Lista 2

A notação $\mathbb{K}$ será utilizada para designar $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Exercício 1 *Seja E um espaço vetorial sobre um corpo de escalares $\mathbb{K}$. Dizemos que um conjunto $B \subset X$ é uma de Hamel se B é um conjunto linearmente independente que gera o espaço E. Prove que todo espaço vetorial não trivial possui uma base de Hamel.*

Exercício 2 *Mostre através de um exemplo que a extensão dada no Teorema de Hahn-Banach pode não ser única.*

Exercício 3 *Mostre que a aplicação $J : X \to X''$ definida por*

$$\begin{array}{rcccccc} J: & X & \longrightarrow & X'' & & & \\ & x & \mapsto & J_x: & X' & \to & \mathbb{K} \\ & & & & f & \mapsto & f(x), \end{array}$$

é uma isometria.

Exercício 4 *Sejam X um espaço vetorial normado e $C \subset X$ convexo. Mostre que:*

a) $\overline{C}$ e $\operatorname{int}(C)$ são convexos;

b) Dado $x \in C$ e $y \in \operatorname{int}(C)$ então $tx + (1-t)y \in \operatorname{int}(C)$ para todo $t \in [0, 1)$

c) Deduza que $\overline{C} = \overline{\operatorname{int}(C)}$ se $\operatorname{int}(C) \neq \emptyset$.

Exercício 5 *Sejam X um espaço normado sobre $\mathbb{R}$, $\emptyset \neq A, B \subset X$ convexos e $\operatorname{int}(A) \cap B = \emptyset$. Suponha que A tenha pelo menos um ponto interior. Mostre que existem $f \in X'$, $f \neq 0$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ tais que $[f = \alpha]$ separa A e B.*

Exercício 6 *Seja $f : X \to \mathbb{R}$ um funcional linear. Mostre que*

a) Se f é não nulo então f é sobrejetor;

b) Se $f(x) > a$ para todo $x \in X$ então $a < 0$ e $f = 0$;

c) Se $f(x) > b$ para todo $x \in X$ então $b > 0$ e $f = 0$;

d) Se f é limitado mostre que $\sup_{\|x\|_E \leq 1} |f(x)| = \sup_{\|x\|_E \leq 1} f(x)$.

Exercício 7 *Sejam E, F, G espaços vetoriais normados e $T : E \to E$, $T_1 : F \to G$ e $T_2 : E \to G$ operadores lineares limitados. Mostre que $T_1 \circ T_2$ é um operador linear limitado e $\|T_1 \circ T_2\| \leq \|T_1\| \|T_2\|$. Além disso, $\|T^n\| \leq \|T\|^n$, para cada $n \in \mathbb{N}$.*

Exercício 8 *Uma extensão de um operador $T : D(T) \subset X \to Y$ a um conjunto $M \supset D(T)$ é um operador $S : M \subset X \to Y$ tal que $S|_{D(T)} = T$. Seja $T : D(T) \subset X \to Y$ um operador linear limitado, onde X é um espaço normado e Y é um espaço de Banach, ambos sobre o mesmo corpo de escalares. Então, existe uma extensão de T definida por $S : \overline{D(T)} \subset X \to Y$, onde S é um operador linear limitado tal que $\|T\| = \|S\|$.*

Exercício 9 *Mostre que $(\ell^p)'$ e ℓ^q são isometricamente isomorfos para $1 < p < \infty$ com $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.*

Exercício 10 *Mostre que todo subespaço vetorial fechado de funções continuamente diferenciáveis em $C([-1, 1])$ tem dimensão finita.*

Exercício 11 *Sejam X um espaço normado e $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ tal que $\sum_{n=1}^{\infty} |f(x_n)| < \infty$ para cada $f \in X'$. Mostre que $\sup_{\|f\| \leq 1} \sum_{n=1}^{\infty} |f(x_n)| < \infty$.*

Exercício 12 *Seja E um espaço de Banach e $T : E \to E'$ um operador linear tal que $T(x)y = T(y)x$, para cada $x, y \in E$. Mostre que T é contínuo.*

Exercício 13 *Seja X um espaço de Banach de dimensão infinita. Mostre que qualquer base de Hamel de X é não enumerável.*

Exercício 14 *Calcule a norma do funcional $f : \ell^2 \to \mathbb{R}$ dado por $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{k}$.*

Exercício 15 *Seja $E = \ell^1$ e $E' = \ell^\infty$. Considere $N = c_0$ como subespaço fechado de E'. Determine $N^\perp = \{x \in E : \langle f, x \rangle = 0$ para todo $f \in N\}$ e $N^{\perp\perp} = \{f \in E' : \langle f, x \rangle = 0$ para todo $x \in N^\perp\}$. Prove que $N^{\perp\perp} \neq N$.*