# Lista 4

**Exercício 1** *Seja $H$ um espaço de Hilbert. Se $H$ admite uma base Hilbertiana então $H$ é separável.*

**Exercício 2** *Seja $H$ um espaço real com produto interno. Se $u$ e $v$ são tais que $\|u\| = \|v\|$ então $(u+v, u-v) = 0$.*

**Exercício 3** *Se $H$ é um espaço com produto interno então $\|u\| = \sup_{\|v\|=1} |(u,v)|$.*

**Exercício 4 (Identidades de Polarização)** *Seja $(H, (\cdot,\cdot))$ um espaço vetorial com produto interno.*

*i) Mostre que se o espaço é real então*

$$(u,v) = \frac{1}{4}(\|u+v\|^2 - \|u-v\|^2)$$

*para todo $u, v \in H$.*

*ii) Se o espaço é complexo então*

$$(u,v) = \frac{1}{4}(\|u+v\|^2 - \|u-v\|^2 + i\|u+iv\|^2 - i\|u-iv\|^2),$$

*para todo $u, v \in H$.*

*iii) Se $(\cdot,\cdot)_1$ e $(\cdot,\cdot)_2$ são dois produtos internos diferentes em um espaço vetorial $H$, então as normas $u \mapsto \sqrt{(\cdot,\cdot)_1}$ e $u \mapsto \sqrt{(\cdot,\cdot)_2}$ podem ser iguais?*

**Exercício 5 (M. Fréchet - J. Von Neumann - P. Jordan)** *Seja $H$ um espaço vetorial normado com norma $\|\cdot\|_H$. Então sua norma provém de algum produto interno se, e somente se á válida a identidade do paralelogramo:*

$$\|u+v\|_H^2 + \|u-v\|_H^2 = 2(\|u\|_H^2 + \|v\|_H^2).$$

**Exercício 6** *Seja $(H, (\cdot,\cdot))$ um espaço de Hibert real, $K \subset H$ um conjunto fechado, convexo e não vazio, $f \in H$ e $u = P_K f$. Mostre que,*

*i) $\|v-u\|^2 \leq \|v-f\|^2 - \|u-f\|^2$, para cada $v \in K$.*

*ii) $\|u-v\| \leq \|v-f\|$, para cada $v \in K$.*

**Exercício 7** *Seja $(H, (\cdot,\cdot))$ um espaço com produto interno e $F \subset H$ um subespaço. Mostre que $u \in F^\perp$ se, e somente se, $\|u-v\| \geq \|v\|$ para cada $v \in F$.*

**Definição 1** *Seja $H$ um espaço de Hilbert. Um operador $P \in \mathcal{L}(H)$ é chamado de projeção ortogonal, se existe um subespaço fechado $M$ tal que $P = P_M$, onde o operador $P_M$ vem do Corolário do Teorema da Projeção sobre um convexo fechado.*

**Exercício 8** *Seja $H$ um espaço de Hilbert, $M \subset H$ um subespaço fechado e $L(H)$ um operador não identicamente nulo que é idempotente. Prove que as seguintes sentenças são equivalentes:*

1. *$T$ é uma projeção ortogonal.*
2. *$\ker T = (T(H))^\perp$*
3. *$\|T\| = 1$*
4. *$(Tx, x)_H \geq 0$.*

**Exercício 9** *Seja $H$ um espaço de Hilbert e suponha que $P \in L(H)$ é um operador não nulo idempotente satisfazendo $(Px, y)_H = (x, Py)_H$ para todo $x, y \in H$. Prove que $\ker P = (P(H))^\perp$.*

**Exercício 10** *Seja $H = \mathbb{R}^2$, $M = \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$ $N = \{(x, x\tan\theta) : x \in \mathbb{R}\}$ e $\theta \in (0, \pi/2)$. Encontre $T_\theta$ linear de $H$ em $H$ com $T_\theta^2 = T_\theta$, $T_\theta(H) = M$, $\ker T_\theta = N$. Prove que $\|T_\theta\| = \frac{1}{\operatorname{sen}(\theta)}$ e que $T_\theta$ não é uma projeção ortogonal.*

**Exercício 11** *Seja $f(x) = \operatorname{sen}(x)$ e $H = L^2[-\pi, \pi]$. Calcule a projeção de $f$ sobre o subespaço de $H$ gerado por $\{1, x, x^2, x^3\}$. Faça o mesmo com $H = L^2[0, 1]$.*

**Exercício 12** *Sejam* $(H, (\cdot, \cdot))$ *um espaço de Hilbert e* $T : H \to H$ *um operador linear e contínuo. Suponha que exista uma constante* $C > 0$ *tal que* $\|Tu\| \geq C\|u\|$ *para cada* $u \in H$. *Então* $T(H)$ *é um subespaço fechado.*

**Exercício 13** *Seja* $(H, (\cdot, \cdot))$ *um espaço de Hilbert e* $T : H \to H$ *um operador linear contínuo. Mostre que as seguintes propriedades são equivalentes:*

*i) Existe uma constante* $C > 0$ *tal que* $\|Tu\| \geq C\|u\|$ *para cada* $u \in H$.

*ii) Existe um operador linear e contínuo* $S : H \to H$ *tal que* $STu = u$ *para todo* $u \in H$.

*Observação: Esse resultado é muito importante em Teoria do Controle!*

**Exercício 14** *Sejam* $E$ *e* $F$ *espaços de Banach. Mostre que se* $T : E \to F$ *é compacto e* $x_n \rightharpoonup x$ *em* $\sigma(E, E')$ *então* $T(x_n) \to T(x)$ *na topologia da norma em* $F$.

**Exercício 15** *Se* $E$ *é um espaço de Banach então* $Id : E \to E$ *é compacto?*

**Exercício 16** *Sejam* $E$ *um espaço de Banach reflexivo,* $T : E \to F$ *um operador linear limitado onde* $F$ *um espaço vetorial normado. Então* $T$ *é compacto se, e somente se,* $Tx_n \to Tx$ *em* $F$ *sempre que* $x_n \rightharpoonup x$ *em* $\sigma(E, E')$.

**Exercício 17** *Escreva em detalhes a construção do operador adjunto de Hilbert e suas propriedades dadas nas seções 3.8, 3.9 e 3.10 do livro do Kreyszig.*

**Exercício 18** *Se* $X$ *é um espaço de Banach de dimensão infinita e* $U \subset X$ *é aberto então* $U$ *não é relativamente compacto, isto é,* $\overline{U}$ *não é compacto.*

**Exercício 19** *Sejam* $(\alpha_j)_{j\in\mathbb{N}} \in c_0$ *e* $T \in \mathcal{L}(\ell^2)$ *dado por* $T\xi = \eta$, *onde* $\xi = (\xi_j)_{j\in\mathbb{N}}$ *e* $\eta = (\alpha_j \xi_j)_{j\in\mathbb{N}}$. *Então,*

*a)* $T \in K(\ell^2)$;

*b)* $T$ *é injetivo se, e somente se,* $\alpha_j \neq 0$ *para todo* $j \in \mathbb{N}$;

*c)* $T = T^*$ *se, e somente se,* $\alpha_j \in \mathbb{R}$ *para cada* $j \in \mathbb{N}$;

*d) determine todos os autovalores de* $T$;

*e) se* $\alpha = (1, \dots, 1, \alpha_{n+1}, \alpha_{n+2}, \dots)$ *com* $(\alpha_j)_{j\in\mathbb{N}}$ *estritamente decrescente e* $1 > \alpha_{n+1}$ *então* $\dim N(T - I) = n$.