Universidade Federal de Pernambuco - UFPE
Centro de Ciências Exatas e da Natureza - CCEN
Departamento de Matemática - DMAT

2^a Lista de Exercícios de Teoria das Distribuições e Espaços de Sobolev

Professor: Victor Hugo Gonzalez Martinez

1. Complete a passagem final na demonstração do Lema de Du-Bois Reymond.

2. Seja T_k a distribuição asssociada a $f_k(x) = (\cos(x/\sqrt{k}))^k$. Mostre que (T_k) converge no sentido das distribuições a $e^{-2\pi x^2} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

3. Seja $F_N(t) = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-N}^{N} e^{ikt}$, que é uma função localmente integrável, e denote por T_n a distribuição correspondente.

   a) Mostre que $F_N(t) = \frac{1}{2\pi}\frac{\text{sen}((2N+1)t/2)}{\text{sen}(t/2)}$.

   b) Mostre que F_N converge em qualquer ponto t que é um múltiplo irracional de π.

   c) Seja $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ com suporte em $[-(2M+1)\pi, (2M+1)\pi]$. Deduza da igualdade anterior que

   $$< T_N, \varphi >= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\text{sen}((2N+1)t/2)}{\text{sen}(t/2)}\psi(t)dt$$

   onde $\psi(t) = \sum_{k=-M}^{M} \varphi(t + 2k\pi)$.

   d) Escreva $\psi(t) = \psi(0) + th(t)$, onde $h \in C^\infty(\mathbb{R})$ (isso é possível?) e mostre que T_N converge a $\sum_{p\in\mathbb{Z}} \delta_{2p\pi}$, onde δ_{x_0} é a delta de Dirac em x_0.

4. Calcule os seguintes limites em $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$

   a) $\lim_{n\to\infty} \text{sen}(nx)$

   b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\text{sen}(nx)}{x}$

   c) $\displaystyle\lim_{n\to 0} \frac{1}{n}\sum_{p=0}^{n} \delta_{\frac{p}{n}}$

   d) $\lim_{n\to\infty} e^{inx}\,\text{vp}\left(\frac{1}{x}\right)$

   e) $\lim_{n\to\infty} nf(nx), f \in L^1(\mathbb{R})$.

5. Seja $T_n = n\left(\delta_{\frac{1}{n}} - \delta_{-\frac{1}{n}}\right)$. Mostre T_n converge em $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Compare a ordem de T_n com a ordem do limite de (T_n).

6. Estude a definição de ordem finita no livro do Zuily.

7. Seja $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. Mostre que as séries a seguir são convergentes

   a) $\sum_{j=0}^{\infty} 2^j \varphi\left(2^j\right)$

   b) $\sum_{j=1}^{\infty} 2^{-j} \varphi\left(2^{-j}\right)$

8. Mostre que a aplicação $T : C_0^\infty(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, tal que $< T, \varphi >= \sum_{-\infty}^{\infty} 2^j \varphi\left(2^j\right)$, define uma distribuição de ordem zero.

9. O objetivo deste exercício é provar o Teorema de Borel:

   Dada qualquer sequência $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de números complexos, existe uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ infinitamente derivável tal que

$$f^n(0) = a_n, \forall n \in \mathbb{N}.$$

   a) Utilize uma função $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, suportada em $[-1, 1]$ e que seja igual a 1 em uma vizinhança de 0 para resolver o problema no caso em que a série inteira $\sum_0^\infty \frac{a_n}{n!} x^n$ tem um raio de convergência não nulo.

   b) Seja $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, suportada em $[-1, 1]$ e igual a 1 em $[-1/2, 1/2]$. Para cada n, considere

$$f_n(x) = \frac{a_n}{n!} x^n \varphi(x) \text{ e } M_n = \sup\left\{\left|f_n^k(x)\right|; x \in \mathbb{R}, k < n\right\}$$
$$\lambda_n = \max\left(2, 2^n M_n\right)$$

   e a função

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n^{-n} f_n\left(\lambda_n x\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} x^n \varphi\left(\lambda_n x\right).$$

   Mostre que a função f está bem definida e que a série converge uniformente em $\mathbb{R}$.

   c) Mostre que a série das k-ésimas derivadas de $\lambda_n^{-n} f_n\left(\lambda_n x\right)$ converge uniformemente em $\mathbb{R}$ para todo $k \in \mathbb{N}$ fixo.

   d) Deduza que $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ e calcule $f^k(0)$.

   e) É possível obter uma função verificando as mesmas propriedades e que seja inteira?

10. Seja $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função de Heavside

$$H(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \leq 0 \\ 0 & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

   e considere a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $f(x, y) = H(x) + H(y)$. Prove que para $\alpha = (1, 1)$ e $\beta = (1, 0)$, temos $\partial^\alpha f, \partial^{\alpha+\beta} f \in L^1_{loc}(\Omega)$ enquanto $\partial^\beta f \notin L^1_{loc}(\Omega)$.

11. Seja $f \in L^1\left(\mathbb{R}^N\right)$ e para cada $\epsilon > 0$ defina $f_\epsilon(x) = \epsilon^{-n} f(x/\epsilon)$ para todo $x \in \mathbb{R}^N$.

    a) Prove que para toda $g \in L^\infty\left(\mathbb{R}^N\right)$ que é contínua em $0 \in \mathbb{R}^N$, temos

    $$\int_{\mathbb{R}^N} f_\epsilon(x) g(x) dx \to \left(\int_{\mathbb{R}^N} f(x) dx\right) g(0), \text{ quando } \epsilon \to 0^+.$$

    b) Defina $f_k(x) = k^n f(kx)$, para todo $x \in \mathbb{R}^N$. Mostre que $f_k \in L^1\left(\mathbb{R}^N\right)$, e portanto a $\mathcal{D}'\left(\mathbb{R}^N\right)$, e

    $$f_k \longrightarrow c\delta_0 \quad \text{em} \quad \mathcal{D}'\left(\mathbb{R}^N\right)$$

    onde $c = \int_{\mathbb{R}^N} f(x) dx$.

    Sugestão: Na parte a), faça uma mudança de variáveis e use o Teorema da convergência dominada.

12. Seja $\theta \in \mathcal{D}\left(\mathbb{R}^N\right)$ não nula e

    $$\theta_k(x) = \frac{1}{k}\theta(kx), \forall x \in \mathbb{R}^N$$

    Prove que θ_k não converge em $\mathcal{D}\left(\mathbb{R}^N\right)$.

13. Verifique que a distribuição $pv\frac{1}{x}$ é solução da equação $xT = 1$ em $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ e mostre que a solução geral da equação é dada por $pv\frac{1}{x} + c\delta_0$, com $c \in \mathbb{C}$. Dada $\psi \in C^\infty(\mathbb{R})$, encontre uma solução da equação $xT = \psi$.

14. Seja $T \in \mathcal{D}'\left(\mathbb{R}^n\right)$ tal que $\langle T, \varphi \rangle = 0$ para toda $\varphi \in \mathcal{D}\left(\mathbb{R}^n\right)$ com $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) dx = 0$. Prove que existe $c \in \mathbb{C}$ tal que $T = c$.

15. Prove que $(\ln|x|)' = pv\frac{1}{x}$ em $\mathcal{D}(\mathbb{R})$. Por que $\ln|x| \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$?

16. Seja

    $$u(x, y) = \ln\left(x^2 + y^2\right), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$$

    i) Mostre que $u \in L^1_{\text{loc}}\left(\mathbb{R}^2\right)$.

    ii) Prove que $\Delta u = 4\pi\delta_0$ em $\mathcal{D}'\left(\mathbb{R}^2\right)$.

17. Seja

    $$E(x,t) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}, & \text{se } t - |x| > 0 \\ 0, & \text{se } t - |x| \leq 0. \end{cases}$$

    Defina o operador de d'Alambert por $\Box = \partial_{tt} - \partial_{xx}$. Mostre que

    $$\Box E = \delta.$$

    Isto é, E é uma solução fundamental para a Equação da Onda em $\mathbb{R}^2$.

18. Seja $\Omega = (0, \infty)$. Defina

$$\Lambda\phi = \sum_{m=1}^{\infty} (D^m \phi) \left(\frac{1}{m}\right) \text{ com } \phi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Prove que Λ é uma distribuição de ordem infinita em Ω. Prove que Λ não pode ser estendida para uma distribuição em $\mathbb{R}$, isto é, não existe $\Lambda_0 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ tal que $\Lambda_0|_\Omega = \Lambda$.

Sugestão: Veja o livro do Rudin.

19. Seja $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}_{>0})$ tal que $f \geq 0$ em quase todo ponto. Mostre que f se estende para um distribuição F em $\mathbb{R}$ se, e somente se, existe $k \geq 0$

$$\int_\varepsilon^1 f(x)dx = O(\varepsilon^{-k}),$$

para $\varepsilon \to 0^+$.

20. Procure um resultado que assegura a derivação sob o sinal de integração. Sugestão: Veja o livro do Djario e Trèves.

21. Mostre que se $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ então $\hat{f} \in C^\infty$.

22. Mostre que $W^{m,p}$ é Banach sem identificações.