Universidade Federal de Pernambuco - UFPE
Centro de Ciências Exatas e da Natureza - CCEN
Departamento de Matemática - DMAT

4^a Lista de Exercícios de Teoria das Distribuições e Espaços de Sobolev

Professor: Victor Hugo Gonzalez Martinez

1. Exiba um elemento não trivial em $C^{k,\lambda}(\mathbb{R}^n)$.
2. Seja $0 < \lambda \leq 1$. Mostre que $C_b^k(\mathbb{R}^n)$ e $C^{k,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ são espaços de Banach.
3. Qual é o motivo de não se considerar $\lambda > 1$ na definição do espaço $C^{k,\lambda}(\mathbb{R}^n)$?
4. Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto e $u \in W^{m,p}(\Omega)$. Considerando $\tilde{u}$ a extensão zero fora de Ω, o operador $P : W^{m,p}(\Omega) \to W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ dado por $P(u) = \tilde{u}$ é um operador de prolongamento?
5. Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um subconjunto convexo, limitado e aberto contendo a origem e seja

$$\lambda\Omega = \{\lambda x : x \in \Omega\} \subset \Omega \quad (\text{se } \lambda < 1)$$

Seja $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ tal que $|u|_{0,p^*,\Omega} = 1$. Defina para $k \geq 1$,

$$u_k(x) = \begin{cases} k^{\frac{n-p}{p}} u(kx), & x \in k^{-1}\Omega, \\ 0, & x \in \Omega \setminus k^{-1}\Omega. \end{cases}$$

Mostre que $|u_k|_{1,p,\Omega} = |u|_{1,p,\Omega}$ e que $|u_k|_{0,p^*,\Omega} = 1$ para todo inteiro $k \geq 1$. Deduza que a imersão $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{p^*}(\Omega)$ não é compacta. Aqui, $p^* = \frac{np}{n-p}$ e $|u|_{m,p,\Omega} = \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}$.

6. No que segue Ω é um aberto limitado com fronterira Γ bem regular. Determine a existência e unicidade de solução para os problemas que seguem. (**Sugestão:** Utilize o Teorema de Lax-Milgram combinado com a Teoria de Traço.)

a)

$$\begin{cases} -\Delta u = f \text{ em } \Omega \\ u|_\Gamma = g \text{ em } \Gamma, \end{cases}$$

onde $f \in L^2(\Omega)$ e $g \in H^{1/2}(\Gamma)$.

b)

$$\begin{cases} -\Delta u + \lambda u = f \text{ em } \Omega \ (\lambda > 0) \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = g \text{ em } \Gamma, \end{cases}$$

onde $f \in L^2(\Omega)$ e $g \in H^{-1/2}(\Gamma)$.