Universidade Federal de Pernambuco - UFPE
Centro de Ciências Exatas e da Natureza - CCEN
Departamento de Matemática - DMAT

3^a Lista de Exercícios de Teoria das Distribuições e Espaços de Sobolev

Professor: Victor Hugo Gonzalez Martinez

1. Prove que
$$\nabla|x|^\alpha = \alpha|x|^{\alpha-1}\frac{x}{|x|}$$
para todo $x \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$ a para todo $\alpha \in \mathbb{R}$.

   Ao longo dos próximos cinco exercícios seja $\Omega = B_R(0)$ uma bola de raio $0 < R < 1$ em $\mathbb{R}^N$, $N \geq 2$.

2. Prove que se $N \geq 3$ e $1 - \frac{N}{2} < \alpha < 0$, então a função $u(x) := |x|^\alpha$ satisfaz $u \in H^1(\Omega)$, mas $u \notin L^\infty(\Omega)$ e $u \notin C(\Omega)$ para todo $R > 0$.

3. Prove que se $N \geq 3$, então a função $u(x) := \ln\big|\ln|x|\big|$ satisfaz $u \in H^1(\Omega)$ novamente, mas $u \notin L^\infty(\Omega)$ e $u \notin C(\Omega)$.

4. Prove que se $N \geq 3$ e $u(x) := \sin\ln\big|\ln|x|\big|$, então $u \in H^1(\Omega)$ e $u \in L^\infty(\Omega)$, mas $u \notin C(\Omega)$.

5. Prove que se $N = 2$, $0 < \beta < 1/2$ e $u(x) := \big|\ln|x|\big|^\beta$, então $u \in H^1(\Omega)$, mas $u \notin L^\infty(\Omega)$ e $u \notin C(\Omega)$.

6. Prove que se $N = 2$, $0 < \beta < 1/2$ e $u(x) := \sin\big|\ln|x|\big|^\beta$, então $u \in H^1(\Omega)$ e $u \in L^\infty(\Omega)$, mas $u \notin C(\Omega)$.

7. (Desigualdades de Morrey) Se $n < p < \infty$ e $\gamma = 1 - n/p$ então existe uma constante $c = c(n,p)$ tal que para toda $u \in C_0^\infty$ temos

   i) $|u(x) - u(y)| \leq c|x-y|^\gamma \|\nabla u\|_{L^p}$, para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$;

   ii) $\|u\|_{L^\infty} \leq c\|u\|_{W^{1,p}}$.

8. Seja $\Omega = B(0,1)$ e $u(x) = \log(1-\log|x|)$. Mostre que $\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} < \infty$ e que $u \notin L^\infty(\Omega)$. Conclua que $W_0^{1,2}(\Omega) \not\hookrightarrow L^\infty(\Omega)$.

9. Seja $\Omega = B(0,1) \subset \mathbb{R}^2$ e $u(x) = (1 + |\log(|x|))^k$. Mostre que $u \in H^1(\Omega)$ quando $0 < k < \frac{1}{2}$.

10. Encontre funções $f_0, f_1 \in L^2(\mathbb{R})$ tais que $\delta = f_0 + \dfrac{df_1}{dx}$.

11. Seja $B = B(0,1) \subset \mathbb{R}^n$.

    i) Determine todos os valores de $\alpha \neq 0$ para os quais $|x|^\alpha \in W^{1,p}(B)$ (respectivamente, $|x|^\alpha \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n \setminus B)$).

    ii) Demonstre que $\frac{x}{|x|} \in W^{1,p}(B, \mathbb{R}^n)$ se, e somente se, $p < n$.

12. Seja $n = 1$ e $1 \leq p < \infty$.

    i) Sejam $v \in C_0^1$ e $G(s) = |s|^{p-1}s$ para $s \in \mathbb{R}$. Mostre que $w = G \circ v \in C_0^1$. Utilizando a fórmula
    $$w(x) = \int_{-\infty}^{x} w'(t)dx,$$
    mostre que
    $$|v(x)| \leq p^{1/p}\|v\|_p^{1/p'}\|v'\|_p^{1/p} \leq e^{1/e}\|v\|_p^{1/p'}\|v'\|_p^{1/p} \leq e^{1/e}(\|v\|_p + \|v'\|_p).$$
    para cada $x \in \mathbb{R}$.

    ii) Deduza que $W^{1,p} \hookrightarrow L^\infty$ e que existe uma constante $c > 0$ tal que
    $$\|u\|_{L^\infty} \leq c\|u\|_{W^{1,p}}$$
    para cada $u \in W^{1,p}$.

13. Sejam $\beta > 2$ e $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 1, 0 < y < x^\beta\}$. Seja $v(x,y) = x^\alpha$. Mostre que $v \in H^1(\Omega)$ se, e somente se, $2\alpha + \beta > 1$.

14. (Teorema de Caffareli-Kohn-Nirenberg) Se $1 < p < \infty$ e $\alpha + n > 0$ então
    $$\int_{\mathbb{R}^n} |u|^p|x|^\alpha dx \leq \frac{p^p}{(\alpha+n)^p}\int_{\mathbb{R}^n} |x \cdot \nabla u|^p|x|^\alpha dx \leq \frac{p^p}{(\alpha+n)^p}\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^p|x|^{\alpha+p}dx$$
    para toda $u \in C_0^\infty$.

    Dica: Você pode mostrar primeiramente que $\operatorname{div}(|x|^\alpha x) = (\alpha+n)|x|^\alpha$.

    Deduza a partir daí a desigualdade de Hardy, isto é, se $1 < p < n$ e se $u \in W^{1,p}$ então $\frac{u}{|x|} \in L^p$ e
    $$\|u/|x|\|_p \leq \frac{p}{n-p}\|\nabla u\|_p.$$

15. Seja $u \in C^2(\overline{B(0,1)})$ tal que $u|_{\partial B(0,1)} = 0$. Demonstre que
    $$\int_{B(0,1)} u^2 dx \leq c\int_{B(0,1)} (\Delta u)^2 dx,$$
    onde $c = c(n) > 0$.