

Professor: Victor Hugo Gonzalez Martinez

Nome: _____

- (5) Defina rigorosamente o conjunto \mathbb{C} dos números complexos e o número "i". A partir disto, estabeleça o significado preciso da expressão $i^2 = -1$.
- (5) Seja $r > 0$ e $z \in \mathbb{C}$. Defina o conjunto $D_r(z)$ e prove que esse conjunto é aberto.
- (10) Seja $z \in \mathbb{C}$ tal que $z + \frac{1}{z} = 1$. Qual é o valor de

$$z^{2023} + \frac{1}{z^{2023}}?$$

- (20) Represente graficamente os seguintes conjuntos e explicita suas fronteiras:
 - $A = \{z \in \mathbb{C} : \Im(z - i) > |z|\}$
 - $B = \{z \in \mathbb{C} : 2 < z + \bar{z} \leq 8 \text{ e } 0 \leq \text{Arg}(z) \leq \frac{\pi}{2}\}$
- (20) Estabeleça, pela definição, os seguintes limites:
 - $\lim_{z \rightarrow i} \frac{4z+i}{z+1} = \frac{5i}{1+i}$
 - $\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{z^2-1}{z-3} = \infty$
- (20) Suponha que $f = u + iv$ é uma função analítica no disco aberto unitário $D_1(0)$ e tal que $u = v^2$. Mostre que f é constante.
- (10) Dado $z \in \mathbb{C}$, determine $w \in \mathbb{C}$ tal que $\text{sen } w = z$, ou seja $w = \text{sen}^{-1}(z)$. Mostre que $\frac{d}{dz}(\text{sen}^{-1}(z)) = \frac{1}{\sqrt{1-z^2}}$.
- (10) Verifique que a função $u(x, y) = 4xy^3 - 4x^3y + x$ é harmônica e determine sua harmônica conjugada v e encontre uma função analítica $f(z) = u + iv$ que satisfaz $f(1 + i) = 1 + 4i$.