Universidade Federal de Pernambuco - UFPE
Centro de Ciências Exatas e da Natureza - CCEN
Departamento de Matemática - DMAT

1^a Lista de Exercícios de Introdução às Equações Diferenciais Parciais

Professor: Victor Hugo Gonzalez Martinez

1. Se $u, v \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ e α é um multi-índice prove que:

   a) $(x+y)^\alpha = \displaystyle\sum_{0\leq\beta\leq\alpha} \frac{\alpha!}{\beta!(\alpha-\beta)!} x^{\alpha-\beta} y^\beta$, para cada $x, y \in \mathbb{R}^n$.

   b) $(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)^k = \displaystyle\sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!} x^\alpha$ para $x \in \mathbb{R}^n$ e $k \in \mathbb{N}$.

   c) $n^k = \displaystyle\sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!}$ para cada $k \in \mathbb{N}$.

   d) $2^N = \displaystyle\sum_{j+k=N} \frac{N!}{k!j!}$ para cada $N \in \mathbb{N}$.

   e) $(k+j)! \leq 2^{k+j} k! j!$ para cada $k, j \in \mathbb{N}$.

   f) $\displaystyle\sum_{\beta\leq\alpha} \frac{\alpha!}{\beta!(\alpha-\beta)!} = 2^{|\alpha|}$.

   g) $\dfrac{\alpha!}{\beta!(\alpha-\beta)!} \leq 2^{|\alpha|}$ para cada $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$.

   h) $(f \cdot g)^{(k)} = \displaystyle\sum_{\nu=0}^{k} \binom{k}{\nu} f^{(\nu)} \cdot g^{(k-\nu)}$ para cada $k \in \mathbb{N}$.

   i) $D^\alpha(uv) = \displaystyle\sum_{\beta\leq\alpha} \frac{\alpha!}{\beta!(\alpha-\beta)!} D^\beta u D^{\alpha-\beta} v$.

   j) $\partial_\xi^\delta \xi^\alpha = \begin{cases} \delta!\binom{\alpha}{\delta}, & \delta \leq \alpha \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$

   k) Prove que existem exatamente $\dbinom{n+r-1}{r}$ derivadas parciais de ordem r de uma função $f \in C^\infty$ de n variáveis.

2. Dê a ordem das EDPs abaixo:

   i) $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} = 0$

   ii) $u D_1^2 D_2 u + D_1 u = u^2 + 1$

   iii) $u_x u_t = \operatorname{sen} u$

   iv) $x^3 \partial_x u - u^3 \partial_t u + \partial_x^2 u = x^5 + t^4$

   v) $\frac{\partial}{\partial x}(u^2) - \frac{\partial u}{\partial y} = xyu$

3. Verifique quais das equações abaixo são lineares indicando, nesse caso, se são homogêneas ou não:

   i) $D_1 u^2 + D_2 u = 0$

   ii) $x^3 \frac{\partial^2 \mu}{\partial x \partial y} - y^2 \frac{\partial u}{\partial y} + u = x + y$

   iii) $(u_x)^2 - x^2 + u_t = 0$

   iv) $u_{xx} - u_{tt} = \operatorname{sen} u$

   v) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u \frac{\partial u}{\partial y} = xyu$

   vi) $x^2 D_2^2 u + y^2 D_1^2 u = D_1 u + D_2 u + xyu$

4. Identifique a parte principal de cada uma das equações nos Exercícios 2 e 3 acima.

5. Indique quais, entre as equações dos Exercícios 2 e 3 acima, são semilineares.

6. Identifique as condições injciais e/ou de contorno nos problemas abaixo, indicando se o problema é um problema de Cauchy, de contorno ou misto. Indique, também, se alguma das funções dadas tem que satisfazer condições de compatibilidade.

   1. $\begin{cases} xu_x - yu_y = x^2 + y^2 & \text{em } \mathbf{R}^2 \\ u(t^3, t^5) = t^2 + 1, & t \in \mathbb{R}. \end{cases}$

   2. $\begin{cases} xu_x + yu_y = 0, & x^2 + y^2 < 4 \\ u(2 \operatorname{sen} t, 2 \cos t) = t \operatorname{sen} t, & 0 \leq t \leq 2\pi \end{cases}$

   3. $\begin{cases} tu_{xx} + 2xu_{xt} - tu_{tt} + x^2 u_x + t^2 u_t = e^x \cos t, & t > 0 \\ u(x,0) = f(x), \quad u_t(x,0) = g(x), & x \in \mathbb{R} \end{cases}$

   4. $\begin{cases} y^2 u_{xz} + x^2 u_{yy} + xyu = x + y & \text{se } x^2/4 + y^2/9 < 1 \\ u(2 \operatorname{sen} t, 3 \cos t) = t(2\pi - t), & t \in [0, 2\pi] \end{cases}$

   5. $\begin{cases} t^2 u_{zx} + xu_t - u = f(x,t), & t > 0, x \in (0,1) \\ u(0,t) = \alpha(t), u(1,t) = \beta(t), & t \geq 0 \\ u(x,0) = \gamma(x), & x \in [0,1] \end{cases}$