UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO

CCEN – DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA – ÁREA II

CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL 3
LISTA DE EXERCÍCIOS

Integrais de Linha

1. Calcule o comprimento das curvas

   (a) $\vec{r}(t) = a(1-\cos t)\vec{i} + a(t - \operatorname{sen} t)\vec{j}$ com $0 \leq t \leq 2\pi,\ a > 0.$

   (b) $\vec{r}(t) = e^t\,\cos t\,\vec{i} + e^t\,\operatorname{sen} t\,\vec{j}$ com $0 \leq t \leq 2$

   (c) $\vec{r}(t) = a(\cos t + t\operatorname{sen} t)\,\vec{i} + a(\operatorname{sen} t - t\cos t)\,\vec{j}$ com $0 \leq t \leq 2\pi, a > 0$

   (d) $\vec{r}(t) = a(\operatorname{senh} t - t)\,\vec{i} + a(1-\cosh t)\,\vec{j}$ com $0 \leq t \leq T, a > 0$

   (e) $\vec{r}(t) = \operatorname{sen} t\,\vec{i} + t\,\vec{j} + (1-\cos t)\,\vec{k}$ com $0 \leq t \leq 2\pi$

   (f) $\vec{r}(t) = t\,\vec{i} + \ln(\sec t)\,\vec{j} + \ln(\sec t + \tan t)\,\vec{k}$ com $0 \leq t \leq \frac{\pi}{4}$

2. Dê uma parametrização para a curva $\vec{r}$ dada pela interseção das seguintes superfícies:

   (a) $z = 1 - x^2$, $z \geq 0$ e $x = y$.

   (b) $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ e $4(x^2+y^2) = R^2, R > 0.$

   (c) $x^2 + y^2 = 1$ e $y + z = 2.$

   (d) $x^2 + y^2 = 4$ e $x^2 + z^2 = 4$, situada no primeiro octante.

   (e) $x^2 + y^2 + z^2 = 8 - 2x - 2y, z \geq 0$ e $x + y = 2.$

   (f) $z = 3x^2 + y^2$ e $z + 6x = 9.$

   (g) $(x-1)^2 + y^2 = 1$ e $x^2 + y^2 + z^2 = 4, z \geq 0.$

   (h) $x^2 + y^2 + z^2 = 2y, z \geq 0,$ e $z - y + 1 = 0.$

3. Calcule $\int_{\vec{r}} f(x,y,z)\,ds$, onde

   (a) $f(x,y,z) = 3x^2yz$ e $\vec{r}(t) = \left(t, t^2, \dfrac{2}{3}t^3\right),\ 0 \leq t \leq 1.$

   (b) $f(x,y,z) = x + y + z$ e $\vec{r}(t)$ é o segmento de reta de (1,2,3) a (0,-1,1).

   (c) $f(x,y,z) = y(x+z)$ e $\vec{r}(t)$ é dada pela interseção de $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, com $y \geq 0$, e $x + z = 3.$

   (d) $f(x,y,z) = xyz$ e $\vec{r}(t)$ é dada pela interseção de $x^2+y^2+z^2 = R^2$ e $4(x^2+y^2) = R^2, R > 0$, situada no primeiro octante.

   (e) $f(x,y,z) = x$ e $\vec{r}(t)$ é dada pela interseção de $y = x^2$ com $z = x, 0 \leq x \leq 1.$

4. Um arame tem a forma da interseção de $x^2 + y^2 + z^2 = 2 - 2x - 2y$ com $z - y = 1$. Calcule a massa do arame sabendo que sua densidade é dada por $\rho(x,y,z) = x^2$.

5. Calcule a massa da curva

$$\vec{r}(t) = (e^t \cos t, e^t \operatorname{sen} t, e^t), 0 \le t \le 1,$$

sabendo que a densidade em cada ponto é inversamente proporcional ao quadrado da distância do ponto à origem.

6. Calcule $\int_{\vec{r}} x dx + x^2 dy$, de $(-1, 0)$ a $(1, 0)$ ao longo
   (a) do eixo-x.
   (b) de $\vec{r}(t) = (-\cos t, \operatorname{sen} t), 0 \le t \le \pi$.

7. Calcule $\int_C -y dx + x dy$, ao longo dos seguintes caminhos fechados, orientados positivamente:
   (a) circunferência de centro na origem e raio 2;
   (b) elipse $x^2 + 36y^2 = 36$;
   (c) triângulo de vértices (0,0), (1,0) e (0,1).

8. Calcule $\int_C 3xz\, dx + 4yz\, dy + 2xy\, dz$, do ponto $A(0, 0, 0)$ ao ponto $B(1, 1, 2)$, ao longo dos caminhos:
   (a) segmento de reta AB;
   (b) interseção das superfícies $z = x^2 + y^2$ e $y = x$.

9. Calcule $\int_C P\, dx + Q\, dy + R\, dz$, onde
   (a) $\vec{F} = (P, Q, R) = (y, z, x)$ e C é a interseção de $x + y = 2$ e $x^2 + y^2 + z^2 = 2x + 2y$, percorrida no sentido anti-horário quando vista da origem.
   (b) $\vec{F} = (P, Q, R) = (-2y, z, x)$ e C é a interseção de $4x^2 + y^2 = 1$ e $y^2 + z^2 = 1$, com $x \ge 0$ e $z \ge 0$, percorrida do ponto (0,-1,0) ao ponto (0,1,0).

Gabarito:

1. (a) $8a$
   (b) $\sqrt{2}(e^2 - 1)$
   (c) $2\pi^2 a$
   (d) $2a\left(\cosh \frac{T}{2}\sqrt{\cosh T} - 1\right) - \sqrt{2}a \ln\left(\frac{\sqrt{2}\cosh \frac{T}{2} + \sqrt{\cosh T}}{1+\sqrt{2}}\right)$
   (e) $2\sqrt{2}\pi$
   (f) $\sqrt{2}\ln(1 + \sqrt{2})$

2. (a) $\gamma(t) = (t, t, 1 - t^2), -1 \le t \le 1$
   (b) $\gamma(t) = \frac{R}{2}(\cos t, \operatorname{sen} t, \sqrt{3}/2), 0 \le t \le \pi/2$.
   (c) $\gamma(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, 2 - \operatorname{sen} t), 0 \le t \le 2\pi$
   (d) $\gamma(t) = 2(\cos t, \operatorname{sen} t, \operatorname{sen} t), 0 \le t \le \pi/2$

(e) $\gamma(t) = (1 + \cos t, 1 - \cos t, \sqrt{2}\,\mathrm{sen}\, t), 0 \leq t \leq \pi$

(f) $\gamma(t) = (-1 + 2\cos t, \sqrt{2}\,\mathrm{sen}\, t, 15 - 12\cos t), t \in \mathbb{R}$

(g) $\gamma(t) = (1 + \cos t,\ \mathrm{sen}\, t, 2\,\mathrm{sen}\,(t/2)), 0 \leq t \leq 2\pi$

(h) $\gamma(t) = (\cos t, 1 + (\sqrt{2}/2)\,\mathrm{sen}\, t, (\sqrt{2}/2)\,\mathrm{sen}\, t), 0 \leq t \leq \pi$

3. (a) $13/20$
   (b) $3\sqrt{14}$
   (c) 27
   (d) $\frac{R^4\sqrt{3}}{32}$
   (e) $\frac{\sqrt{6}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{6}$

4. $12\pi\, u.m.$

5. $\frac{\sqrt{3}}{2}k(1 - e^{-1})$

6. (a) 0 (b) 0

7. (a) 8π (b) 12π (c) 1

8. (a) 6 (b) $\frac{11}{2}$

9. (a) $-2\sqrt{2}\pi$ (b) π