Universidade Federal de Pernambuco - UFPE
Centro de Ciências Exatas e da Natureza - CCEN
Departamento de Matemática - DMAT

Introdução à Variável Complexa - 3ª Lista de Exercícios

Data de Entrega: 08/12/2023

Professor: Victor Hugo Gonzalez Martinez

1. Verifique que não existem pontos em $\mathbb{C}$ onde as funções $\Re ez$, $\Im mz$, $\overline{z}$ satisfazem as equações de Cauchy-Riemann, assim, estas funções não são diferenciáveis em ponto algum $z = x + iy$ de $\mathbb{C}$.

2. Determine quais das funções a seguir são $\mathbb{C}$ diferenciáveis em $z = 0$:

   (a) $|z|^2$

   (b) $\Re ez + \Im mz$

   (c) $(\Re ez)(\Im mz)$

3. Para cada uma das funções a seguir, mostre que a mesma satisfaz as equações de Cauchy-Riemann em $z = 0$ mas não são diferenciáveis neste ponto:

   (a) $f(z) = \begin{cases} \dfrac{z^5}{|z|^4}, & \text{se } \neq 0, \\ 0, & \text{se } z = 0 \end{cases}$

   (b) $f(z) = \sqrt{|\Re ez||\Im mz|}$

4. O Teorema do Valor Médio do Cálculo não tem um análogo em Análise Complexa. Verifique essa afirmação usando a função $f(z) = z^3$, mostrando que não existe c no segmento de reta $[1, i]$ tal que

$$\frac{f(i) - f(1)}{i - 1} = f'(c).$$

   Prove o TVM no caso real, isto é: Seja f uma função com valores reais definida e contínua no intervalo fechado $[a, b] \subset \mathbb{R}$, e diferenciável em (a, b). Então existe $c \in (a, b)$, tal que $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$.

5. Determine os pontos $z = x+iy$ em que a função $f(z) = (z(z-i)(z^2+r))^{-3}$ é holomorfa.

6. Dê exemplos de:

   (a) Uma função holomorfa, exceto em $z = \pm i$.

   (b) Uma função f holomorfa em todo $\mathbb{C}$, tal que $\dfrac{1}{f(z)}$ não é holomorfa exatamente em seis pontos de $\mathbb{C}$.

   (c) Uma função $f = u + iv$ que não é holomorfa em ponto algum e que nem u, nem v sejam constantes.

7. Suponha que f é holomorfa em uma região R. Mostre que $\Re e f$ constante acarreta que f é constante.

8. Seja $f : D_1(0) \to \mathbb{C}$ holomorfa.

   (a) Se g é definida por $g(z) = \overline{f(\overline{z})}$, mostre que ela é holomorfa em $D_1(0)$.

   (b) Se k é definida por $k(z) = \overline{f(z)}$, mostre que k é $\mathbb{C}-$diferenciável em $a \in D_1(0)$ se, e somente se, $f'(a) = 0$. A partir disso, deduza que k é holomorfa em $D_1(0)$ se, e somente se, f é constante.

9. Encontre as partes real e imaginária das seguintes funções: e^{2z}, e^{z^2}, e^{e^z}.

10. Para $z \in \mathbb{C}$ definimos as funções *cosseno hiperbólico* $\cosh(z) = \frac{1}{2}\left(e^z + e^{-z}\right)$, *seno hiperbólico* $\operatorname{senh}(z) = \frac{1}{2}\left(e^z - e^{-z}\right)$. Verifique

    (a) $\cosh^2(z) - \operatorname{senh}^2(z) = 1$

    (b) $\frac{d}{dz}\left(\cosh(z)\right) = \operatorname{senh}(z)$ e $\frac{d}{dz}\left(\operatorname{senh}(z)\right) = \cosh(z)$

    (c) $\cosh(z) = \cosh(w)$ então $w - z = 2k\pi i$ ou $w + z = 2k\pi i$, $k \in \mathbb{Z}$

11. Mostre que $|\cos^2(z)| + |\operatorname{sen}^2(z)| = 1$ não se verifica se $z = x + iy$, $y \neq 0$.

12. Encontre as soluções das seguintes equações: $\cosh z = -1$, $\cos^2 z = 4$ e $\operatorname{tg} z = i$.

13. Verifique que a função $f(z) = \sqrt[3]{z} = \sqrt[3]{r}\left(\cos\frac{\theta}{3} + i \operatorname{sen}\frac{\theta}{3}\right)$, $z = re^{i\theta}$ e $-\pi < \theta \leqslant \pi$, é descontínua no semi-eixo real negativo ($\theta = \pi$ ou $z = x + i0$ com $x < 0$. O mesmo para as funções $f(z) = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta}{n} + i \operatorname{sen}\frac{\theta}{n}\right)$

14. Determine os pontos onde a função admite derivada e calcule $f'(z)$.

    (a) $f(z) = z^2\overline{z}$

    (b) $f(z) = x^3 + iy^3$

    (c) $f(z) = (\operatorname{sen} x)\cosh y + i(\cos x)\operatorname{senh} y$

    (d) $f(z) = z\Re e(z)$

15. Determine todos os valores para $(1 - i)^{\sqrt{2}i}$.

16. Inversa de função trigonométrica complexa. Dado $z \in \mathbb{C}$, determine $w \in \mathbb{C}$ tal que:

    (a) $\operatorname{sen} w = z$, ou seja $w = \operatorname{sen}^{-1}(z)$. Mostre que $\dfrac{d}{dz}(\operatorname{sen}^{-1}(z)) = \dfrac{1}{\sqrt{1 - z^2}}$.

    (b) $\operatorname{tg} w = z$, ou seja $w = \operatorname{tg}^{-1}(z)$. Mostre que $\dfrac{d}{dz}(\operatorname{tg}^{-1}(z)) = \dfrac{1}{1 + z^2}$.

17. Sejam $z \neq 0$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, mostre que $\dfrac{z^\alpha}{z^\beta} = z^{\alpha - \beta}$.

18. Verifique se as seguintes afirmativas são verdadeiras ou falsas. Justifique.

    (a) Se f é contínua em $z = z_0$ então existe $f'(z_0)$;

    (b) Se $\mathsf{A} \subseteq \mathbb{C}$ não é aberto então A é fechado;

    (c) $f(z) = x^2yi$ não possui derivada em nenhum ponto.

19. Verifique se as funções a seguir são harmônicas e determine sua conjugada harmônica:

    (a) $u(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$, $(x, y) \neq (0, 0)$
    (b) $u(x, y) = \cos(x)\cosh(y)$
    (c) $u(x, y) = 2x - x^3 + 3xy^2$
    (d) $u(x, y) = e^x(x\cos(y) - y\,\mathrm{sen}(y))$

20. Justifique porque $u(x, y) = \ln((x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}})$ com $(x, y) \neq 0$, não possui conjugada harmônica.