Segunda avaliação de Análise Funcional - 24/10/2023

Professor: Victor Hugo Gonzalez Martinez

Nome: ______________________________________________________________

1. (2,0) Seja $E$ um espaço de Banach de dimensão infinita.

   a) Defina as topologias $\sigma(E', E'')$ e $*\sigma(E', E)$ em $E'$ e exiba uma base de vizinhanças de um ponto $f_0$ em cada uma dessas topologias.

   b) Mostre que $\overline{S(0,1)}^{\sigma(E,E')} = B_E$.

   c) Mostre que $B_{E'}$ ser compacta na topologia fraca $*\sigma(E', E)$ não necessariamente implica $B_{E'}$ ser sequencialmente compacta.

   d) Mostre que $E$ é separável se, e somente se $S_E = \{x \in E : \|x\| = 1\}$ é separável.

2. (2,0) Seja $E$ um espaço de Banach de dimensão infinita. Mostre pela definição, sem utilizar redes e filtros, que $(E, \sigma(E, E'))$ é um espaço vetorial topológico, isto é, as operações de adição

$$\begin{array}{rccc} A_v: & E \times E & \longrightarrow & E \\ & (x,y) & \mapsto & x+y \end{array}$$

   e multiplicação por um escalar

$$\begin{array}{rccc} M_s: & \mathbb{R} \times E & \longrightarrow & E \\ & (\lambda,x) & \mapsto & \lambda x \end{array}$$

   são contínuas quando consideramos $E$ com a topologia fraca $\sigma(E, E')$ e os espaços $E \times E$, $\mathbb{R} \times E$ com as respectivas topologias produto, $\sigma(E, E') \times \sigma(E, E')$ e $|\cdot|_R \times \sigma(E, E')$.

3. (2,0) Seja $E$ um espaço de Banach. Temos que $x_n \rightharpoonup x$ em $\sigma(E, E')$ se, e somente se, as seguintes condições forem satisfeitas:

   i) $\|x_n\| \leq M$, para cada $n \in \mathbb{N}$;

   ii) $\langle g, x_n \rangle \to \langle g, x \rangle$ para todo $g \in B'$ onde $B'$ é um subconjunto de $E'$ que gera um conjunto denso em $E'$.

4. (2,0) Sejam $(x_n) \subset \ell^1$ e $x \in \ell^1$. Prove que $x_n \rightharpoonup x$ se, e somente se, $x_n \to x$.

5. (2,0) Seja $E$ um espaço normado. Então $(B_E, \sigma(E, E'))$ é metrizável se, e somente se, $E'$ é separável.

6. (3,0)

   a) Enuncie e demonstre o Teorema de Banach-Alaoglu-Bourbaki.

   b) Enuncie o Teorema de Kakutani.

   c) Sejam $E$ e $F$ espaços de Banach e $T : E \to F$ um isomorfismo vetorial topológico. Mostre que $E$ é reflexivo se, e somente se, $F$ é reflexivo.