Lista 1

A notação $\mathbb{K}$ será utilizada para designar $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Exercício 1 (Desigualdade de Young) *Seja $p > 1$ e defina $q \in \mathbb{R}$ por*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Prove que

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q},$$

para quaisquer $a, b \geq 0$.

Exercício 2 (Desigualdade de Hölder em $\mathbb{R}^n$) *Sejam $a = (a_1, \ldots, a_n)$ e $b = (b_1, \ldots, b_n)$ elementos de $\mathbb{R}^n$ com $a_i, b_i \geq 0$ para cada $i = 1, \ldots, n$ e $p, q > 1$ tais que*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Prove que

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^q \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Exercício 3 *Seja $p \geq 1$, $x_i \in \mathbb{R}$ e $y_i \in \mathbb{R}$ para todo $i = 1, \ldots, n$. Prove que*

$$\left(\sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^q \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Exercício 4 *Seja $p \geq 1$. Prove que $(\mathbb{R}^n, \rho_p)$ é um espaço métrico, onde*

$$\rho_p(x, y) = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Prove ainda que $\lim_{p \to \infty} \rho_p(x, y) = m(x, y)$ para cada $x, y \in \mathbb{R}^n$.

Exercício 5 *Prove que a função $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por*

$$d(x, y) = \left| \frac{x}{1 + |x|} - \frac{y}{1 + |y|} \right|$$

é uma métrica em $\mathbb{R}$.

Exercício 6 *Seja (X, d) um espaço métrico. Prove que*

$$\begin{aligned} d_0(x, y) &= \begin{cases} 0, & \text{se } x = y, \\ 1, & \text{se } x \neq y, \end{cases} \\ d_1(x, y) &= \min\{1, d(x, y)\} \\ d_2(x, y) &= \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)} \end{aligned}$$

são métricas em X. Prove também que as topologias definidas por d e d_2 são equivalentes e que $(\mathbb{R}, d_0)$ não é um espaço normado.

Exercício 7 *Se $\phi : \mathbb{R} \to A \subset \mathbb{R}$ é um homeomorfismo então a função $\rho(x, y) = |\phi(x) - \phi(y)|$ é uma métrica em $\mathbb{R}$.*

Exercício 8 *Prove que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy se, e somente se, para todo $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq n_0$ e $p \geq 1$ tem-se que $d(x_{n+p}, x_n) < \varepsilon$.*

Exercício 9 *Seja* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *uma sequência de Cauchy e* $(x_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$ *uma subsequência de* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *tal que* $\lim_{j\to\infty} x_{n_j} = p$ *onde* $p \in X$. *Então* $\lim_{n\to\infty} x_n = p$.

Exercício 10 $(\mathbb{R}, \rho)$ *não é completo, onde* $\rho(x, y) = \left|\frac{x}{1+|x|} - \frac{y}{1+|y|}\right|$

Exercício 11 *Sejam* (X, d_1) *e* (Z, d_2) *espaços métricos e* $\phi : (X, d_1) \to (Y, d_2)$ *com* $Y \subset Z$ *um homeomorfismo. Considere* ρ *a métrica definida por* $\rho(x, y) = d_2(\phi(x), \phi(y))$. *Prove que as topologias definidas por* d_1 *e* ρ *são equivalentes. Além disso, suponha que exista uma sequência* (x_n) *não limitada na métrica* d_1, *mas tal que a sequência* $(\phi(x_n))$ *converge em* Z, *prove que* (X, ρ) *não é completo.*

Exercício 12 *Prove que todo espaço de Banach* $(X, \|\cdot\|)$ *admite uma métrica* ρ *cuja topologia é equivalente a gerada pela métrica* $d(x, y) = \|x - y\|$ *que faz o espaço métrico* (V, ρ) *um espaço métrico não completo.*

Exercício 13 *Considere*

$$\begin{aligned} c =& \{x = (x_1, x_2, \dots) : x_i \in \mathbb{C} \textit{ e } (x_i) \textit{ é convergente}\} \\ c_0 =& \{x = (x_1, x_2, \dots) : x_i \in \mathbb{C} \textit{ e } \lim_{i\to\infty} x_i = 0\} \\ c_{00} =& \{x = (x_1, x_2, \dots) : x_i \in \mathbb{C} \textit{ e existe } n \in \mathbb{N} \textit{ tal que } x_i = 0 \textit{ para todo } i \geq n\} \end{aligned}$$

Mostre que:

i) $(c, \|\cdot\|_\infty)$ *e* $(c_0, \|\cdot\|_\infty)$ *são espaços normados;*

ii) $(c, \|\cdot\|_\infty)$ *e* $(c_0, \|\cdot\|_\infty)$ *são espaços de Banach;*

iii) $(c_{00}, \|\cdot\|)$ *não é um subconjunto fechado de* c_0 *mas* $\overline{c_{00}} = c_0$;

iv) $(c_{00}, \|\cdot\|)$ *não é um subconjunto fechado de* c.

Exercício 14 *Para* $p \geq 1$, *o espaço normado*

$$\ell^p = \{(x_1, x_2, \dots) : x_j \in \mathbb{K}, j = 1, 2, \dots, \ \textit{e} \sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^p < \infty\}$$

com a norma dada por

$$\|x\|_{\ell^p} = \left(\sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

é um espaço de Banach.

Exercício 15 *O espaço de funções* $C([a.b]) = \{f : [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f \textit{ é contínua}\}$ *com a norma*

$$\|x\|_\infty = \sup_{t\in[a,b]} |x(t)|$$

é um espaço de Banach. Prove ainde que se $f_n \to f$ *em* $C([a, b])$ *então essa convergência é uniforme.*

Exercício 16 *Defina*

$$\|x\|_1 = \int_0^1 |x(t)|dt, x \in C([0, 1]). \tag{1}$$

Mostre que $E = (C([0, 1]), \|\cdot\|_1)$ *é um espaço normado mas não é completo. Generalize para* $\|f\|_p = \left(\int_a^b |f(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}$ *com* $p > 1$. *Considerando as funções* d, ρ *definidas por*

$$d(f, g) = \max_{t\in[0,1]} |f(t) - g(t)| \textit{ e } \rho(f, g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)|dx.$$

Prove que $(C([0, 1]), d)$ *e* $(C([0, 1]), \rho)$ *são espaços métricos, a topologica* τ_d *é mais fina do que a topologia* τ_ρ, *mas estas topologias não são equivalentes. Mostre ainda que o interior de qualquer bola aberta na métrica* d *é vazio na métrica* ρ.

Exercício 17 (Teste da condensação de Cauchy) *Prove que* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *converge se, e somente se,* $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ *converge.*

Exercício 18 *Mostre que* $x_1 = 1$, $x_k = \frac{1}{ln(k)}$ *converge para* 0 *em* $\mathbb{R}$ *e* $(x_k) \notin l^p$ *para cada* $p \geq 1$. *Conclua que* $c_0 \not\subset l^p$ *para cada* $p \geq 1$.

Exercício 19 *Prove que todo subespaço vetorial próprio de um espaço vetorial normado tem interior vazio*

Exercício 20 *Seja* $(X, \|\cdot\|)$ *um espaço vetorial normado e* M *um subespaço vetorial de* V. *Prove que* $\overline{M}$ *é um subespaço vetorial de* V.

Exercício 21 *Sejam* $x, y \in X$ *dois elementos quaisquer em um espaço vetorial normado sobre um corpo* $\mathbb{K}$. *Prove que* $\|x\| - \|y\| \leq |\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|$.

Exercício 22 *Prove que toda norma sobre um espaço vetorial* X *sobre um corpo* $\mathbb{K}$ *é uma função contínua.*

Definição 1 *Se* $(x_k) \subset X$ *é uma sequência em um espaço normado* X, *podemos associa com* (x_k) *a sequência* $(S_n) \subset X$ *de somas parciais definida por*

$$S_n = x_1 + x_2 + \cdots + x_n,$$

para $n \in \mathbb{N}$. *Se existe* $S \in X$ *tal que*

$$\|S_n - S\| \to 0, \text{ quando } n \to \infty,$$

diremos que a série infinita

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k = S$$

é convergente e S *é chamado de soma da série.*

Se

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\| < \infty$$

dizemos que a série $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ *converge absolutamente.*

Exercício 23 *Em um espaço normado* X, *convergência absoluta implica convergência se, e somente se,* X *é um espaço de Banach.*

Exercício 24 *Seja* $(X, \|\cdot\|)$ *um espaço vetorial normado de dimensão infinita sobre* $\mathbb{K}$. *Mostre que existe um funcional* $f : X \to \mathbb{R}$ *ilimitado.*

Exercício 25 *Mostre que os subespaços*

$$U := \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^1 : a_{2n} = 0, \forall n \in \mathbb{N}\}$$
$$V := \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^1 : a_{2n-1} = n a_{2n}, \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$$

são ambos fechados em ℓ^1 *mas* $U \oplus V$ *não é fechado em* ℓ^1.

Exercício 26 *Seja*

$$X = \{f \in C([0, 2\pi]) : f(0) = f(2\pi)\}$$

munido da norma usual de $C([0, 2\pi])$.

i) Mostre que X *é Banach.*

ii) Para cada $k \in \mathbb{N}$ *seja* $s_k : X \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$s_k(f) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-k}^{k} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-int} dt, \forall f \in X.$$

Prove que s_k *é um funcional limitado em* X *para cada* $k \in \mathbb{N}$.

iii) Mostre que

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} \|s_k\|_{L(X,\mathbb{R})} = +\infty.$$

Dica: Note que

$$\sum_{n=-k}^{k} e^{int} = \frac{e^{i(k+1)t} - e^{ikt}}{e^{it}-1} = \frac{\sin((k+\frac{1}{2})t)}{\sin(\frac{t}{2})}, \forall t \in (0,2\pi), \forall l \in \mathbb{N}.$$

iv) Prove que para cada $t \in [0,2\pi]$ existe uma função contínua $2\pi-$periódica cuja série de Fourier $S_k f(t) = \sum_{n=-k}^{k} s_k(f)e^{int}$ não converge em t.

Exercício 27 *Seja $(X, \|\cdot\|_X)$ um espaço de Banach e sejam $(Y_n, \|\cdot\|_{Y_n})$ espaços normados. Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $G_n \subset L(X, Y_n)$ um subconjunto ilimitado de $L(X, Y_n)$. Prove que existe $x \in X$ tal que*

$$\sup_{T\in G_n} \|Tx\|_{Y_n} = \infty, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Exercício 28 *Sejam $(X, \|\cdot\|_X)$, $(Y, \|\cdot\|_Y)$ e $(Z, \|\cdot\|_Z)$ espaços normados. Considere $(X \times Y, \|\cdot\|_{X\times Y})$ onde $\|(x,y)\|_{X\times Y} = \|x\|_X + \|y\|_Y$ e uma aplicação bilinear $B : X \times Y \to Z$.*

i) Mostre que B é contínua se existe $C > 0$ tal que

$$\|B(x,y)\|_Z \leq C\|x\|_X\|y\|_Y, \forall (x,y) \in X \times Y.$$

ii) Assuma que $(X, \|\cdot\|_X)$ é Banach e que as aplicações $X \ni x \mapsto B(x,y')$ e $Y \ni y \mapsto B(x',y)$ são contínuas para cada $x' \in X$ e $y' \in Y$. Prove que B é contínua.

Definição 2 *Se um espaço normado X contém uma sequência (e_n) com a propriedade de que para todo $x \in X$ existe uma sequência de escalares (α_n) tal que*

$$\|x - (\alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_n e_n)\| \to 0, \text{ quando } n \to \infty,$$

então (e_n) é chamada de base de Schauder para X. A série

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k e_k$$

a qual tem a soma x é a expansão de x com respeito a base (e_n).

Definição 3 *Sejam (X, d_X) e (Y, d_Y) espaços métricos. Uma transformação $T : X \to Y$ é dita uma isometria se para todo $x, y \in X$ temos que*

$$d_Y(Tx, Ty) = d_X(x,y).$$

Neste caso, dizemos que (X, d_X) estpa imerso em (Y, d_Y).

Exercício 29 (Completamento de Espaços Métricos) *Seja (X, d_X) um espaço métrico. Existe um espaço métrico completo $(\widehat{X}, \widehat{d})$ e uma isometria $T : X \to \widehat{X}$ tal que $T(X)$ é denso em $\widehat{X}$. Além disso, o espaço $\widehat{X}$ é único a menos de isometria.*

Solução 1 Roteiro:

i) Seja S o conjunto de todas as sequência de Cauchy em X. Defina $(x_n) \sim (y_n) \Leftrightarrow d(x_n, y_n) \to 0$ quando $n \to \infty$. Prove que $\sim$ é uma relação de equivalência em X.

ii) Seja (X, d) um espaço métrico $(x_n), (y_n) \subset X$ sequências de Cauchy em X e $d_n = d(x_n, y_n)$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Então (d_n) é ma sequência de Cauchy em $\mathbb{R}$.

iii) Seja (X, d) um espaço métrico $(x_n), (y_n), (z_n) \subset X$ sequências de Cauchy em X. Suponhamos que $\lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = 0$ e $\lim_{n\to\infty} d(y_n, z_n) = 0$. Prove que $\lim_{n\to\infty} d(x_n, z_n) = 0$.

iv) Seja (X, d) um espaço métrico $(x_n), (x'_n), (y_n), (y'_n) \subset X$ sequências de Cauchy em X. Suponhamos que $\lim_{n\to\infty} d(x_n, x'_n) = 0$ e $\lim_{n\to\infty} d(y_n, y'_n) = 0$. Prove que $\lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = \lim_{n\to\infty} d(x'_n, y'_n)$.

v) Seja $\widehat{X} = X/\sim$ o conjunto de todas as classes de equivalência de sequências de Cauchy em X via a relação $\sim$. Prove que $\widehat{d}(\widehat{x}, \widehat{y}) = \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n)$ está bem definida (não depende do representante) e que $(\widehat{X}, \widehat{d})$ é um espaço métrico.

vi) Para cada $x \in X$ seja $T : X \to \widehat{X}$ dada por $Tx = \widehat{x}$, onde $\widehat{x}$ é a classe de equivalência da sequência $x_n = x$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Prove que T está bem definida e é uma isometria.

vii) Mostre que $T(X)$ é denso em $\widehat{X}$.

viii) Prove que $(\widehat{X}, \widehat{d})$ é completo.

íx) Seja $(Y, \widetilde{d})$ um espaço métrico completo e suponha que exista $\widetilde{T} : X \to Y$ uma isometria tal que $\widetilde{T}(X)$ é denso em Y. Mostre que Y e $\widehat{X}$ são isométricos.

Exercício 30 *Sejam X e Y espaços vetorias normados, $T : X \to Y$ uma transformação linear contínua. Mostre que*

$$\begin{aligned}
\|T\| &= \inf\{c > 0 : \|Tx\|_Y \leq c\|x\|_X \text{ para todo } x \in X\} \\
&= \sup_{\substack{x\in X \\ x\neq 0}} \frac{\|Tx\|_Y}{\|x\|_X} \\
&= \sup_{\substack{x\in X \\ \|x\|_X=1}} \|Tx\|_Y \\
&= \sup_{\substack{x\in X \\ \|x\|_X\leq 1}} \|Tx\|_Y \\
&= \sup_{\substack{x\in X \\ \|x\|_X<1}} \|Tx\|_Y
\end{aligned}$$

Exercício 31 *Prove que c'_0 é isometricamente isomorfo ao espaço ℓ^1.*

Exercício 32 *Considere $\ell^1 \times \mathbb{R}$ com a norma $\|(x, s)\|_1 = \|x\|_1 + |s|$. Prove que existe um homeomorfismo linear entre c' e $\ell^1 \times \mathbb{R}$.*