Em particular, um mapa contínuo  $\varphi : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  estende-se a um mapa contínuo  $\Phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ .*

*Demonstração.* Vide (MUNKRES, 2000).  $\square$

**Lema 4.2.1.** *Se os conjuntos fechados  $F_1, F_2 \subseteq \mathbb{R}^n$  são homeomorfos, então  $\mathbb{R}^{2n} \setminus (F_1 \times \{0\})$  e  $\mathbb{R}^{2n} \setminus (\{0\} \times F_2)$  são homeomorfos.*

*Demonstração.* Sejam  $\varphi : F_1 \rightarrow F_2$  e  $\psi : F_2 \rightarrow F_1$  homeomorfismos, um inverso do outro. Pelo teorema de extensão de Tietze, existem aplicações contínuas  $\Phi, \Psi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  que estendem  $\varphi$  e  $\psi$ , respectivamente.

Agora, definimos as aplicações contínuas  $h, k : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$  por

$$h(x, y) = (x, y - \Phi(x)), \quad k(x, y) = (x - \Psi(y), y).$$

Essas aplicações admitem inversas contínuas dadas por

$$h^{-1}(x, y) = (x, y + \Phi(x)), \quad k^{-1}(x, y) = (x + \Psi(y), y).$$

De fato, temos que

$$\begin{aligned} h \circ h^{-1}(x, y) &= h(x, y + \Phi(x)) = (x, (y + \Phi(x)) - \Phi(x)) = (x, y), \\ h^{-1} \circ h(x, y) &= h(x, y - \Phi(x)) = (x, (y - \Phi(x)) + \Phi(x)) = (x, y), \\ k \circ k^{-1}(x, y) &= k(x + \Psi(y), y) = ((x + \Psi(y)) - \Psi(y), y) = (x, y), \\ k^{-1} \circ k(x, y) &= k^{-1}(x - \Psi(y), y) = ((x - \Psi(y)) + \Psi(y), y) = (x, y). \end{aligned}$$

Portanto,  $h$  e  $k$  são homeomorfismos.

Afirmamos que o homomorfismo  $k \circ h^{-1} : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$  leva  $F_1 \times \{0\}$  em  $\{0\} \times F_2$ . De fato, se  $(x, 0)$  é elemento de  $F_1 \times \{0\}$ , então

$$\begin{aligned} k \circ h^{-1}(x, 0) &= k(x, 0 + \Phi(x)) = k(x, \varphi(x)) \\ &= (x - \Psi(\varphi(x)), \varphi(x)) \\ &= (x - \psi \circ \varphi(x), \varphi(x)) = (0, \varphi(x)) \in \{0\} \times F_2. \end{aligned}$$

Reciprocamente, se  $(0, y) \in \{0\} \times F_2$ , temos que

$$\begin{aligned} (k \circ h^{-1})^{-1}(0, y) &= h \circ k^{-1}(0, y) = h(0 + \Psi(y), y) \\ &= h(\psi(y), y) \\ &= (\psi(y), y - \Phi(\psi(y))) \\ &= (\psi(y), y - \psi(\varphi(y))) = (\psi(y), 0) \in F_1 \times \{0\}. \end{aligned}$$

Portanto,  $k \circ h^{-1}$  mapeia  $\mathbb{R}^{2n} \setminus (F_1 \times \{0\})$  em  $\mathbb{R}^{2n} \setminus (\{0\} \times F_2)$ , estabelecendo um homeomorfismo entre os dois espaços.  $\square$

**Lema 4.2.2.** *Se  $F \subseteq \mathbb{R}^n$  é fechado, então, para todo  $r > 0$ , tem-se  $H_{dR}^r(\mathbb{R}^n \setminus F) \cong H_{dR}^{r+1}(\mathbb{R}^n \setminus (F \times \{0\}))$ . Quando  $r = 0$ , existe uma transformação linear sobrejetiva  $H_{dR}^0(\mathbb{R}^n \setminus F) \rightarrow H_{dR}^0(\mathbb{R}^{n+1} \setminus (F \times \{0\}))$  cujo núcleo tem dimensão 1.*

*Demonstração.* Sejam

$$U = \{(x, t) \in \mathbb{R}^{n+1} : x \notin F \text{ ou } t > 0\}, \quad V = \{(x, t) \in \mathbb{R}^{n+1} : x \notin F \text{ ou } t < 0\}.$$

Note que  $U$  e  $V$  são contráteis. Temos que  $U \cup V = \mathbb{R}^{n+1} \setminus (F \times \{0\})$ . Além disso,  $U \cap V = (\mathbb{R}^n \setminus F) \times \mathbb{R}$  tem o mesmo tipo de homotopia que  $\mathbb{R}^n \setminus F$ .

Agora, consideramos o segmento da sequência de Mayer Vietoris

$$H_{dR}^r(U \cup V) \rightarrow H_{dR}^r(U) \oplus H_{dR}^r(V) \rightarrow H_{dR}^r(U \cap V) \xrightarrow{\partial} H_{dR}^{r+1}(U \cup V) \rightarrow H_{dR}^r(U) \oplus H_{dR}^r(V).$$

Caso  $r > 0$ , essa sequência escreve-se

$$0 \rightarrow H_{dR}^r(U \cap V) \rightarrow H_{dR}^{r+1}(U \cup V) \rightarrow 0,$$

de modo que  $H_{dR}^r(\mathbb{R}^n \setminus F) = H_{dR}^r(U \cap V) \cong H_{dR}^{r+1}(U \cup V) = H_{dR}^{r+1}(\mathbb{R}^{n+1} \setminus (F \times \{0\}))$ . Caso  $r = 0$ , a sequência escreve-se

$$(0 \rightarrow) \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \xrightarrow{A} H_{dR}^0(U \cap V) \xrightarrow{\partial} H_{dR}^1(U \cup V) \rightarrow 0,$$

de modo que a imagem de  $A$  tem dimensão 1. Assim, há uma transformação linear sobrejetiva  $H_{dR}^0(\mathbb{R}^n \setminus F) \rightarrow H_{dR}^1(\mathbb{R}^{n+1} \setminus (F \times \{0\}))$  com núcleo de dimensão 1: a  $\partial$ .  $\square$

**Teorema de Jordan-Brouwer.** *Sejam  $M, X \subset \mathbb{R}^n$  conjuntos fechados homeomorfos. Se  $M$  é uma hipersuperfície convexa, então*

1.  $\mathbb{R}^n \setminus X$  tem duas componentes conexas.
2. Para qualquer conjunto  $Y$  que é fechado e propriamente contido em  $X$ , o seu complemento  $\mathbb{R}^n \setminus Y$  é conexo.
3.  $X$  é a fronteira de ambas as componentes conexas.

*Demonstração. Item 1.* O resultado já está demonstrado para  $M$ , pela versão suave do teorema. Sabemos que  $\mathbb{R}^n \setminus M$  tem duas componentes conexas. Nesse caso,  $H_{dR}^0(\mathbb{R}^n \setminus M) \cong \mathbb{R}^2$ . Pelo lema, temos que  $H_{dR}^0(\mathbb{R}^n \setminus X) \cong H_{dR}^0(\mathbb{R}^n \setminus M) \cong \mathbb{R}^2$ . Logo,  $\mathbb{R}^n \setminus X$  tem duas componentes conexas.

**Item 2.** Seja  $Y_0$  o fechado de  $M$  correspondente a  $Y$  em  $X$ . Se  $A$  e  $B$  são as componentes conexas de  $\mathbb{R}^n \setminus M$ , então  $A \subset A \cup (M \setminus Y_0) \subseteq \bar{A}$  implica que  $A \cup (M \setminus Y_0)$  é conexo. Daí, temos que

$$\mathbb{R}^n \setminus Y_0 = [A \cup (M \setminus Y_0)] \cup [B \cup (M \setminus Y_0)]$$

é conexo. Pelo isomorfismo, segue que  $\mathbb{R}^n \setminus Y$  é conexo.

**Item 3.** Seja  $\mathbb{R}^n \setminus X = P \cup Q$  escrito como união de suas componentes conexas. Temos que  $\partial P \cup \partial Q \subset X$ . Agora, mostraremos que  $X \subset \partial P \cap \partial Q$ , de modo que  $X = \partial P = \partial Q$ . De fato, seja  $x \in X$ . Em qualquer vizinhança  $W$  de  $x$ , que sem perda de generalidade podemos supor que não contém  $X$ , deve existir pontos tanto de  $P$  quanto de  $Q$ . Esse é o caso.

O conjunto  $Y = X \setminus W$  é um fechado propriamente contido em  $X$ . Daí,  $\mathbb{R}^n \setminus Y$  é conexo, como mostra o item anterior, e portanto conexo por caminhos. Para quaisquer  $p \in P$  e  $q \in Q$ , existe um caminho  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus Y$  que liga  $p$  a  $q$ . O traço desse caminho necessariamente tem uma interseção com  $W$ . Seja  $t_0$  o menor valor de  $[0, 1]$  tal que  $\gamma(t_0) \in W \cap X$ . Então,  $\gamma([0, t_0))$  está contido em  $P$  e, à medida que  $t \rightarrow t_0$ , deve haver algum ponto  $\gamma(t_1) \in W \cap P$ . Similarmente, podemos encontrar pontos em  $W \cap Q$ . Portanto,  $x \in \partial P \cap \partial Q$ .  $\square$

## 5 CONCLUSÕES

É a discrepância entre a dimensão do espaços das formas diferenciais fechadas e a dimensão do subespaço das formas exatas que dá origem a invariantes para variedades diferenciáveis. De forma talvez surpreendente, esses invariantes são de natureza topológica, independente da estrutura suave associada à variedade topológica base.

A associação  $M \rightarrow H_{dR}^k(M), F \rightarrow F^*$  é, na linguagem da teoria das categorias, um functor contravariante. Ela permite a correlação entre um universo de objetos analíticos, as variedades diferenciáveis e os mapas suaves entre elas, e um universo de objetos algébricos, os espaços vetoriais e as transformações lineares entre eles. Vimos no Capítulo 4 como ela é frutífera na solução de problemas de topologia das variedades. Esses costumam não admitir solução igualmente simples sem o uso de ferramentas dessa natureza.

Existem outros mecanismos para associar objetos algébricos a espaços topológicos, criando outros invariantes. Esses mecanismos formam a base do campo da matemática chamado de topologia algébrica. Leitores interessados podem consultar (HATCHER, 2001), (ROTMAN, 1988) ou (WEINTRAUB, 2014).

Além das implicações para a topologia, as técnicas específicas dessa associação deram origem à álgebra homológica. Leitores interessados nos aspectos algébricos dos complexos de cocadeias, e de forma mais geral interessados nos aspectos algébricos da topologia algébrica, podem consultar (ROTMAN, 2009).

## REFERÊNCIAS

- DO CARMO, M. P. *Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies*. Rio de Janeiro: IMPA, 2005. (Textos Universitários).
- HATCHER, A. *Algebraic Topology*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2001.
- LEE, J. M. *Introduction to Smooth Manifolds*. [S.l.]: Springer, 2013. v. 218. (Graduate Texts in Mathematics, v. 218).
- LIMA, E. L. *Variedades Diferenciáveis*. Rio de Janeiro: IMPA, 2011. (Publicações Matemáticas).
- LIMA, E. L. *Cálculo Tensorial*. Rio de Janeiro: IMPA, 2012. (Publicações Matemáticas).
- LIMA, E. L. *Análise Real volume 3: Análise Vetorial*. 4. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2014. (Coleção Matemática Universitária).
- LIMA, E. L. *Curso de Análise, volume 2*. Rio de Janeiro: IMPA, 2014. (Projeto Euclides).
- MORITA, S. *Geometry of Differential Forms*. [S.l.]: American Mathematical Society, 2001. v. 201. (Translations of Mathematical Monographs, v. 201).
- MUNKRES, J. *Topology*. [S.l.]: Prentice Hall, 2000.
- ROTMAN, J. J. *An Introduction to Algebraic Topology*. [S.l.]: Springer, 1988. v. 119. (Graduate Texts in Mathematics, v. 119).
- ROTMAN, J. J. *An introduction to Homological Algebra*. [S.l.]: Springer, 2009. (Universitext).
- TU, L. W. *An Introduction to Manifolds*. [S.l.]: Springer, 2011. (Universitext).
- TU, L. W.; BOTT, R. *Differential Forms in Algebraic Topology*. [S.l.]: Springer, 1982. v. 82. (Graduate Texts in Mathematics, v. 82).
- WEINTRAUB, S. H. *Fundamentals of Algebraic Topology*. [S.l.]: Springer, 2014. v. 270. (Graduate Texts in Mathematics, v. 270).