UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO

CCEN – DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA – ÁREA II

CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL 3
LISTA DE EXERCÍCIOS
SUPERFÍCIES

1. Seja S a superfície parametrizada por

$$\vec{r}(u,v) = (v\cos u, v\,\mathrm{sen}\,u, 1-v^2), \quad 0 \leq u \leq 2\pi,\ v \geq 0.$$

   (a) Identifique esta superfície.

   (b) Obtenha equações para o plano tangente e para a reta normal de S que contêm o ponto $\vec{r}(0,1)$.

2. Encontre uma representação paramétrica para a superfície S, onde

   (a) S é a parte da esfera $x^2+y^2+z^2=4$ que está acima do plano $z=\sqrt{2}$.

   (b) S é a parte do cilindro $x^2+y^2=4$ que fica entre os planos $z=-2$ e $y+z=2$.

   (c) S é a parte do plano $x+y+z=2$ que se encontra dentro do cilindro $x^2+y^2=1$.

   (d) S é obtido pela rotação da semirreta $z=2y,\ y>0$, em torno do eixo z.

3. Seja S a parte do cilindro $x^2+y^2=4$, com $0 \leq z \leq 5$, delimitada pelos semiplanos $y=x$ e $y=2x$, com $x \geq 0$.

   (a) Parametrize S.

   (b) Calcule a área de S.

4. Seja a superfície S parte da esfera $x^2+y^2+z^2=4$, interior ao cone $z=\sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{3}}$.

   (a) Obtenha uma parametrização para S usando coordenadas cartesianas.

   (b) Obtenha uma parametrização para S usando coordenadas polares.

   (c) Obtenha uma parametrização para S usando coordenadas esféricas.

   (d) Calcule a área de S.

5. Seja a superfície S parte do cone $z^2=x^2+y^2$ que se encontra dentro do cilindro $x^2+y^2=2y$, fora do cilindro $x^2+y^2=1$ e acima do plano xy.

   (a) Obtenha uma parametrização para S usando coordenadas cartesianas.

   (b) Obtenha uma parametrização para S usando coordenadas polares.

   (c) Calcule a área de S.

6. Seja a superfície S parte do paraboloide $z=x^2+y^2$ que se encontra abaixo do plano $z=1$.

(a) Obtenha uma parametrização para S usando coordenadas cartesianas.

(b) Obtenha uma parametrização para S usando coordenadas polares.

(c) Calcule a área de S.

7. Determine a área da porção S do cilindro $x^2+y^2=1$ entre os planos $z=y$ e $z=2y$.

8. Calcule a área da superfície do cone $z=\sqrt{x^2+y^2}$ que está entre o plano xy e o plano $z-\dfrac{y}{2}=1$.

9. Calcule a área da superfície esférica $x^2+y^2+z^2=9$ que está no interior do cilindro $x^2+y^2=3x$ e acima do plano xy.

Gabarito:

1a) Paraboloide $z=1-x^2-y^2$.

1b) Plano tangente $2x+z=2$; Reta normal $(x,y,z)=(1,0,0)+t(-2,0,-1)$

2a) $\vec{r}(\varphi,\theta)=(2\operatorname{sen}\varphi\cos\theta,2\operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\theta,2\cos\varphi),0\le\varphi\le\pi/4,0\le\theta\le2\pi$

2b) $\vec{r}(t,z)=(2\cos t,2\operatorname{sen}t,z),0\le t\le2\pi,-2\le z\le2-2\operatorname{sen}t$

2c) $\vec{r}(R,\theta)=(R\cos\theta,R\operatorname{sen}\theta,2-R\cos\theta-R\operatorname{sen}\theta),0\le R\le1,0\le\theta\le2\pi$

2d) $\vec{r}(t,\theta)=(t\cos\theta,t\operatorname{sen}\theta,2t),0\le t,0\le\theta\le2\pi$

3a) $\vec{r}(t,z)=(2\cos t,2\operatorname{sen}t,z),\pi/4\le t\le\arctan2,0\le z\le5$

3b) $10\left(\arctan2-\frac{\pi}{4}\right)$

4a) $\vec{r}(x,y)=(x,y,\sqrt{4-x^2-y^2}),x^2+y^2\le3$

4b) $\vec{r}(R,\theta)=(R\cos\theta,R\operatorname{sen}\theta,\sqrt{4-R^2}),0\le R\le1,0\le\theta\le2\pi$

4c) $\vec{r}(\varphi,\theta)=(2\operatorname{sen}\varphi\cos\theta,2\operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\theta,2\cos\varphi),0\le\varphi\le\pi/3,0\le\theta\le2\pi$

4d) 4π

5a) $\vec{r}(x,y)=(x,y,\sqrt{x^2+y^2}),x^2+(y-1)^2\le1,x^2+y^2\ge1$

5b) $\vec{r}(R,\theta)=(R\cos\theta,R\operatorname{sen}\theta,R),1\le R\le2\operatorname{sen}\theta,\pi/6\le\theta\le5\pi/6$

5c) $\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{2\pi}{3}+\sqrt{3}\right)$

6a) $\vec{r}(x,y)=(x,y,x^2+y^2),x^2+y^2\ge1$

6b) $\vec{r}(R,\theta)=(R\cos\theta,R\operatorname{sen}\theta,R^2),0\le R\le1,0\le\theta\le2\pi$

6c) $\frac{\pi}{6}\left(5\sqrt{5}-1\right)$

7) 4

8) $\frac{8\pi\sqrt{6}}{9}$

9) $18(\pi-2)$