UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO

CCEN – DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA – ÁREA II

CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL 3

LISTA DE EXERCÍCIOS

Integrais de Linha Campos Vetoriais, Teorema de Green

1. Calcule $\int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{\gamma}$, onde $\vec{F}(x,y) = (2xy^3 - y^2 \cos x)\vec{i} + (1 - 2y \operatorname{sen} x + 3x^2y^2)\vec{j}$ e γ é o arco de parábola $2x = \pi y^2$ de $A = (0,0)$ a $B = \left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$.

2. Calcule $\int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{\gamma}$, onde $\vec{F}(x,y) = \left(\cos(x^2) + x^2y^3 - \frac{y}{2-x}\right)\vec{i} + (x^3y^2 + \ln(2-x))\vec{j}$ e $\gamma(t) = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos t,\ \frac{1}{2}\operatorname{sen} t\right),\ 0 \le t \le 2\pi.$

3. Verifique o Teorema de Green, calculando as duas integrais do enunciado, para $\vec{F}(x,y) = (4x - 2y, 2x + 6y)$, onde Ω é a região interior à elipse $x^2 + 4y^2 = 4$.

4. Calcule as seguintes integrais usando a definição e depois o Teorema de Green:

   (a) $\int_\gamma (3x - y)dx + (x + 5y)dy$, onde γ é a circunferência $x^2 + y^2 = 1$.

   (b) $\int_\gamma (yx - y^2)dx + (xy)dy$, onde γ é o caminho fechado formado por $y = 0, x = 1$ e $y = x$, orientado positivamente.

5. Calcule as seguintes integrais:

   (a) $\oint_\gamma \left(2x + \sqrt[3]{1 + x^5}\right)dx + \left(5x - e^{y^2}\right)dy$, onde γ é a circunferência $x^2 + y^2 = 4$.

   (b) $\oint_\gamma \left(\frac{-xy}{1+x}\right)dx + (\ln(1+x))\,dy$, onde γ é formada por $x = 0, y = 0$ e $x + 2y = 4$.

   (c) $\oint_\gamma \left(\frac{y^2}{2}\right)dx + (2xy)\,dy$, onde γ é a fronteira da região limitada por $y = x, y = -x$ e $x^2 + y^2 = 4$ com $y \ge 0$, orientada positivamente.

   (d) $\oint_\gamma (x^{-1}e^y)\,dx + (2x + e^y \ln x)\,dy$, onde γ é a fronteira da região limitada por $x = y^4 + 1$ e $x = 2$, orientada positivamente.

   (e) $\oint_\gamma (y - x + \arctan x)\,dx + \left(2x - y + \sqrt{1 + y^2}\right)dy$, onde γ é a fronteira da região limitada por $y = x + 2$ e $y = x^2$.

   (f) $\oint_\gamma \left(xy - \frac{y^3}{3}\right)dx + \left(x + \frac{x^3}{3} + y\right)dy$, onde γ é a fronteira da região Ω entre as circunferências $x^2 + y^2 = 1$ e $x^2 + y^2 = 4$, orientada positivamente.

6. Calcule as seguintes integrais:

   (a) $\int_\gamma \left(e^{x^3} + y^2\right)dx + (x + y^5)\,dy$, onde γ é formada por $y = x$ e $y = 0, 0 \le x \le 1$, que vai do ponto (1,1) ao ponto (1,0).

   (b) $\int_\gamma (1 + 2x\cos y)\,dx + (7xy - x^2 \operatorname{sen} y)\,dy$, onde γ é a curva $y = \cos x, -\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$, percorrida de $A = \left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$ a $B = \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$.

(c) $\int_\gamma (2x\ln(y+x^2)-3y)\,dx+(\ln(y+x^2)-2x)\,dy$, onde γ é a poligonal aberta que une os pontos (2,0), (2,2) e (1,0), nesta ordem.

(d) $\int_\gamma (e^x\ln y-2y)\,dx+(y^{-1}e^x)\,dy$, onde γ é o arco de parábola $y=x^2+1$, orientado de (-1,2) a (1,2).

7. Considere o campo vetorial dado por $\vec{F}(x,y)=\nabla f(x,y)-(y,-x)$, onde $f(x,y)=x^2e^{xy}\cos(y^2)$. Calcule $\int_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{\gamma}$, onde γ é a elipse $4x^2+9y^2=36$, percorrida no sentido anti-horário.

8. Seja $\vec{F}=P\,dx+Q\,dy$ um campo vetorial diferenciável definido no subconjunto aberto $U=\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$, tal que $\frac{\partial Q}{\partial x}=4+\frac{\partial P}{\partial y}$. Sabendo que $\oint_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{\gamma}=6\pi$, onde $\gamma: x^2+y^2=1$, calcule $\oint_\xi \vec{F}\cdot d\vec{\gamma}$, onde $\xi:\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{25}=1$.

9. Seja $\vec{F}=P\,dx+Q\,dy$ um campo vetorial diferenciável definido no subconjunto aberto $U=\mathbb{R}^2\setminus\{(-2,0),(2,0)\}$, tal que $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$. Suponha que $\oint_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{\gamma}=6$, onde $\gamma:(x+2)^2+y^2=1$ e $\oint_\eta \vec{F}\cdot d\vec{\eta}=9$, onde $\eta:(x-2)^2+y^2=1$. Calcule $\oint_\xi \vec{F}\cdot d\vec{\gamma}$, onde $\xi: x^2+y^2=16$.

10. Seja Ω a região interior à elipse $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ e exterior à circunferência $x^2+y^2=4$. Calcule a integral de linha

$$I=\int_\gamma \left(2xy+e^{x^2}\right)dx+\left(x^2+2x+\cos\left(y^2\right)\right)dy,$$

onde γ é a fronteira de Ω orientada positivamente.

Gabarito:

1. $\frac{\pi^2}{4}$
2. 0
3. 8π
4. (a) 2π (b) $\frac{1}{6}$
5. (a) 20π (b) 4 (c) $\frac{8\sqrt{2}}{3}$ (d) $\frac{16}{5}$ (e) $\frac{9}{2}$ (f) 48π
6. (a) -1 (b) $\frac{3\pi}{4}$ (c) $\frac{7}{2}-8\ln 2$ (d) $(e-e^{-1})\ln 2-\frac{16}{3}$
7. 12π
8. 42π
9. 15
10. 22π