Universidade Federal de Pernambuco - UFPE
Centro de Ciências Exatas e da Natureza - CCEN
Departamento de Matemática - DMAT

3^a Lista de Exercícios de Introdução às Equações Diferenciais Parciais

Professor: Victor Hugo Gonzalez Martinez

1. Discuta a existência e unicidade para os problemas abaixo e ache todas as soluções (quando existirem):

   i)
$$\begin{aligned} &5u_x + 4u_y = 0 \\ &u\left(5t, e^{4t} - 1\right) = 4t - e^{4t}, t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

   ii)
$$\begin{aligned} &u_x - au_y = 0, (a \text{ constante }) \\ &u\left(x, ae^{-x}\right) = x + e^{-x}, x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

   iii)
$$\begin{aligned} &u_x - au_y = e^{mx}\cos(by) \quad (a, b, m \text{ constantes não nulas}) \\ &u\left(2t+1, t^2 - 2at + a^2\right) = f(t) \end{aligned}$$

   iv)
$$\begin{aligned} &u_x - au_y = \cos(by) \quad (a, b \text{ constantes não nulas }) \\ &u\left(2t+1, t^2 - 2at + a^2\right) = \frac{1}{ab}\operatorname{sen}(2abt)\cos\left(b\left(t^2 + a^2\right)\right) \end{aligned}$$

   v)
$$\begin{aligned} &x^2u_x - xyu_y = x^2 + y^2 \\ &u\left(t, \frac{1}{t}\right) = t - \frac{1}{3t^3}, \quad t > 0 \end{aligned}$$

   vi)
$$\begin{aligned} &xu_x + yu_y = x + y \\ &u(t, -t) = 1, \quad t < 0. \end{aligned}$$

2. Encontre as curvas planas ao longo das quais a solução u é descontínua, sabendo que o único ponto de descontinuidade da função $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é $t = 1$.

   i)
$$\begin{aligned} &3u_x - 4u_y = x^2 \\ &u(4t, 3t) = p(t), \quad t \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

   ii)
$$\begin{aligned} &x^2u_x - xyu_y = 2x^3 + x^2y \\ &u(t, t+1) = p(t), \quad t > 0 \end{aligned}$$

iii)

$$u_x - y_y \cos x = \cos x + y$$
$$u(\pi/2, t/\pi) = p(t), \quad t \in (0,1)$$

3. Encontre as características planas para cada um dos problemas a seguir.

   i)

$$u_t - uu_x = 0,$$
$$u(x,0) = -x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

   ii)

$$u_t + uu_x = 0,$$
$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

   onde

$$u_0(x) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad |x| \geq 1 \\ -|x| + 1 & \text{se} \quad |x| < 1 \end{cases}$$

4. Encontre uma solução $u = u(x,t)$ em $C^1(\mathbb{R} \times (0,1)) \cap C(\mathbb{R} \times [0,1))$ do problema

$$u_t + uu_x = 0 \quad \text{em} \quad \mathbb{R} \times (0,1)$$
$$u(x,0) = -x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

   O que acontece quando $t \to 1^-$?

5. Encontre uma solução $u = u(x,t)$ em $C^1(\mathbb{R} \times (0,1)) \cap C(\mathbb{R} \times [0,1))$ do problema

$$u_t + uu_x = 0$$
$$u(x,0) = u_0(x)$$

   onde

$$u_0(x) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad |x| \geq 1, \\ -|x| + 1 & \text{se} \quad |x| < 1. \end{cases}$$

   O que acontece quando $(x,t) \to (1,1)$?