Universidade Federal de Pernambuco - UFPE
Centro de Ciências Exatas e da Natureza - CCEN
Departamento de Matemática - DMAT

1^a Lista de Exercícios de Teoria das Distribuições e Espaços de Sobolev

Professor: Victor Hugo Gonzalez Martinez

1. Para cada $n \in \mathbb{N}^*$ defina
$$K_i = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq i\} \cap \{x \in \Omega : d(x, \Omega^c) \geq \frac{1}{i}\},$$
onde d é a distância euclidiana sobre $\mathbb{R}^n$. Mostre que:
    a) Cada K_i é compacto e $K_i \subset \operatorname{int}(K_{i+1})$;
    b) $\Omega = \bigcup_{i=1}^{\infty} K_i = \bigcup_{i=2}^{\infty} \operatorname{int}(K_i)$;
    c) Para todo compacto K de Ω existe $i_0 \in \mathbb{N}^*$ tal que $K \subset K_{i_0}$.

2. Se $u, v \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ e α é um multi-índice prove que:
    a) $(x+y)^\alpha = \displaystyle\sum_{0 \leq \beta \leq \alpha} \frac{\alpha!}{\beta!(\alpha-\beta)!} x^{\alpha-\beta} y^\beta$, para cada $x, y \in \mathbb{R}^n$.
    b) $(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)^k = \displaystyle\sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!} x^\alpha$ para $x \in \mathbb{R}^n$ e $k \in \mathbb{N}$.
    c) $n^k = \displaystyle\sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!}$ para cada $k \in \mathbb{N}$.
    d) $2^N = \displaystyle\sum_{j+k=N} \frac{N!}{k!j!}$ para cada $N \in \mathbb{N}$.
    e) $(k+j)! \leq 2^{k+j} k! j!$ para cada $k, j \in \mathbb{N}$.
    f) $\displaystyle\sum_{\beta \leq \alpha} \frac{\alpha!}{\beta!(\alpha-\beta)!} = 2^{|\alpha|}$.
    g) $\dfrac{\alpha!}{\beta!(\alpha-\beta)!} \leq 2^{|\alpha|}$ para cada $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$.
    h) $D^\alpha(uv) = \displaystyle\sum_{\beta \leq \alpha} \frac{\alpha!}{\beta!(\alpha-\beta)!} D^\beta u D^{\alpha-\beta} v$.
    i) Prove que existem exatamente $\dbinom{n+r-1}{r}$ derivadas parciais de ordem r de uma função $f \in C^\infty$ de n variáveis.

3. (Suporte da Convolução) Sejam $A, B \subset \mathbb{R}^d$, e donote $A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}$.

   a) Se $A \subset \mathbb{R}^d$ é compacto e $B \subset \mathbb{R}^d$ é fechado, mostre que $A + B$ é fechado. O resultado ainda é válido se supormos que A e B são apenas fechados?

   b) Sejam f e g duas funções contínuas tais que $f * g$ esteja bem definido sobre $\mathbb{R}^d$. Mostre que se $x \notin \overline{\text{supp}(f) + \text{supp}(g)}$ então $f * g(x) = 0$. Conclua que $\text{supp}(f * g) \subset \overline{\text{supp}(f) + \text{supp}(g)}$.

   c) Se f ou g possui suporte compacto, mostre que $\text{supp}(f * g) \subset \text{supp}(f) + \text{supp}(g)$.

4. (Continuidade da translação em L^p para $p < +\infty$)

   Seja $p \in [1, +\infty[$, para cada $a \in \mathbb{R}^d$ definimos o operador translação $\tau_a : L^p(\mathbb{R}^d) \to L^p(\mathbb{R}^d)$ por $\tau_a(f) : x \mapsto f(x - a)$. Mostre que para cada $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$,

   $$\|\tau_a(f) - f\|_p \xrightarrow[a \to 0]{} 0. \tag{1}$$

   O resultado ainda é válido se $p = \infty$?

5. (Derivação da Convolução)

   a Sejam $f \in C_0^1(\mathbb{R}^d)$ e $g \in L^1(\mathbb{R}^d)$, mostre que $f * g$ é de classe C^1 e que $\frac{\partial}{\partial x_i}(f * g) = \frac{\partial f}{\partial x_i} * g$ para cada $i \in \{1, \dots, d\}$.

   b) Mostre que o resultado ainda é válido se supormos apenas que $g \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d)$.

   c) Sejam $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ et $g \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d)$, mostre que $f * g \in C^\infty$ e calcule explicitamente suas derivadas parciais.

6. (Propriedades do Suporte) Sejam u e v funções numéricas, mensuráveis em Ω e $\lambda \in \mathbb{K}$ não nulo. Mostre que:

   a) $\text{supp}(u + v) \subset \text{supp}(u) \cup \text{supp}(v)$;

   b) $\text{supp}(uv) \subset \text{supp}(u) \cap \text{supp}(v)$;

   c) $\text{supp}(\lambda u) = \text{supp}(u)$;

   d) $\text{supp}(\tau_y u) = y + \text{supp}(u)$, onde $\tau_y u(x) = u(x - y)$ para $y \in \mathbb{R}^n$.

7. Mostre que

   $$\begin{aligned} \|u\|_{L^\infty(\Omega)} &= \inf\{c \in \mathbb{R}^+ : |u(x)| \leq c \text{ q.s. em } \Omega\} \\ &= \inf\{a \in \mathbb{R} : \mu\{x : |f(x)| > a\} = 0\} = \sup\{M : \mu\{x : |f(x)| > M\} > 0\}. \end{aligned}$$

8. Quais das seguintes funções são funções teste em $\mathbb{R}$:

   a) $f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x(x-1)}} & \text{se } 0 < x < 1, \\ 0 & \text{se } x \leq 0 \text{ ou } x \geq 1. \end{cases}$

   b) $g(x) = \begin{cases} \cos(x) & \text{se } |x| < \frac{\pi}{2}, \\ 0 & \text{se } |x| \geq \frac{\pi}{2}. \end{cases}$

   c) $h(x) = \begin{cases} \cos(x) e^{\frac{1}{4\pi^2 - x^2}} & \text{se } |x| < \frac{\pi}{2}, \\ 0 & \text{se } |x| \geq \frac{\pi}{2}. \end{cases}$