UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO

Professor: Victor Hugo Gonzalez Martinez

Exame Final - Cálculo 3 - T7

Nome:____

Observação: A nota máxima da prova é 10.

1. (2.0) Determine o intervalo de convergência da série:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)} x^n.$$

Escreva

$$a_n = \frac{n^2}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)} x^n = \frac{n^2}{(2 \cdot 1) \cdot (2 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 3) \cdots (2 \cdot n)} x^n = \frac{n^2}{2^n n!}.$$

Temos que

$$\begin{aligned} \left| \frac{(n+1)^2 x^{n+1}}{2^{n+1}(n+1)!} \frac{2^n n!}{n^2 x^n} \right| &= \left| \frac{(n+1)^2 x}{2(n+1)n^2} \right| \\ &= \frac{1}{2} \frac{n+1}{n^2} |x| \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} \right) |x| \to 0, \end{aligned}$$

seja qual for $x \in \mathbb{R}$. Portanto o intervalo de convergência é $\mathbb{R}$.

2. (2.0) Obtenha a série de Maclaurin de

$$f(x) = \frac{1}{(1-x)^4}.$$

Sabemos que a série geométrica é dada por

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=1}^{\infty} x^n, \text{ para } |x| < 1.$$

Assim, calculando a derivada temos

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1-x}\right) = \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1}$$

Calculando a segunda derivada temos

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{(1-x)^2}\right) = \frac{2}{(1-x)^3} = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) x^{n-2}$$

Calculando a terceira derivada, segue que

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{2}{(1-x)^3}\right) = \frac{6}{(1-x)^4} = \sum_{n=3}^{\infty} n(n-1)(n-2) x^{n-3}$$

Dividindo os dois lados por 6, obtemos

$$\frac{1}{(1-x)^4} = \sum_{n=3}^{\infty} \frac{n(n-1)(n-2)}{6} x^{n-3}.$$

3. (2.0) Seja $F = Pdx + Qdy$ um campo vetorial diferenciável definido no subconjunto aberto $U = \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$, tal que
$$\frac{\partial Q}{\partial x} = 4 + \frac{\partial P}{\partial y}.$$
Sabendo que $\oint_\gamma F \cdot d\gamma = 6\pi$, onde $\gamma : x^2 + y^2 = 1$, calcule $\oint_\xi F \cdot d\gamma$, onde $\xi : \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{25} = 1$.

Dica: Faça um esboço da curvas do enunciado.

Ao fazer um esboço das curvas, você perceberá que a área da região delimitada por elas é a diferença entre a área da elipse e a área da circunferência. Com isso, temos que
$$\int_\xi F \cdot d\gamma + \int_{-\gamma} F \cdot d\gamma = \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} dA = 4(\text{Área da elipse} - \text{Área da circunferência}) = 4(2 \cdot 5 \cdot \pi - \pi) = 36\pi.$$
Portanto,
$$\int_\xi F \cdot d\gamma = 36\pi + 6\pi = 42\pi.$$

4. (2.0) Use o Teorema de Stokes para calcular
$$I = \oint_C zdx - 2xdy + 3zdz$$
onde C é a curva determinada pela interseção do cilindro $x^2 + y^2 = 1$ com o plano $x + y + z = 1$, orientada no sentido horário quando vista de cima.

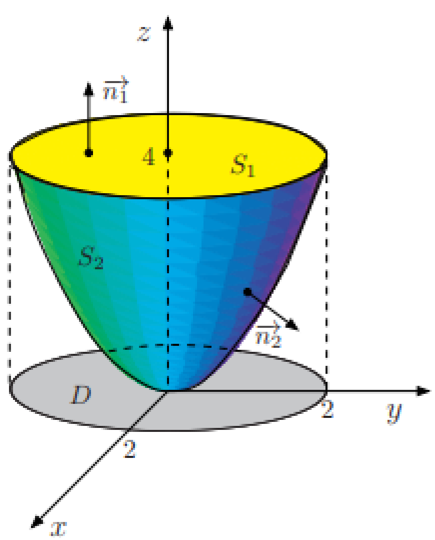
Uma parametrização para a parte do plano que está dentro do cilindro é $r(x, y) = (x, y, 1 - x - y)$ com $D : x^2 + y^2 \leq 1$. Temos que $\operatorname{rot} F = (0, 1, -2)$ e $r_x \times r_y = (1, 1, 1)$. Como a curva está orientada no sentido horário consideramos $n = \frac{1}{\sqrt{3}}(-1, -1, -1)$. Logo, pelo Teorema de Stokes
$$I = \iint_S \operatorname{rot} F \cdot ndS = \iint_D 1dA = \pi.$$

5. (3.0) Considere o campo vetorial $F(x, y, z) = (x, y, z)$ no sólido W limitado pelas superfícies $z = x^2 + y^2$ e $z = 4$. Calcule **sem utilizar** o Teorema da Divergência as seguintes integrais:

a) $\iint_S F \cdot n \, dS$, onde S é a fronteira do sólido W.

b) $\iiint_W \operatorname{div}(F) dV$.

O esboço do sólido W está representado na figura que se segue:



Vemos que $\partial W = S_1 \cup S_2$, orientada positivamente. Logo,

$$\iint_S F \cdot n dS = \iint_{S_1} F \cdot n_1 dS + \iint_{S_2} F \cdot n_2 dS$$

Cálculo de $\displaystyle\iint_{S_1} F \cdot n_1 dS$ Temos $S_1 : z = 4 = f(x,y), \text{com}(x,y) \in D : x^2 + y^2 \leq 4, n_1 = \vec{k}$ e

$$dS = \sqrt{1 + (f_x)^2 + (f_y)^2} dxdy = \sqrt{1+0+0} dxdy = dxdy$$

Então,

$$\iint_{S_1} F \cdot n_1 dS = \iint_D (x,y,4) \cdot (0,0,1) dxdy = 4A(D) = 4\pi \cdot 2^2 = 16\pi$$

Cálculo de $\displaystyle\iint_{S_2} F \cdot n_2 dS$ Temos $S_2 : z = x^2 + y^2 = g(x,y), \text{com}(x,y) \in D : x^2 + y^2 \leq 4$. Um vetor normal a S_2 é dado por $n = (-g_x, -g_y, 1) = (-2x, -2y, 1)$ que está voltado para cima. Como n_2 aponta para baixo, então $n_2 = \frac{(2x,2y,-1)}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}}$. Temos $dS = \|n\| dxdy = \sqrt{1+4x^2+4y^2} dxdy$. Então,

$$\begin{aligned} \iint_{S_2} F \cdot n_2 dS &= \iint_D \left(x, y, x^2+y^2\right) \cdot (2x, 2y, -1) dxdy = \\ &= \iint_D \left(2x^2 + 2y^2 - x^2 - y^2\right) dxdy = \iint_D \left(x^2+y^2\right) dxdy \end{aligned}$$

Passando para coordenadas polares, temos

$$\iint_{S_2} F \cdot n_2 dS = \iint_{D_{r\theta}} r^2 \cdot r dr d\theta = \int_0^2 r^3 \int_0^{2\pi} d\theta dr = 2\pi \left[\frac{r^4}{4}\right]_0^2 = 8\pi.$$

Então,

$$\iint_S F \cdot n dS = 16\pi + 8\pi = 24\pi.$$

Por outro lado:

$$\begin{aligned} \iiint_W \operatorname{div} F dV &= 3 \iiint_W dV = 3 \iint_D \int_{x^2+y^2}^4 dz dx dy = \\ &= 3 \iint_D \left(4 - x^2 - y^2\right) dxdy = 3 \iint_{D_{r\theta}} \left(4 - r^2\right) r dr d\theta = \\ &= 3 \int_0^2 \left(4r - r^3\right) \int_0^{2\pi} d\theta dr = 6\pi \left[2r^2 - \frac{r^4}{4}\right]_0^2 = 6\pi(8-4) = 24\pi. \end{aligned}$$