UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO

CCEN – DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA – ÁREA II

CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL 3
LISTA DE EXERCÍCIOS
SÉRIES DE TAYLOR

1. Determine a série de Taylor $T_a f(x)$ da função $f(x)$ em torno do ponto $x = a$ e determine o raio de convergência da série. Decida se em cada caso vale a igualdade $T_a f = f$.

   (a) $f(x) = e^{2x^2}$ em torno de $a = 0$.

   (b) $f(x) = e^{3x-1}$ em torno de $a = 1$.

   (c) $f(x) = (x-5)^2 e^x$ em torno de $a = 5$.

   (d) $f(x) = \operatorname{senh} x$ em torno de $a = 0$.

   (e) $f(x) = x \cosh x$ em torno de $a = 0$.

   (f) $f(x) = \operatorname{sen} x + \cos x$ em torno de $a = \dfrac{\pi}{6}$.

   (g) $f(x) = x \operatorname{sen}(x^2)$ em torno de $a = 0$.

   (h) $f(x) = \operatorname{sen}\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$ em torno de $a = 0$.

   (i) $f(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{8}\right)$ em torno de $a = \frac{\pi}{8}$.

   (j) $f(x) = \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ em torno de $a = \frac{\pi}{4}$.

   (k) $f(x) = x^2 \cos(2x)$ em torno de $a = 0$.

   (l) $f(x) = \operatorname{sen} x \cos x$ em torno de $a = 0$.

   (m) $f(x) = x^2 \operatorname{sen} x \cos x$ em torno de $a = 0$.

2. Use séries conhecidas para determinar as séries de Taylor ou Maclaurin das funções a seguir bem como os raios de convergência.

   (a) $f(x) = \dfrac{3}{2 + x - x^2}$

   (b) $f(x) = \dfrac{x+2}{7x - 2x^2 - 3}$

   (c) $f(x) = \dfrac{1+x}{(1-x)(1+x^2)}$

   (d) $f(x) = x^3 \arctan x$

   (e) $f(x) = \displaystyle\int \frac{2}{1+x^5}\, dx$

   (f) $f(x) = \displaystyle\int \frac{x}{1+x^9}\, dx$

   (g) $f(x) = x^2 \ln(x+4)$

(h) $f(x) = x^3 \ln(x+4)$

3. Escreva a série binomial e determine o raio de convergência para as seguintes funções:

   (a) $(1-2x)^{1/3}$

   (b) $\left(1+\dfrac{x}{2}\right)^{-2}$

   (c) $(1-3x^3)^{-1/2}$

4. Usando séries, calcule as seguinte integrais definidas:

   (a) $F(x) = \displaystyle\int_0^x \operatorname{sen}(t^2)\, dt$

   (b) $F(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{\ln(1+t)}{t}\, dt, \quad |x| < 1$

   (c) $F(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{1-\cos t}{t^2}\, dt$

   (d) $F(x) = \displaystyle\int_0^x \arctan(t^2)\, dt, \quad |x| < 1$

5. Usando séries, calcule os seguinte limites indeterminados:

$$a) \quad \lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{x} \qquad b) \quad \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x - x + (x^3/6)}{x^5}$$

$$c) \quad \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x^2)}{1-\cos x} \qquad d) \quad \lim_{x\to 0} \frac{\tan x - x}{x^3}$$

Respostas:

$$1a) \quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n x^{2n}}{n!} \qquad 1b) \quad f(x) = e^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n (x-1)^n}{n!}$$

$$1c) \quad f(x) = e^5 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-5)^{n+2}}{n!} \qquad 1d) \quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$1e) \quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n)!} \qquad 1f) \quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n!} \left(x - \frac{\pi}{6}\right)^n,$$

$$c_n = \cos\left(\tfrac{n\pi}{2}\right)\left(\tfrac{\sqrt{3}+1}{2}\right) + \operatorname{sen}\left(\tfrac{n\pi}{2}\right)\left(\tfrac{\sqrt{3}-1}{2}\right) \qquad 1g) \quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{4n+3}}{(2n+1)!}$$

$$1h) \quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4} + n\frac{\pi}{2}\right) \frac{2^n x^n}{n!}$$

$$1i) \quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4} + n\frac{\pi}{2}\right) \frac{1}{n!} \left(x - \frac{\pi}{8}\right)^n \qquad 1j) \quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \left(x - \frac{\pi}{4}\right)^{2n}$$

$$1k) \quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n} x^{2n+2}}{(2n)!} \qquad 1l) \quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n} x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$1m) \quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n} x^{2n+3}}{(2n+1)!}$$

$2a) \quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[(-1)^{n+1} - \frac{1}{2^{n+1}} \right] x^n$ $\qquad 2b) \quad f(x) = -\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3^n} + 2^n \right) x^n$

$2c) \quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[1 + \operatorname{sen} \left(n\frac{\pi}{2} \right) \right] x^n$ $\qquad 2d) \quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+4}}{2n+1}$

$2e) \quad f(x) = 2\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{5n+1}}{5n+1}$ $\qquad 2f) \quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{9n+2}}{9n+2}$

$2g) \quad f(x) = x^2 \ln(4) + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+3}}{(n+1)4^{n+1}}$

$2h) \quad f(x) = x^3 \ln(4) + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+4}}{(n+1)4^{n+1}}$

$3a) \quad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \binom{1/3}{n} 2^n x^n \quad 3b) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-2}{n} \frac{x^n}{2^n} \quad 3c) \quad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \binom{-1/2}{n} 3^n x^{3n}$

$4a) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4n+3} \frac{x^{4n+3}}{(2n+1)!} \quad 4b) \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n^2} \quad 4c) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{4n+3}}{(2n+1)(4n+3))}$

$5a) \quad 2 \quad 5b) \quad \frac{1}{120} \quad 5c) \quad 2 \quad 5d) \quad \frac{1}{3}$