Universidade Federal de Pernambuco - UFPE
Centro de Ciências Exatas e da Natureza - CCEN
Departamento de Matemática - DMAT

Introdução à Variável Complexa - 4^a Lista de Exercícios

Data de Entrega: 08/02/2024

Professor: Victor Hugo Gonzalez Martinez

1. Calcule $\displaystyle\int_\gamma f(z)dz$ e $\displaystyle\int_{\mathcal{C}} f(z)dz$, se:
   a) $f(z) = z^2, \gamma(t) = e^{it}(t \in [-\pi/2, \pi/2])$;
   b) $f(z) = \Re e z, \gamma(t) = t + it^2, (t \in [0, 1])$.
   c) $f(z) = 1/z, \gamma(t) = e^{-it}, (t \in [0, 4\pi])$.
   d) $f(z) = e^z$, e γ a poligonal com os vértices, $0, 1, 1 + i$ e i nesta ordem.
   e) $f(z) = |z|^4$, e γ o segmento $[-1 + i, 1 + i]$.
   f) $f(z) = \dfrac{e^{2z} - z^2}{(z-2)^3},\ \mathcal{C} : |z - 1| = 3$;
   g) $f(z) = \dfrac{\cos z}{(z + i)^6},\ \mathcal{C} : |z + 1| = 6$;
   h) $f(z) = \dfrac{z + 1 - e^z}{z(z + 3)},\ \mathcal{C} : |z - i| = 2$;
   i) $f(z) = \dfrac{1}{(z + 1)^3} - \dfrac{z^5}{(z - i\pi)^4},\ \mathcal{C} : |z| = 5$;
   j) $f(z) = \dfrac{\ln(z^2 + 2)}{(3z - 2)^2},\ \mathcal{C} : |z| = 1$;
   k) $f(z) = \dfrac{ze^z}{(z - i)^2},\ \mathcal{C} : |z| = 2$;
   l) $f(z) = \dfrac{z^2 - 3z + 4}{z^2 - 4z + 3},\ \mathcal{C} : |z - i| = 3$;
2. Seja γ o círculo unitário. Mostre que $\left|\displaystyle\int_\gamma \frac{\operatorname{sen} z}{z^2}dz\right| \leq 2\pi e$.
3. Calcule as seguintes integrais: $\displaystyle\int_{|z|=1} \frac{dz}{z}$; $\displaystyle\int_{|z|=1} \frac{dz}{|z|}$; $\displaystyle\int_{|z|=1} \frac{|dz|}{z}$; $\displaystyle\int_{|z|=1} \left|\frac{dz}{z}\right|$.
4. Para quais curvas simples fechadas γ tem-se que $\displaystyle\int_\gamma \frac{dz}{z^2 + z + 1} = 0$?
5. Calcule $\displaystyle\int_{|z|=\frac{1}{2}} \sqrt{z^2 - 1}dz$.

6. Calcule $\displaystyle\int_{|z|=1} |z-1||dz|$.

7. Suponha que Γ é uma curva fechada, simples, regular, positivamente orientada, e que A é a área da região que a mesma limita. Prove que

$$\int_{\Gamma} x dz = -i \int_{\Gamma} y dz = \frac{1}{2} \int_{\Gamma} \bar{z} dz = iA$$

8. Sendo Γ a fronteira da metade superior do anel $\{z : 1 < |z| < 2\}$, calcule

$$\int_{\Gamma} z \bar{z}^{-1} dz.$$

9. Calcule a integral $\displaystyle\int_{|z|=r} (z-a)^{-m}(z-b)^{-n} dz$, com m e n inteiros positivos e$|a| < r < |b|$.

10. Verifique que $\displaystyle\int_{|z|=2} \left(1+z^2\right)^{-1} dz = 0$.

11. Se $f(z) = z(1-z)^{-2}$ e $0 < r < 1$, mostre que $\displaystyle\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| f\left(re^{i\theta}\right) \right| d\theta = \frac{r}{1-r^2}$.

12. Se f uma função analítica no disco perfurado, $0 < |z| < R$, mostre que o valor de $\displaystyle\int_0^{2\pi} f\left(re^{i\theta}\right) d\theta$, $0 < r < R$, não depende de r.

13. Suponha que f uma função inteira que satisfaz $|f(z)| \leq c|z|^M$, para algum número real $M > 0$ e todo $z \in \mathbb{C}$. Prove que f um polinômio.

14. Encontre todas as funções inteiras $f(z)$ satisfazendo $|f(z)| \leq A + B|z|^{3/2}$, onde A e B são constantes.

15. Suponha que f inteira e que $|f(z)| \leq \log(1+|z|)$, para cada $z \in \mathbb{C}$. Mostre que f identicamente zero.

16. Sejam a e b números reais positivos distintos, e $\alpha, \beta : [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}$, definidas respectivamente por

$$\alpha(t) = a\cos(2\pi t) + ia \operatorname{sen}(2\pi t), \text{ e } \beta(t) = a\cos(2\pi t) + ib \operatorname{sen}(2\pi t)$$

   a) Mostre que $\displaystyle\int_{\alpha} \frac{1}{z} dz = \int_{\beta} \frac{1}{z} dz$;

   b) Use o item a) para mostrar que $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{dt}{a^2\cos^2 t + b^2 \operatorname{sen}^2 t} = \frac{2\pi}{ab}$.

17. Calcule $\displaystyle\oint \frac{e^{kz}}{z} dz$, $\mathcal{C} : |z| = 1$. Utilize a primeira parte do exerício para calcular o valor da integral

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} e^{k\cos\theta} \cos(k \sin\theta)\, d\theta.$$

18. Calcule a integral $\displaystyle\oint_{\mathcal{C}} \frac{e^z}{z^2+4}\, dz$ para

    a) $\mathcal{C} : |z| = 4$.
    b) $\mathcal{C} : |z - 2i| = 2$.

19. Calcule $\displaystyle\oint_{\mathcal{C}} \frac{\operatorname{sen} z}{e^z z^2}\, dz$, sendo $\mathcal{C} : |z-1| = 5$.

20. Denote por $\gamma(a;r)$ o círculo centrado em a e de raio r, percorrido no sentido positivo. Use a fórmula integral de Cauchy (para f e suas derivadas) para calcular as seguintes integrais:

    a) $\displaystyle\int_{\gamma(2;1)} \frac{z^7+1}{z^2\left(z^4+1\right)} dz;$
    b) $\displaystyle\int_{\gamma(1;3/2)} \frac{z^7+1}{z^2\left(z^4+1\right)} dz;$
    c) $\displaystyle\int_{\gamma(0;3)} \frac{e^{-z}}{(z+2)^3} dz;$
    d) $\displaystyle\int_{\gamma(0;3)} \frac{\cos(\pi z)}{z^2-1} dz$
    e) $\displaystyle\int_{\gamma(0;r)} \frac{\operatorname{sen} z}{z-b} dz, (b \in \mathbb{C}, |b| \neq r);$
    f) $\displaystyle\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma(i;1)} \frac{e^z}{z^2+1} dz$
    g) $\displaystyle\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma(-i;1)} \frac{e^z}{z^2+1} dz$
    h) $\displaystyle\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma(0;3)} \frac{e^z}{z^2+1} dz$
    i) $\displaystyle\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma(1+2i;5)} \frac{4z}{z^2+9} dz$

21. Mostre que $\left|\int_C \frac{1}{z^2+1} dz\right| \leq \frac{1}{2\sqrt{5}}$, sendo C o segmento de reta que liga 2 a $2+i$.

22. Explique o que não está correto no cálculo da integral

$$\int_0^{2\pi} \frac{3ie^{it}}{2+3e^{it}} dt = \ln(2+3e^{2\pi i}) - \ln(2+3e^{0i}) = 0.$$

    Forneça o cálculo correto para essa integral.

23. Prove que se f é uma função inteira e $|f(z)| < |f(z)|^2$ para cada $z \in \mathbb{C}$ então f é constante.

24. Prove que se f é uma função inteira e $|f(z) + e^z| > |e^z f(z)|$ para cada $z \in \mathbb{C}$ então f é constante.

25. Prove a fórmula integral de Cauchy para derivadas.