UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO

CCEN – DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA – ÁREA II

CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL 3

LISTA DE EXERCÍCIOS

TEOREMA DA DIVERGÊNCIA DE GAUSS

1. Verifique o Teorema de Gauss para o campo $\vec{F}(x,y,z) = (x,y,z)$ no sólido Ω limitado pelo paraboloide $z = x^2 + y^2$ e pelo plano $z = 4$. Resp.: 24π.

2. Seja S a parte da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ que se encontra acima do plano $z = 0$ com campo normal unitário $\vec{n}$ tal que $\left\langle \vec{n}, \vec{k} \right\rangle \geq 0$. Use o Teorema da Divergência para calcular o fluxo do campo $\vec{F}(x,y,z) = (xy^2 + e^y)\ \vec{i} + (yz^2 + \operatorname{sen}^2 x)\ \vec{j} + (zx^2 + 5)\ \vec{k}$ através de S. Resp.: $\frac{164\pi}{5}$.

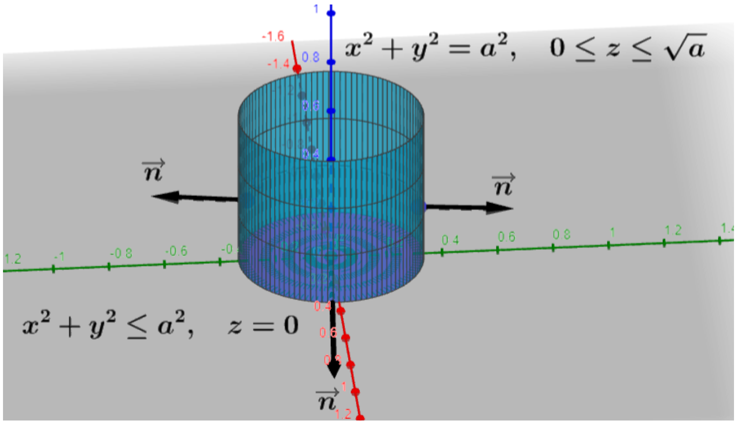
3. Seja S a superfície definida por $\begin{cases} z = 9 - x^2 - y^2,\ 0 \leq z \leq 5 \\ z = 5,\ 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4 \\ z = 8 - 3x^2 - 3y^2,\ 0 \leq x^2 + y^2 \leq 1 \end{cases}$ com campo normal unitário $\vec{n}$ apontando para fora de S. Use o Teorema de Gauss para calcular o fluxo do campo $\vec{F}(x,y,z) = x\,\vec{i} + (-2y + e^x \cos z)\ \vec{j} + (z + x^2)\ \vec{k}$ através de S.
Resp.: $\frac{81\pi}{4}$.

4. Seja Ω a região do espaço definida por $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 \geq 1 \\ x^2 + y^2 + (z-2)^2 \leq 4 \\ z \geq \sqrt{x^2 + y^2} \end{cases}$ e seja S a superfície de Ω com campo normal unitário $\vec{n}$ apontando para fora de S. Use o Teorema de Gauss para calcular o fluxo do campo
$$\vec{F}(x,y,z) = \left(\frac{x^3}{3} + y\right)\ \vec{i} + \left(\frac{y^3}{3}\right)\ \vec{j} + \left(\frac{z^3}{3} + 2\right)\ \vec{k}$$
através de S. Resp.: $\frac{\pi}{15}\left(890 + 3\sqrt{2}\right)$.

5. Seja T o tetraedro de vértices $O = (0,0,0)$, $A = (2,0,0)$, $B = (0,6,0)$ e $C = (0,0,2)$ e seja S a superfície lateral de T constituída pelas faces de T que não estão no plano xy com campo normal unitário $\vec{n}$ apontando para fora de S. Calcule o fluxo do rotacional do campo $\vec{F}(x,y,z) = (3x + z)\ \vec{i} + (x + 4z)\ \vec{j} + (2y + x)\ \vec{k}$ através de S. Resp.: -12.

6. Seja $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ tal que $\Delta f = x^2 + y^2 + z^2$. Calcule o fluxo do gradiente de f através da esfera $S : x^2 + y^2 + z^2 = 1$, onde S está orientada com campo normal unitário $\vec{n}$ apontando para fora. Resp.: $\frac{4\pi}{5}$.

7. Dado $a > 0$, seja S a superfície formada pela união do pedaço cilíndrico
$$x^2 + y^2 = a^2, \quad 0 \leq z \leq \sqrt{a},$$



com o disco $x^2+y^2 \leq a^2$, $z=0$, orientada com campo normal unitário $\overrightarrow{n}$ como indicado na figura.

Sabendo que o fluxo do campo

$$\vec{F}(x,y,z) = (x + z\cos y)\,\vec{i} + (x - y + z)\,\vec{j} + (z^4 - 3a^2)\,\vec{k}$$

através de S é igual a πa^3, determine o valor de a. Resp.: $\frac{1}{3}$.

8. Considere o campo vetorial de $\mathbb{R}^3$ definido por $\overrightarrow{F}(x,y,z) = (x,y,z)$ e seja R o sólido do espaço limitado pelo paraboloide $z = x^2+y^2$ e pelo plano $z=c$, onde c é uma constante positiva.

   (a) Use o Teorema da Divergência para calcular o fluxo de $\overrightarrow{F}$ através de R.

   (b) Calcule o valor de c sabendo que

   $$\iint_S \left\langle \overrightarrow{F}, \overrightarrow{n} \right\rangle \, dS + \iint_P \left\langle \overrightarrow{F}, \overrightarrow{n} \right\rangle \, dS = 2\pi,$$

   onde S é a superfície de R, P é a superfície parabólica $z = x^2+y^2$, $0 \leq z \leq c$, e $\overrightarrow{n}$ é o campo normal unitário apontando para fora de R.

   Resp.: (a) $\frac{3\pi}{2}\,c^2$. (b) 1.

9. Seja S a parte do paraboloide $z = 2-x^2-y^2$ que está acima do plano $z=1$ orientada com campo normal unitário apontando para cima e seja D o disco $x^2+y^2 \leq 1, z=1$, com campo normal unitário apontando para baixo. Dado o campo de vetores

   $$\vec{F}(x,y,z) = \left[z\ \arctan(y^2)\right]\,\vec{i} + \left[z^3\ \ln(x^2+1)\right]\,\vec{j} + z\,\vec{k},$$

   (a) Use uma integral de superfície para calcular o fluxo de $\vec{F}$ através de D.

   (b) Use o *Teorema de Gauss* para calcular o fluxo de $\vec{F}$ através de S.

   Resp.: (a) $-\pi$. (b) $\frac{3\pi}{2}$.

10. Considere o campo de vetores

$$\overrightarrow{F}(x,y,z) = \left[y - \ln(z^2+1)\right]\,\vec{i} + \left[y + \arctan(x^2)\right]\,\vec{j} + [z-1]\,\vec{k},$$

Use o Teorema da Divergência para calcular o fluxo de $\vec{F}$ através da calota esférica $S : z = \sqrt{1-x^2-y^2},\ z \geq 0$, onde a orientação de S é dada com campo normal unitário apontando para cima. Resp.: $\frac{\pi}{3}$.

11. Seja S a semi-esfera $x^2+y^2+z^2=1,\ z \geq 0$, orientada com campo normal unitário $\vec{n}$ satisfazendo $\left\langle \vec{n}, \vec{k} \right\rangle \geq 0$ e seja T o disco $x^2+y^2 \leq 1,\ z=0$, orientado com campo normal unitário apontando para baixo. Dado o campo

$$\vec{F}(x,y,z) = \left[xy^2 + \ln(y^2+z^2)\right]\,\vec{i} + \left[2xyz + \cos(x^2+z^2)\right]\,\vec{j} + (2z^2 - xz^2 - y^2z + 1)\,\vec{k}$$

Use o Teorema da Divergência para calcular o fluxo de $\vec{F}$ em S. Resp.: 2π.

12. Seja S a parte do cone $z = \sqrt{x^2+y^2}$ entre os planos $z=1$ e $z=2$. Use o Teorema da Divergência para calcular o fluxo do campo

$$\overrightarrow{F}(x,y,z) = \left[x + \operatorname{sen}(y^2)\right]\,\vec{i} + \left[y + \cos(z^2)\right]\,\vec{j} + z\,\vec{k}$$

através de S. Resp.: 0.

13. Seja R a região do espaço limitada lateralmente pelo cilindro $x^2+y^2=1$, inferiormente pelo plano $z=-1$ e superiormente pelo plano $y+z=2$. Dado o campo vetorial $\overrightarrow{F}(x,y,z) = (y-z)\,\overrightarrow{i} + (-x+y-2)\,\overrightarrow{j} + (x+z)\,\overrightarrow{k}$,

    (a) Use o Teorema da Divergência para calcular o fluxo de $\overrightarrow{F}$ em S, a superfície de R, onde S está orientada com campo normal $\vec{n}$ apontando para fora.

    (b) Use o item anterior para calcular o fluxo de $\overrightarrow{F}$ em S_1, a superfície lateral de R, onde S_1 está orientada com campo normal $\vec{n_1}$ apontando para fora.

Resp.: $(a)\ 6\pi$. $(b)\ 5\pi$.