Primeira avaliação de Análise Funcional - 19/09/2023

Professor: Victor Hugo Gonzalez Martinez

Nome: ____

1. (2,0) Determine se as afirmações abaixo são verdadeiras ou falsas. Se a afirmação for verdadeira, demonstre. Se for falsa, demonstre ou dê um contra-exemplo.

   a) Toda extensão do Teorema de Hahn-Banach é única.
   b) Existe $\phi \in c_0'$ tal que $\phi(e_n) = \exp(-n)$, para cada $n \in \mathbb{N}$.
   c) Toda isometria em um espaço normado é linear.
   d) $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uma base de Schauder para ℓ^∞.

2. (2,0) Seja (X, c) um espaço métrico. Dizemos que $A \subset X$ é rarefeito se $\operatorname{int} \overline{A} = \emptyset$ e que A é magro, ou de categoria I se $A = \bigcup_{n\in J} A_n$, onde $J \subset \mathbb{N}$ é enumerável e os conjuntos A_n são rarefeitos para cada $n \in J$. Os conjuntos que não são magros são denominados de categoria II.

   Prove que as seguintes condições são equivalentes:

   a) Todo subconjunto aberto e não vazio de X é de categoria II.
   b) $A = \bigcup_{n\in J} A_n$, onde A_n é fechado e $\operatorname{int} A_n = \emptyset$, para cada $n \in J \Rightarrow \operatorname{int} A = \emptyset$.
   c) $A = \bigcap_{n\in J} A_n$, onde A_n é aberto e $\overline{A_n} = X$ para cada $n \in J \Rightarrow \overline{A} = X$.
   d) Se A é de categoria I, então $\overline{X \setminus A} = X$.

   Um espaço métrico satisfazendo qualquer um dos itens acima é denominado espaço de Baire.

3. (2,0) Considere em $\mathbb{R}^2$ a norma $\|(x, y)\|_p = (|x|^p + |y|^p)^{\frac{1}{p}}$ onde $1 < p < \infty$. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = ax + by$. Mostre que $\|f\| = (|a|^q + |b|^q)^{\frac{1}{q}}$, onde q é tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

4. (2,0) Seja M um subespaço de um espaço normado E. Então,

$$\overline{M} = \bigcap \{\ker(\varphi) : \varphi \in E' \text{ e } M \subset \ker(\varphi)\}.$$

5. (2,0) Dizemos que um espaço vetorial X sobre um corpo $\mathbb{K}$ é algébricamente reflexivo se a aplicação canônica $J : X \to X^{**}$ é sobrejetora. Mostre que X é algebricamente reflexivo se, e somente se $\dim_{\mathbb{K}} X < \infty$.