Universidade Federal de Pernambuco - UFPE
Centro de Ciências Exatas e da Natureza - CCEN
Departamento de Matemática - DMAT

2^a Lista de Exercícios de Introdução às Equações Diferenciais Parciais

Professor: Victor Hugo Gonzalez Martinez

1. Resolva:

   i)
$$\begin{aligned} & u_y = x^2 + y^2, \text{ se } (x,y) \in \mathbb{R}^2 \\ & u\left(x, x^2\right) = x + x^2, x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

   ii)
$$\begin{aligned} & u_y = \operatorname{sen}\left(\frac{y}{x}\right) \text{ se } x > 0, y \in \mathbb{R} \\ & u(x,0) = x, x > 0 \end{aligned}$$

2. Verifique se os problemas abaixo têm solução e, neste caso, encontre todas as soluções:

   i)
$$\begin{aligned} & u_y = x e^y \text{ se } (x,y) \in \mathbb{R}^2 \\ & u\left(y^2, y\right) = e^{y^2} + y^4, y \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

   ii)
$$\begin{aligned} & u_y = x e^y, (x,y) \in \mathbb{R}^2, \\ & u\left(y^2, y\right) = y^2 e^y, y \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

   iii)
$$\begin{aligned} & u_x = 2xy, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \\ & u\left(e^y, y\right) = y^2 + 1, y \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

   iv)
$$\begin{aligned} & u_x = 2xy, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \\ & u\left(x, x^2\right) = 1, x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

2. Mostre que o problema
$$\begin{aligned} & u_x = h(x,y), (x,y) \in \mathbb{R}^2, \\ & u(p(y), y) = f(y), y \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$
   tem uma única solução $u \in C^1\left(\mathbb{R}^2\right)$ e ache uma fórmula para u, supondo que $h \in C^1\left(\mathbb{R}^2\right)$ e $p, f \in C^1(\mathbb{R})$ são conhecidas.

3. Encontre as curvas características planas das equações a seguir.

   i) $3u_x - 4u_y = x^2$

   ii) $5u_x + 4u_y = x^3 + 1 + 2e^{3y}$

   iii) $u_x - 3u_y = \operatorname{sen} x + \cos y$

   iv) $u_x - au_y = e^{mx}\cos(by) \quad (a, b, m \text{ constantes})$

   v) $x^2 u_x + y^2 u_y = x^3$

   vi) $u_x + xu_y = x^3 + 3xy$

   vii) $x^2 u_x - xyu_y = 2x^3 + x^2 y + x^2 + \frac{x^3 y}{x+1}$

   viii) $x^2 u_x + y^2 u_y = axu$ (a constante)

   ix) $u_x + a\cos x u_y = \cos x + y \qquad$ (a constante)

4. Resolva, indicando a região do plano onde a solução é válida:

   i)
$$\begin{aligned} &3u_x - 4u_y = x^2 \\ &u\left(x, \frac{3}{4}x\right) = \frac{1}{9}x^3, x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

   ii)
$$\begin{aligned} &5u_x + 4u_y = x^3 + 1 + 2e^{3y} \\ &u(4t, -5t+1) = te^t, t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

   iii)
$$\begin{aligned} &u_x - 3u_y = \operatorname{sen} x + \cos y \\ &u(t,t) = p(t), t \in \mathbb{R} \quad (\ p \text{ uma função dada}). \end{aligned}$$

   iv)
$$\begin{aligned} &u_x - au_y = e^{mx}\cos(by) \quad (a, b, m \text{ constantes}) \\ &u(at, t) = p(t), t \in \mathbb{R} \quad (\ p \text{ uma função dada}). \end{aligned}$$

5. A resolução de problemas de Cauchy para equações quase lineares é bastante semelhante ao caso linear; a diferença é que, no caso quase linear, precisamos trabalhar com curvas em $\mathbb{R}^3$. Definimos: uma curva característica para a EDP

$$a(x,y,u)u_x + b(x,y,u)u_y = c(x,y,u) \tag{1}$$

   é uma curva suave que admite uma parametrização I um intervalo aberto, tal que

$$\begin{aligned} \alpha'(t) &= a(a(t), \beta(t), \eta(t)), \\ \beta'(t) &= \alpha(a(t), \beta(t), \eta(t)), \\ \eta'(t) &= c(a(t), \beta(t), \eta(t)). \end{aligned}$$

   Uma curva suave $\Gamma : t \in I \mapsto (\sigma(t), \nu(t), \xi(t)) \in \mathbb{R}^3$ é dita regular para a EDP (1) se os vetores $(\sigma'(t), \rho'(t))$ e

$$(a(\sigma(t), \rho(t), \xi(t)), b(\sigma(t), \rho(t), \xi(t)))$$

   nunca são paralelo qualquer que seja $t \in I$.

Como no caso linear, é possível mostrar que, se Γ for uma curva regular, existe uma única solução clássica para o problema de Cauchy para a EDP (1) com condição inicial $u(\sigma(t), \rho(t)) = \xi(t), t \in I$ em uma região aberta do plano contendo a curva plana $\gamma(t) = (\sigma(t), p(t)), t \in I$. A solução é obtida integrando-se ao longo das características (em $\mathbb{R}^3$) que intersectam a curva Γ. Isto corresponde a resolver o sistema

$$
\begin{aligned}
x_s(s,t) &= a(x(s,t), y(s,t), v(s,t)), \quad x(0,t) = \sigma(t),\\
y_s(s,t) &= b(x(s,t), y(s,t), v(s,t)), \quad y(0,t) = \rho(t),\\
v_s(s,t) &= c(x(s,t), y(s,t), v(s,t)), \quad v(0,t) = \xi(t),
\end{aligned}
$$

e definir $u(x, y) = v(s, t)$. Utilize esses ideias para resolver os problemas a seguir, indicando a região onde a solução é válida:

i)
$$
\begin{aligned}
&xu_x - yu_y = u^2\\
&u(x,1) = 1, x \in R
\end{aligned}
$$

ii)
$$
\begin{aligned}
&uu_x + xu_y = y\\
&u(0,y) = -y, y > 0
\end{aligned}
$$

iii)
$$
\begin{aligned}
-\, yu_x + xu_y &= u^2 + 1\\
u(x,0) &= -x^2, x > 0
\end{aligned}
$$

iv)
$$
\begin{aligned}
&uu_x + uu_y = -x - y\\
&u(t,-t) = 2t, t > 0
\end{aligned}
$$

6. Ache a solução geral de cada uma das EDPs abaixo:

   i) $u_y = x^2 + y^2$

   ii) $u_x = \operatorname{sen}(x/y)$

   iii) $3u_x - 4u_y = x^2$

   iv) $u_x - 3u_y = \operatorname{sen} x + \cos y$

7. Faça a mudança de variável $\xi = \ln|x|, \eta = \ln|y|$ para obter a solução geral de cada uma das EDPs abaixo:

   i) $2xu_y - yu_y = 0$

   ii) $2xu_x + 3yu_y = \ln|x|$