Lista 3

Exercício 1 *Seja E um espaço vetorial normado de dimensão infinita. Prove que todo aberto fraco contém uma reta.*

Exercício 2 *Seja E um espaço normado. Então a topologia fraca $\sigma(E', E)$ é metrizável se, e somente se, E tem dimensão finita.*

Exercício 3 *Seja E um espaço vetorial normado de dimensão infinita. Se $x \in \overline{A}^{\sigma(E,E')}$ então existe uma sequência $(x_n) \subset A$ tal que $x_n \rightharpoonup x$ na topologia fraca $\sigma(E, E')$?*

Exercício 4 *Seja E um espaço vetorial normado. Se K é compacto na topologia fraca $\sigma(E, E')$ então K é limitado na topologia da norma.*

Exercício 5 *Considere $1 < p < \infty$. Seja $(x^n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^p$ uma sequência. Prove que $x^n \rightharpoonup x$ em ℓ^p se, e somente se, a sequência $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada em ℓ^p e $p_k(x^n) \to p_k(x)$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Aqui, $p_k : \ell^p \to \mathbb{R}$ indica a projeção canônica, isto é, $p_k(x) = x_k$.*

Exercício 6 *Seja E um espaço normado. Então $(B_E, \sigma(E, E'))$ é metrizável se, e somente se, E' é separável.*

Exercício 7 *Seja $\psi : [0, 1] \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Defina a sequência $(x^n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \ell^p$ por*

$$x^n = n^{-1/p}(\psi(1/n), \psi(2/n), \dots, \psi(n/n), 0, 0, \dots),\ n \in \mathbb{N},$$

onde $1 < p < \infty$. Prove que $x^n \rightharpoonup 0$ em ℓ^p e que $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge em norma se, e somente se, $\psi \equiv 0$.

Exercício 8 *Defina $C = \{\xi = (\xi_i)_{i=1}^{\infty} \in \ell^p : |\xi_j| \leq \frac{1}{j}, j \in \mathbb{N}\}$. Assuma que $1 \leq p < \infty$. Mostre que toda sequência que converge fraco em C também converge em norma.*

Exercício 9 *Sejam E e F espaços vetoriais normados e $T : E \to F$ um operador contínuo. Mostre que T é contínuo quando ambos E e F estão munidos com suas respectivas topologias fracas. A recíproca é verdadeira?*

Exercício 10 *Sejam E um espaço reflexivo e $K \subset E$ um subconjunto convexo, fechado e limitado em E. Mostre que K é compacto na topologia fraca $\sigma(E, E')$.*

Exercício 11 *Para cada $n \geq 1$ seja*

$$e^n = (0, 0, \dots, \underset{(n)}{1}, 0, \dots).$$

a) Prove que $e^n \underset{n\to\infty}{\rightharpoonup} 0$ fracamente em $\sigma(\ell^p, \ell^{p'})$ com $1 < p \leq \infty$ mas $(e^n)_{n\in\mathbb{N}}$ não converge em norma.

b) Prove que não existe subsequência (e^{n_k}) que converge em ℓ^1 com respeito a topologia $\sigma(\ell^1, \ell^\infty)$.

Definição 1 *Seja E um espaço normado. Uma sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ é dita fracamente de Cauchy se, para cada vizinhança fraca U de 0, existir $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_i - x_j \in U$ para cada $i, j \geq n_0$.*

Exercício 12 *Mostre que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ é fracamente de Cauchy se, e somente se, para cada $\varphi \in E'$, a sequência $(\varphi(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ é de Cauchy em $\mathbb{K}$.*

Exercício 13 *Mostre que $x_n = \sum_{j=1}^{n} e_j = (1, 1, \dots, 1, 0, 0, \dots)$ é fracamente de Cauchy em c_0 mas não é fracamente convergente.*

Definição 2 *Dizemos que E é fracamente completo se toda sequência fracamente de Cauchy em E converge fracamente para um ponto de E.*

Exercício 14 *Mostre que se E é reflexivo então E é fracamente completo.*

Exercício 15 *Sejam $(x_n) \subset \ell^1$ e $x \in \ell^1$. Prove que $x_n \rightharpoonup x$ se, e somente se, $x_n \to x$.*

Exercício 16 *Prove que ℓ^∞ não é separável.*

Exercício 17 *Mostre que c, c_0 e ℓ^p, $1 \leq p < \infty$ são separáveis.*

Exercício 18 *Prove que c, c_0, ℓ^1 e ℓ^∞ não são reflexivos.*

Exercício 19 *Prove que ℓ^p, $1 < p < \infty$ é reflexivo.*

Exercício 20 *Sejam E e F espaços de Banach e $T : E \to F$ um isomorfismo vetorial topológico. Mostre que E é reflexivo se, e somente se, F é reflexivo.*