Terceira avaliação de Análise Funcional - 06/12/2023

Professor: Victor Hugo Gonzalez Martinez

Nome: ____

1. (2,0)
   i) Seja $H = \ell^2$ (real). Denote por $C = \{x = (x_n) : x_n \geq 0 \text{ para cada } n \in \mathbb{N}\}$.
      a) Prove que C é convexo e fechado.
      b) Calcule a projeção de H sobre C.
   ii) Seja $f(x) = \operatorname{sen}(x)$ e $H = L^2[-\pi, \pi]$. Calcule a projeção de f sobre o subespaço de H gerado por $\{1, x, x^2, x^3\}$.
2. (1,0) Seja H um espaço de Hilbert e $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência tal que $x_n \rightharpoonup x$ na topologia $\sigma(H, H')$ e $\|x_n\|_H \to \|x\|_H$. Sem utilizar Milman-Pettis, prove diretamente que $x_n \to x$ em H.
3. (2,0)
   i) Se H é um espaço com produto interno então $\|u\| = \sup_{\|v\|=1} |(u, v)|$.
   ii) (**Hellinger–Toeplitz**) Seja H um espaço de Hilbert e $T : H \to H$ um operador tal que $(Tu, v)_H = (u, Tv)_H$ para cada $u, v \in H$. Prove que T é limitado.
   iii) Seja H um espaço de Hilbert real não nulo e T um operador auto-adjunto. Prove que
   $$\|T\| = \sup_{\substack{u\in H \\ \|u\|_H=1}} |(Tu, u)|.$$
4. (2,0) Sejam E e F espaços de Banach e $T \in K(E, F)$. Assuma que $R(T)$ é fechado. Prove que:
   i) T é um operador de rank finito.
   ii) Se $\dim N(T) < \infty$ então $\dim E < \infty$.
5. (1,0) **Enuncie** os Teoremas de Lions-Stampacchia e Lax-Milgram e **demonstre** apenas Lax-Milgram.
6. (2,0) Seja $T \in L(H)$ um operador auto-adjunto. Sejam
   $$m = \inf_{\substack{u\in H \\ \|u\|_H=1}} (Tu, u)_H \text{ e } M = \sup_{\substack{u\in H \\ \|u\|_H=1}} (Tu, u)_H.$$
   Mostre que se $\lambda < m$ então $\lambda \in \rho(T)$ e que $m \in \sigma(T)$.
7. (1,0) Prove que todo espaço de Hilbert separável de dimensão infinita é isometricamente isomorfo ao espaço ℓ^2.