Universidade Federal de Pernambuco - UFPE
Centro de Ciências Exatas e da Natureza - CCEN
Departamento de Matemática - DMAT

Introdução à Variável Complexa - 2ª Lista de Exercícios

Data de Entrega: 16/11/2023

Professor: Victor Hugo Gonzalez Martinez

1. O que cada umas das seguintes equações representa geometricamente? Faça um esboço em cada caso:
   (a) $|z+1| = 6$
   (b) $|z-3i| = |z+i|$
   (c) $|iz-1| = |iz+1|$
   (d) $|z - e^{\frac{2\pi i}{3}}| = |z-1|$
2. Descreva geometricamente os seguintes subconjuntos de $\mathbb{C}$:
   (a) $|z-1-i| > 1$
   (b) $|z+i| \neq |z-i|$
   (c) $z = |z|e^{i\theta}$, $-\pi < \theta < \frac{\pi}{2}$
   (d) $|z-2| > 3$
   (e) $\Re ez < 1$ ou $\Im m(z-1) \neq 0$
   (f) $1 < |z-1| < 2$
   (g) $1 < \Im mz < 2$ e $\Re ez > 1$
   (h) $|z|^2 > z + \overline{z}$ (Note que $z+\overline{z}$ é um número real!)
3. Faça um esboço para as soluções das seguintes equações:
   (a) $|z+i| = |z-3i|$
   (b) $|z+1| = 4|z-1|$
   (c) $|z-i| = 2|z|$
   (d) $2|z-i| = |z|$
4. A interseção de dois discos abertos é aberta? Se sim demonstre, se não forneça um contra-exemplo.
5. Qual é a negação da definição de ponto de acumulação.
6. Por que não podemos representar geometricamente o gráfico de uma função complexa?
7. Encontre a imagem do conjunto $\{z \in \mathbb{C} : \Re ez \geq 2\}$ pela aplicação $f(z) = iz$. Faça um esboço da imagem.

8. Encontre a imagem do conjunto $\{z \in \mathbb{C} : \Re e z = 1\}$ pela aplicação $f(z) = z^2$. Faça um esboço da imagem.

9. Encontre a imagem do conjunto $\{z \in \mathbb{C} : \Re e z = 1\}$ pela aplicação $f(z) = \frac{1}{z}$. Faça um esboço da imagem.

10. Estabeleça, pela definição, os seguintes limites:

    (a) $\lim_{z\to i} \frac{4z+i}{z+1} = \frac{5i}{1+i}$

    (b) $\lim_{z\to i} \frac{7}{z^2+1} = \infty$

    (c) $\lim_{z\to\infty} \frac{z^2-1}{z-3} = \infty$

    (d) $\lim_{z\to\infty} \frac{6z+7}{2z-3} = 3$

    (e) $\lim_{z\to\infty} \frac{z+1}{z^2-7} = 0$

    (f) $\lim_{z\to\infty} \frac{z^3-3z^2+1}{z^2+5z-3} = \infty$

11. Prove as propriedades de limites estabelecidas em aula. (Soma, produto e quociente)

12. Prove que a função $f(z) = \frac{1}{z}$ é contínua em todo ponto $z \neq 0$.

13. Prove que se $\lim_{z\to z_0} f(z) = 0$ e $g(z)$ é limitada em uma vizinhança de z_0 então $\lim_{z\to z_0} f(z)g(z) = 0$. Enuncie e prove uma proposição análoga no caso $z \to \infty$.

14. Prove que se $\lim_{z\to z_0} f(z) = \infty$ e $|g(z)| > c > 0$ em uma vizinhança de z_0, então $\lim_{z\to z_0} f(z)g(z) = \infty$. Enuncie e prove um resultado análogo no caso $z \to z_0$.

15. Contrua dois contra-exemplos, em ambos dos quais $\lim_{z\to z_0} f(z) = \infty$ e $\lim_{z\to z_0} f(z)g(z) = \infty$, porém em um deles $\lim_{z\to z_0} g(z) = 0$ e no outro $g(z)$ não tem limite quando $z \to z_0$. Faça o mesmo com $z \to \infty$ no lugar de $z \to z_0$.