Universidade Federal de Pernambuco - UFPE
Centro de Ciências Exatas e da Natureza - CCEN
Departamento de Matemática - DMAT

Introdução à Variável Complexa - 1^a Lista de Exercícios

Data de Entrega: 07/11/2023

Professor: Victor Hugo Gonzalez Martinez

1. (a) Expresse cada um dos seguintes números complexos na forma $re^{i\theta}$:
    1. i^3
    2. $i-1$
    3. $\sqrt{2}(i+1)$
    4. $\sqrt{3}-i$
    5. $2-2\sqrt{3}i$

   (b) Expresse cada um dos seguintes números complexos na forma $x+iy$, $x, y \in \mathbb{R}$:
    1. $e^{\frac{\pi i}{4}}$
    2. $5e^{-\pi i}$
    3. $2e^{\frac{3\pi i}{2}}$
    4. $e^{\frac{4\pi i}{3}}$
    5. $e^{\frac{7\pi i}{6}}$

2. Expresse em termos de r e θ as seguintes equações, onde $z = re^{i\theta}$:
    1. $|z^2| = 4$
    2. $|z^2 - 1| = 1$
    3. $\arg(2z) = \frac{2\pi}{3}$
    4. $\arg(iz) = \frac{\pi}{4}$
    5. $\arg(z^2) = \frac{\pi}{2}$

3. Calcule, para $n = 1, 2, 3, \ldots$
    1. i^n
    2. $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^n$
    3. $(1+i)^n - (1-i)^n$

4. Sem usar a expansão do Binômio de Newton, mostre que $(\sqrt{3}+i)^n + (\sqrt{3}-i)^n$ é um número real se n é um inteiro positivo.

5. Calcule $\sum_{k=0}^{n} e^{i\theta k}$. Deduza que

$$1 + 2\sum_{k=1}^{n} \cos(k\theta) = \frac{\operatorname{sen}\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)}, \qquad \text{se } \theta \neq 2m\pi \quad (m \in \mathbb{Z}).$$

   Encontre uma expressão semelhante para $\sum_{k=1}^{n} \operatorname{sen}(k\theta)$.

6. Encontre todas as raízes em $\mathbb{C}$ das equações:

   1. $1 + z + z^2 + \cdots + z^7 = 0$
   2. $(1-z)^6 = (1+z)^6$
   3. $1 - z + z^2 = 0$
   4. $1 - z^2 + z^4 - z^6 = 0$

7. Seja $\alpha \in \mathbb{C}$ tal que $\alpha^3 = -1$ e $\alpha \neq -1$. Calcule $(\alpha^2(\alpha-1)^2)^{-1}$.

8. Mostre que se $z \in \mathbb{C}$, tem-se que

$$|z| \leq |\Re e z| + |\Im m z| \leq \sqrt{2}|z|.$$

9. Considere $z, w \in \mathbb{C}$. Mostre que

$$|z + iw|^2 + |w + iz|^2 = 2(|z|^2 + |w|^2).$$

10. Considere $z, w \in \mathbb{C}$. Mostre que

$$|1 - \overline{z}w|^2 - |z - w|^2 = (1 - |z|^2)(1 - |w|^2).$$

   Deduza que, se $|z| < 1$ e $|w| < 1$, então

$$\left|\frac{z - w}{1 - \overline{z}w}\right| < 1.$$

11. Sejam z e w números complexos com $z \neq w$.

   1. Mostre que

$$\Re e\left(\frac{w+z}{w-z}\right) = \frac{|w|^2 - |z|^2}{|w-z|^2}.$$

   2. Sejam $z = re^{i\theta}$ e $w = Re^{i\varphi}$, com $0 < r < R$. Escrevendo $|w-z|^2$ na forma $(w-z)(\overline{w} - \overline{z})$, mostre que

$$|w - z|^2 = R^2 - 2rRcos(\theta - \varphi) + r^2.$$

      Deduza então que

$$\Re e\left(\frac{w+z}{w-z}\right) = \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2rRcos(\theta - \varphi) + r^2}.$$

12. Sabe-se que no corpo dos números reais $\mathbb{R}$ está definida uma relação de ordem $>$ que satisfaz:

    1. $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0 \Rightarrow x > 0$, ou $-x > 0$, e uma alternativa exclui a outra.
    2. $x, y \in \mathbb{R}$, $x, y > 0 \Rightarrow x + y > 0$ e $xy > 0$.

    Mostre que não pode existir uma relação $>$ em $\mathbb{C}$ que satisfaz 1. e 2.

13. Encontre as partes real e imaginária dos seguintes números complexos, como funções de x e y:

    1. z^3
    2. $z + z^{-1}$, $(z \neq 0)$
    3. $\dfrac{1}{1-z}$, $(z \neq 1)$

14. Mostre que se $P(z)$ é um polinômio com coeficientes reais, então $\overline{P(z)} = P(\overline{z})$, para cada $z \in \mathbb{C}$.

15. Suponha que $P(z)$ é um polinômio com coeficientes reais. Mostre que $P(z) = 0$ se, e somente se, $P(\overline{z}) = 0$, isto é, as raízes não reais de um polinômio real vem aos pares.

16. Seja $z = x + iy \in \mathbb{C}$. Denote por $\operatorname{Arg}(z)$ o argumento do número complexo $z \neq 0$. Explique a relação entre $\operatorname{Arg}(z)$ e $\arctan\left(\frac{y}{x}\right)$. (Atenção: As duas coisas são de fato diferentes.)

17. Mostre que se o número complexo $a \neq 1$ é raiz da equação $z^n - 1 = 0$, então a também é raiz da equação $z^{n-1} + z^{n-2} + \cdots + z + 1 = 0$.

18. Considere as $n - 1$ diagonais de um polígono regular de n lados inscrito no círculo unitário, obtidas ligando um vértice fixado aos demais vértices. Mostre que o produto de seus comprimentos é n. (Sugestão: Escolha o vértice $z_1 = 1$, ligue-o aos demais vértices e aplique o resultado do problema anterior.)