

4ª Lista de Exercícios de Introdução às Equações Diferenciais Parciais

Professor: Victor Hugo Gonzalez Martinez

1. Classifique as equações abaixo e calcule as curvas características:

i) $4u_{xx} + 12u_{xy} + 5u_{yy} = 6u_x - u_y$

ii) $u_{xx} - 4u_{xy} + 4u_{yy} = u + 2u_y$

iii) $2u_{xx} + 6u_{xy} + 9u_{yy} = xyu$

iv) $(1 + x^2)^2 u_{xx} - (1 + y^2)^2 u_{yy} = 0$

v) $(1 + x^2)^2 u_{xx} - 2(1 + x^2)(1 + y^2) u_{xy} + (1 + y^2)^2 u_{yy} = u^2x$

vi) $u_{xx} + (1 + x^2)^2 u_{yy} = 0$

2. Coloque as equações abaixo na sua forma canônica:

i) $u_{xx} - 4u_{xy} + 4u_{yy} = u + 2u_y$

ii) $(1 + x^2)^2 u_{xx} - (1 + y^2)^2 u_{yy} = 0$

iii) $(1 + x^2)^2 u_{xx} - 2(1 + x^2)(1 + y^2) u_{xy} + (1 + y^2)^2 u_{yy} = u^2x$

3. Considere a equação diferencial

$$a(x, y)u_{xx} + 2b(x, y)u_{xy} + c(x, y)u_{yy} = f(x, y, u, u_x, u_y)$$

e suponha que $\delta = b^2 - ac < 0$ em uma região aberta $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$. Suponha que a nunca se anula em Ω . Mostre que, se $\xi = \xi(x, y)$ e $\eta = \eta(x, y)$ satisfizerem o sistema

$$a\xi_x + b\xi_y - \sqrt{-\delta}\eta_y = 0$$

$$a\eta_x + b\eta_y + \sqrt{-\delta}\xi_y = 0$$

com $\xi_y^2 + \eta_y^2 \neq 0$ em Ω , então $(x, y) \mapsto (\xi, \eta)$ definirá uma mudança de variável em Ω . Além disso, se $v(\xi, \eta) = u(x, y)$, então v satisfará uma EDP da forma

$$v_{\xi\xi} + v_{\eta\eta} = g(\xi, \eta, v, v_\xi, v_\eta)$$

4. Use as ideias do exercício acima para colocar na forma canônica as seguintes equações

i) $2u_{xx} + 6u_{xy} + 9u_{yy} = xyu$

ii) $u_{xx} + (1 + x^2)^2 u_{yy} = 0$