Segunda avaliação de Introdução à Variável Complexa - 08/02/2024

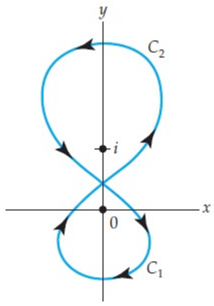
Professor: Victor Hugo Gonzalez Martinez

Nome: ____

1. Calcule $\int_C z^2 dz$ onde C é a curva parametrizada por $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$:

$$\gamma(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}(t - \operatorname{sen}(\pi t)) + i((1-t) - \cos(\pi t))$$

2. Calcule
$$\int_C \frac{z^3+3}{z(z-i)^2} dz$$
sendo $C = C_1 \cup C_2$ o contorno em forma de oito dado na figura abaixo:



3. Calcule as seguintes integrais, onde todas as curvas são fechadas e orientadas positivamente:

   a) $\displaystyle\int_{\gamma(1;3/2)} \frac{z^7+1}{z^2(z^4+1)} dz$ onde $\gamma(a;r)$ o círculo centrado em a e de raio r;

   b) $\displaystyle\int_{\gamma} \frac{z^7+1}{z^2(z^4-81)} dz$ sendo γ a elipse de equação $x^2 + 2y^2 = 4$;

   c) $\displaystyle\int_{|z|=3} \frac{\operatorname{sen}(z-1)}{z^2+1} dz$

4. Seja $\Omega \subset \mathbb{C}$ um domínio simplesmente conexo e $f : \Omega \to \mathbb{C}$ uma função analítica. Dê justificativas rápidas para as seguintes afirmações:

   a) f possui derivadas de todas as ordens;

   b) A função derivada f' também é analítica;

   c) Se F é uma primitiva de f e $\gamma : [a,b] \to \Omega$ é um caminho então
$$\int_\gamma f(z)dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$$

5. Mostre que
$$\left| \int_C \frac{1}{z^2+4} dz \right| \leq \frac{2}{3\sqrt{13}},$$
sendo C o segmento de reta que liga 3 a $3+2i$.

6. Prove que se f é uma função inteira e $|f(z) + e^z| > |e^z f(z)|$ para cada $z \in \mathbb{C}$ então f é constante.