UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO

CCEN – DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA – ÁREA II

CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL 3
LISTA DE EXERCÍCIOS
TEOREMA DE STOKES

1. Verifique o Teorema de Stokes, calculando as duas integrais do enunciado, para $\vec{F}(x, y, z) = (y, -x, 0)$, o parabolóide $S : z = x^2 + y^2$, com $0 \leq z \leq 1$, e $\vec{n}$ apontando para fora de S.

2. Calcule a circulação do campo
$$\vec{F}(x, y, z) = y\vec{i} + xz\vec{j} + z^2\vec{k}$$
ao redor da curva C, fronteira do triângulo cortado do plano $x + y + z = 1$ pelo primeiro octante, no sentido horário quando vista da origem.

3. Use o Teorema de Stokes para mostrar que a integral de linha é igual ao valor dado, indicando a orientação da curva γ.
$$\oint_\gamma (3y + z)\, dx + (x + 4y)\, dy + (2x + y)\, dz = -\frac{3\sqrt{2}\,\pi a^2}{4},$$
onde γ é a curva obtida como interseção da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ com o plano $y + z = a$.

4. Calcule o trabalho realizado pelo campo de forças
$$\vec{F}(x, y, z) = (x^x + z^2)\vec{i} + (y^y + x^2)\vec{j} + (z^z + y^2)\vec{k}$$
quando uma partícula se move sob a influência do campo ao redor da borda da parte da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, que está no primeiro octante, na direção anti-horária quando vista de cima.

5. Calcule
$$I = \oint_\gamma (e^{-x^3/3} - yz)\, dx + (e^{-y^3/3} + xz + 2x)\, dy + (e^{-z^3/3} + 5)\, dz,$$
onde γ é a circunferência $x(t) = \cos t, y(t) = \operatorname{sen} t, z(t) = 2$, com $0 \leq t \leq 2\pi$.

6. Calcule
$$I = \oint_\gamma (z - y)\, dx + \ln(1 + y^2)\, dy + [\ln(1 + z^2) + y]\, dz,$$
onde γ é a curva $\gamma(t) = (4\cos t, 4\operatorname{sen} t, 4 - 4\cos t)$, com $0 \leq t \leq 2\pi$.

7. Calcule $\int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r}$, onde

$$\vec{F}(x,y,z) = (-2y + e^{\operatorname{sen} x})\vec{i} + (-z + y)\vec{j} + (x^3 + e^{\operatorname{sen} z})\vec{k}$$

e γ é a interseção da superfície $z = y^2$ com o plano $x + z = 1$, orientada no sentido do crescimento de y.

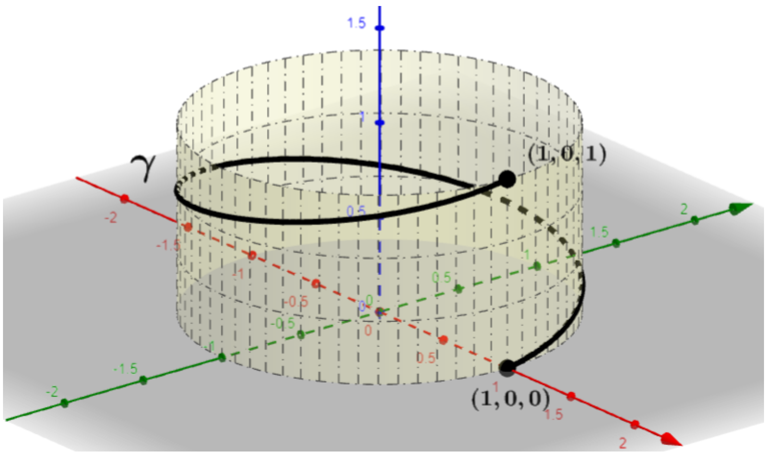
8. Calcule $\displaystyle\oint_{\partial S} \vec{F} \cdot d\vec{r}$, onde

$$\vec{F}(x,y,z) = (y - z)\vec{i} + [\ln(1 + y^2) + yz]\vec{j} + (-xz + z^{20})\vec{k}$$

e S consiste das cinco faces do cubo $[0,1] \times [0,1] \times [0,1]$ que não estão no plano xy, com o campo normal unitário $\vec{n}$ de S apontando para fora de S.

9. Seja γ a curva sobre o cilindro $x^2 + y^2 = 1$ que começa no ponto $(1,0,0)$ e termina no ponto $(1,0,1)$, como mostra a figura a seguir. Calcule $\displaystyle\int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r}$, onde

$$\vec{F}(x,y,z) = y(x-2)\vec{i} + (x^2y)\vec{j} + z\,\vec{k}.$$



10. Use o Teorema de Stokes para calcular

$$I = \oint_C z\,dx - 2x\,dy + 3z\,dz,$$

onde C é a curva determinada pela interseção do cilindro $x^2 + y^2 = 1$ com o plano $x + y + z = 1$, orientada no sentido horário quando vista de cima.

11. Seja S a parte do cone $2z^2 = x^2 + y^2$ acima do plano-xy e abaixo do plano $z = 1$, orientada com campo normal unitário apontando para baixo e seja C, a fronteira de S, com orientação induzida pela orientação de S. Dado o campo de vetores

$$\vec{F}(x,y,z) = (2yz)\,\vec{i} + (xy)\,\vec{k}.$$

Calcule a circulação de $\vec{F}$ ao longo de C usando o *Teorema de Stokes.*

12. Seja S a parte do plano $2x + 2y + z - 1 = 0$ que se encontra dentro do cilindro $x^2 + y^2 = 1$, orientada com campo normal unitário apontando para cima, e considere o campo de vetores $\overrightarrow{F}(x, y, z) = \left[y + z^2\right] \vec{i} + \left[x + z^2\right] \vec{j} + \left[x + y^2\right] \vec{k}$, Use o Teorema de Stokes para calcular $\displaystyle\oint_C \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{dr}$, onde C é a fronteira de S.

13. Seja γ a curva dada pela interseção da semi-esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ com o plano $z = y$, orientada do ponto $(2, 0, 0)$ para o ponto $(-2, 0, 0)$. Dado o campo

$$\vec{F}(x, y, z) = [x + y + z]\ \vec{i} + \left[\ln(1 + y^4) + x^2\right]\ \vec{j} + \left(e^{z^2} - x^2\right)\ \vec{k}$$

Calcule $\displaystyle\int_\gamma \vec{F} \cdot \vec{dr}$.

14. Seja C a curva dada pela interseção do paraboloide $z = 4 - x^2 - y^2$ com o plano $2x + z = 4$, orientada no sentido anti-horário quando vista de cima. Calcule

$$I = \oint_C \ln(x^2 + z^2)\, dx + \left[\arctan(y^2) - z\right]\ dy + \left[e^{x^3}\right]\ dz.$$

Respostas:
2) $\frac{1}{2}$. 4) 16. 5) 6π. 6) 32π. 7) 2. 8) -1. 9) $\frac{1}{2} + 2\pi$. 10) π. 11) 4π.
12) -2π. 13) $-2\pi\sqrt{2}$. 14) 2π.