Universidade Federal de Pernambuco - UFPE
Centro de Ciências Exatas e da Natureza - CCEN
Departamento de Matemática - DMAT

Introdução à Variável Complexa - 5^a Lista de Exercícios

Data de Entrega: 14/03/2024

Professor: Victor Hugo Gonzalez Martinez

1. Usando o teste de Weierstrass, mostre que as séries dadas nos itens a) a h) convergem uniformemente nos domínios indicados em cada caso.

   (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cos 3n}{1+5n} z^n$, em qualquer disco $|z| \leq r < 1$.

   (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 - 3\cos n}{10n^2+7} z^{2n-1}$, em qualquer disco $|z| \leq r < 1$.

   (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+7\sqrt{n+1}}{(n+1)2^n} z^{2n-1}$, em qualquer disco $|z| \leq r < \sqrt{2}$.

   (d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{n+1} (z-1)^n$, em qualquer disco $|z-1| \leq r < 1$.

   (e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^k}{R^n} z^n$, em qualquer disco $|z| \leq r < R$.

   (f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n!} z^n$, em qualquer disco $|z| < R$, qualquer que seja a constante a.

   (g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^{2n}} z^n$, em qualquer disco $|z| < R$.

   (h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cos n}{n^3+1} e^{z/n}$, em qualquer disco $|z| < R$.

2. Prove que a série $\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}$ define uma função analítica para $\Re e z > 0$, conhecida como função zeta de Riemann.

3. Determine o raio de convergência das séries:

   (a) $\sum_{n=0}^{\infty} n z^n$

   (b) $\sum_{n=0}^{\infty} (\sqrt{2})^{3n} z^n$

   (c) $\sum_{n=0}^{\infty} (\sqrt{n})^n z^n$

   (d) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ onde $a_{2n} = 2^n$ e $a_{2n+1} = 5^{2n+1}$

4. Determine a série de Laurent das funções abaixo na região indicada:

   (a) $f(z) = \frac{\sinh z}{z^2}$ em $0 < |z| < \infty$

   (b) $f(z) = \frac{5z+2i}{z(z-i)}$ em $1 < |z+i| < 3$

   (c) $f(z) = \frac{\cosh z - 1}{z}$ em $0 < |z| < \infty$

   (d) $f(z) = \frac{1}{(z-2)(z-1)}$ em $1 < |z-2| < 4$

   (e) $f(z) = \frac{1}{(z+2)(z-1)}$ em $4 < |z-2| < \infty$

5. Determine e classifique as singularidades das funções abaixo:

   (a) $f(z) = \frac{1}{z \operatorname{sen} z}$

   (b) $f(z) = \frac{z^2+1}{z}$

   (c) $f(z) = \cos(1/z)$

   (d) $f(z) = \frac{1}{z^4+z^3}$

   (e) $f(z) = \frac{e^z}{z(1-e^{-z})}$

   (f) $f(z) = z^3 e^{\frac{1}{z}}$

   (g) $f(z) = \frac{1-e^z}{z^4 \operatorname{sen}(z+1)}$

   (h) $f(z) = \frac{z^6+1}{(z-1)^3(3z+2)} \operatorname{sen}\left(\frac{z^2}{z-3}\right)$

6. Determine e classifique o resíduo de cada singularidade:

   (a) $f(z) = \frac{\cos(\sqrt{z})}{z}$

   (b) $f(z) = \frac{1}{z^4+4z^3}$

   (c) $f(z) = \frac{1-e^{2z}}{z^3}$

   (d) $f(z) = \frac{z}{\cos(1/z)}$

   (e) $f(z) = \frac{e^{z-1}}{(z-1)^2} + z^2 e^{-\frac{1}{z}}$

   (f) $f(z) = \frac{1}{z}\cosh(\frac{1}{z})$

7. Calcule as integrais utilizando o Teorema dos Resíduos:

   (a) $\int_{|z|=1} \frac{\sinh z}{z^2} dz$

   (b) $\int_{|z|=2} \frac{1}{\sinh 2z} dz$

   (c) $\int_{|z|=2} \frac{\operatorname{tg} z}{z} dz$

   (d) $\int_{|z|=2} \operatorname{tg} z dz$

   (e) $\int_{|z|=5} \frac{e^z}{\cosh z} dz$

8. Calcule as integrais:

   (a) $\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{1+x^2} dx$

   (b) $\int_0^\infty \frac{1}{1+x^3} dx$

   (c) $\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{x^4+1}$

9. Sendo a, b, c números reais, com $b^2 < 4ac$, calcule $\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{ax^2+bx+c}$.

10. Mostre que

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)} = \frac{\pi}{2ab(a+b)},$$

onde $a \geq b > 0$. Considere as duas possibilidades: $a \neq b$ e $a = b$.

11. Calcule cada uma das integrais indicadas abaixo:

(a) $\int_0^\infty \frac{x^2 dx}{x^4+9}$.

(b) $\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{x^2-x+1}$.

(c) $\int_0^\infty \frac{dx}{x^6+1}$.

(d) $\int_{-\infty}^\infty \frac{x dx}{(x^2+4x+13)^2}$.

(e) $\int_0^\infty \frac{x^2 dx}{(x^2+a^2)^2}, \quad a > 0$

(f) $\int_0^\infty \frac{x^2+1}{x^4+1} dx$