Terceira avaliação de Topologia - 29/06/2023

Professor: Victor Hugo Gonzalez Martinez

Nome: ____

1. (2,0) Prove os seguintes itens:

   (a) Seja X é um espaço localmente compacto e de Hausdorff. Defina a compactificação de Alexandroff (Y, τ_∞) de X e enuncie as propriedades que o espaço (Y, τ_∞) satisfaz. Mostre que se X não é compacto então $\overline{X}^{\tau_\infty} = Y$.

   (b) Mostre que se $f : X_1 \to X_2$ é um homeomorfismo entre espaços de Hausdorff localmente compactos, então f se estende a um homeomorfismo entre as respectivas compactificações de Alexandroff de cada espaço.

2. (2,0) Defina $\ell^2 = \{x = (x_1, x_2, \dots) : \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2 < \infty\}$. Assumindo que $\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2}$ é uma norma mostre que ℓ^2 é completo com a métrica $d(x, y) = \|x - y\|$.

   Dica: Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de Cauchy em ℓ^2, onde $x_m = (\xi_1^{(m)}, \xi_2^{(m)}, \dots)$ para cada $m \in \mathbb{N}$. Para todo $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$d(x_m, x_m) = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i^{(m)} - \xi_i^{(n)}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} < \varepsilon \quad \text{sempre que } m, n \geq n_0.$$

3. (2,0) Resolva os seguintes itens:

   (a) Defina homotopia e homotopia de laços.

   (b) Defina espaço contrátil.

   (c) Defina o grupo fundamental de um espaço topológico X com ponto base x_0 e a operação neste grupo.

   (d) Defina espaço simplesmente conexo.

4. (2,0) Prove em detalhes que $\pi_1(S^1, (1, 0))$ é isomorfo a $(\mathbb{Z}, +)$.

5. (2,0) Sejam $D^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ e $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$. Mostre que não existe uma aplicação contínua $f : D^2 \to S^1$ tal que $f|_{S^1} = id$.