Primeira avaliação de Análise Funcional - 10/10/2023

Professor: Victor Hugo Gonzalez Martinez

Nome: ______________________________

1. (2,0) Determine se as afirmações abaixo são verdadeiras ou falsas. Se a afirmação for verdadeira, demonstre. Se for falsa, demonstre ou dê um contra-exemplo.

   a) Todo operador linear $T : X \to X$, em um espaço normado X é contínuo.
   b) Se $T : D(T) \subset X \to Y$ é linear, contínuo e injetor, então $T^{-1} : R(T) \to D(T)$ é contínuo.
   c) Seja (X, d) um espaço métrico e $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência em X. Se $\sum_{n=1}^{\infty} d(x_n, x_{n+1}) < \infty$ então $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é de Cauchy.
   d) $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uma base de Schauder para ℓ^p com $1 < p < \infty$.

2. (2,0) Mostre que o operador identidade de c_{00} não pode ser estendido a uma aplicação contínua de c_0 em c_{00}.

3. (2,0) Mostre que o espaço dos polinômios $\mathbb{R}[x]$ em uma variável x não é um espaço de Banach em nenhuma norma.

4. (2,0) Sejam X um espaço normado sobre $\mathbb{R}$, $\emptyset \neq A, B \subset X$ convexos e $\text{int}(A) \cap B = \emptyset$. Suponha que A tenha pelo menos um ponto interior. Mostre que existem $f \in X'$, $f \neq 0$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ tais que $[f = \alpha]$ separa A e B.

5. (2,0) Seja V um espaço de Banach real e W um subespaço fechado. Consideremos a relação (de equivalência) $x \sim y$ se $x - y \in W$. O conjunto de todas as classes de equivalência $V \setminus W$ é denominado espaço quociente. Mostre que:

   a) As operações $[v] + [w] = [v + w]$ e $\alpha[v] = [\alpha v]$, com $v, w \in V$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ estão bem definidas em $V \setminus W$.
   b) $\|[x]\|_{V\setminus W} = \inf_{w\in W} \|x + w\|_V$ é uma norma.
   c) $(V \setminus W, \|[\cdot]\|_{V\setminus W})$ é Banach.