UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO

Professor: Victor Hugo Gonzalez Martinez

Primeiro Exercício Escolar - Cálculo 3 - T7

Nome:____

1. (1.5) Calcule o limite da seguinte sequência:

$$a_n = \left(1 - \frac{\ln(3)}{n}\right)^n.$$

Escrevemos $y = \left(1 - \frac{\ln(3)}{x}\right)^x$. Daí, $\ln(y) = x\ln\left(1 - \frac{\ln(3)}{x}\right)$, Portanto, $y = e^{x\ln\left(1-\frac{\ln(3)}{x}\right)}$. Para o expoente temos que,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty} x\ln\left(1 - \frac{\ln(3)}{x}\right) &= \lim_{x\to\infty} \frac{\ln\left(1 - \frac{\ln(3)}{x}\right)}{1/x} \\ &= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{1-\frac{\ln(3)}{x}}(-\ln(3))\left(\frac{1}{x}\right)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} \\ &\to -\ln(3).\end{aligned}$$

Portanto, $a_n \to e^{-\ln(3)} = e^{\ln(3^{-1})} = \frac{1}{3}$.

2. (3.5) Verifique se as séries abaixo convergem absolutamente, condicionalmente ou divergem:

a) $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{4n^3+2n^2-7}{5n^3-n+1}\right)^n$

b) $\sum_{n=1}^{+\infty} n^2 e^{-n^3}$

c) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n(2024)^n}{n!}$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{1/n}}{n}$

a) Vejamos que a série converge absolutamente aplicando o teste da raiz. Temos que

$$\sqrt[n]{\left|\left(\frac{4n^3+2n^2-7}{5n^3-n+1}\right)^n\right|} = \left|\frac{4n^3+2n^2-7}{5n^3-n+1}\right| = \left|\frac{4+\frac{2}{n}-\frac{7}{n^3}}{5-\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^3}}\right|$$

Logo,

$$\lim \sqrt[n]{\left|\left(\frac{4n^3+2n^2-7}{5n^3-n+1}\right)^n\right|} = \lim\left|\frac{4+\frac{2}{n}-\frac{7}{n^3}}{5-\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^3}}\right| = \frac{4}{5} < 1$$

Pelo Teste da Raiz, concluímos que a série $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{4n^3+2n^2-7}{5n^3-n+1}\right)^n$ é absolutamente convergente, logo converge.

b) (a) Pelo Teste da Raiz

$$L = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2 e^{-n^3}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2} e^{-n^2} = 0$$

Como $L = 0 < 1$, segue que a série converge absolutamente.

c) Vejamos que a série converge absolutamente aplicando o teste da razão. Denotando por $a_n = \frac{(-1)^n(2024)^n}{n!}$, vejamos que $\sum |a_n|$ converge. Temos que

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{\frac{(2024)^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{(2024)^n}{n!}} = \frac{2024}{n+1}$$

Logo, $\lim \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim \frac{2024}{n+1} = 0 < 1$. Pelo Teste da Razão, concluímos que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n(2024)^n}{n!}$ é absolutamente convergente e, portanto, converge.

d) Comparamos $a_n = \frac{e^{1/n}}{n}$ com $b_n = \frac{1}{n}$, tem-se $a_n > b_n$. (também se pode verificar que $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1\Big)$ Como $\sum b_n = \sum \frac{1}{n}$ é divergente (é a série harmônica), pelo Teste de Comparação segue que $\sum a_n$ é divergente.

3. (2.5) Determine o raio de convergência e o intervalo de convergência da série de potências

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n\ln(n)}.$$

Pelo Teste da Razão,

$$\begin{aligned}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)\ln(n+1)}\frac{n\ln(n)}{x^n}\right| \\ &= |x|\frac{n}{n+1}\frac{\ln(n)}{\ln(n+1)} \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} |x|.\end{aligned}$$

Portanto, a série converge absolutamente se $|x| < 1$ e diverge se $|x| > 1$. Para $x = 1$, temos $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln(n)}$. Pelo Teste de Integral,

$$\begin{aligned}\int_2^{\infty} \frac{1}{x\ln(x)}dx &= \lim_{t\to\infty} \int_2^t \frac{1}{x\ln(x)}dx \\ &= \lim_{t\to\infty} \int_{\ln(2)}^{\ln(t)} \frac{1}{u}du \\ &= \lim_{t\to\infty} \ln(u)\Big|_{\ln(2)}^{\ln(t)} \\ &= \lim_{t\to\infty} \ln(\ln(t)) - \ln(\ln(2)) = \infty.\end{aligned}$$

Logo, a série diverge em $x = 1$. Quando $x = -1$ a série torna-se $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n\ln(n)}$, a qual é uma série alternada com $a_n = \frac{1}{n\ln(n)} > 0$, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ descrescente e $a_n \to 0$ quando $n \to \infty$. Pelo Teste de Leibniz, a série converge. Logo, $I = [-1, 1)$.

4. (2.5) Começando com a série geométrica $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$, encontre a soma das séries:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n(n-1)x^n$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$

a) Sabemos que $\sum_{n=0} x^n = \frac{1}{1-x}$ para $|x| < 1$. Derivando obtemos: $\sum_{n=1} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$.

b) Derivando a expressão em a) obtemos $\sum_{n=1} n(n-1)x^{n-2} = \frac{2}{(1-x)^3}$. Multiplicando por x^2 fica: $\sum_{n=1} n(n-1)x^n = x^2 \sum_{n=1} n(n-1)x^{n-2} = \frac{2x^2}{(1-x)^3}$.

c) Multiplicando por x a expressão obtida no item (a), obtemos:

$$\sum_{n=1} nx^n = \frac{x}{(1-x)^2}$$

Derivando novamente:

$$\sum_{n=1} n^2 x^{n-1} = \frac{(1-x)^2 - 2x(1-x)\cdot(-1)}{(1-x)^4} = \frac{(1-x)+2x}{(1-x)^3} = \frac{1+x}{(1-x)^3}$$

Multiplicando por x:

$$\sum_{n=1} n^2 x^n = \frac{x+x^2}{(1-x)^3}$$

Substituindo por $x = 1/2$:

$$\sum_{n=1} \frac{n^2}{2^n} = \frac{1/2+1/4}{(1/2)^3} = \frac{3/4}{1/8} = 8\cdot\frac{3}{4} = 6$$